فصل ۴

ماتریس‌های حسگر غیرتصادفی پیشنهادی

۴-۱ مقدمه

همان طور که در فصل گذشته مطرح شد، برای پیاده‌سازی عمل نمونه‌برداری فشرده، نیازمند ماتریس‌های تعیین هستیم . از آن‌جا که شرط RIP بازسازی کامل و پایدار را ایجاب می‌کند، طراحی ماتریس‌های تعیینی که شرط RIP را ارضا می‌کنند بسیار مطلوب است. همان طور که در ادامه شرح داده می‌شود، بر آورده کردن شرط RIP در ماتریس‌های تعیینی، تاکنون تنها توسط استدلالات مبتنی بر ضریب همدوسی ماتریس میسر شده است. نکته منفی در این استدلال، کاهش بعد ماتریس به بهای ارضای شرطی قوی‌تر از RIP (ضریب همدوسی پایین) است. در این فصل به طراحی ماتریس‌های تعیینی با ضریب همدوسی پایین می‌پردازیم. برای این منظور، ابتدا به کمک کدهای متعامد نوری[۱] ماتریس‌های دودویی[۲] طراحی می‌کنیم و به کمک کران جانسون[۳] محدودیت ذاتی ابعاد این ماتریس‌ها را نشان می‌دهیم. سپس به کمک کدهای دودویی خطی، به ویژه کدهای BCH ماتریس‌های دوقطبی(± 1)[۴] و در نتیجه ماتریس‌های مختلط ارائه می‌دهیم. برای دستیابی به ابعاد بزرگتر و تنوع بیشتر، روش‌هایی برای ترکیب ماتریس‌های معرفی شده ارائه می‌دهیم. به طور خاص نشان می‌دهیم که با ترکیب ماتریس‌های دودویی و دوقطبی می‌توان به ماتریس‌هایی با ابعادی فراتر از طرح‌های پیشین دست یافت. در انتها، نشان می‌دهیم که با استفاده از روش‌های بازسازی حریص[۵] می‌توان یک بردار تنک را از روی نمونه‌های بدست

---

[۱] Optical Orthogonal Codes

[۲] Binary

[۳] Johnson's Bound

[۴] Bipolar

[۵] Greedy

آمده توسط این ماتریس‌ها و با پیچیدگی محاسباتی کمتر از میزان رایج $\mathcal{O}(n^۲)$ بدست آورد. دلیل اصلی کاهش محاسباتی، خاصیت چرخشی ستون‌های این ماتریس است که به کمک الگوریتم FFT منجر به تسریع محاسبات ضرب ماتریسی می‌شود. نتایج شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهند که عملکرد ماتریس‌های معرفی شده با عملکرد ماتریس‌های تصادفی قابل مقایسه است با این تفاوت که الگوریتم کارایی برای بازسازی بردار تنک از روی نمونه‌های تصادفی وجود ندارد.

۴-۲ ماتریس‌های دودویی

همان طور که اشاره شد، روش ما در این فصل برای برقرار کردن شرط RIP در یک ماتریس، کاهش ضریب همدوسی آن است. لم زیر، رابطه‌ی بین ضریب همدوسی و شرط RIP را نشان می‌دهد.

لم ۴-۱ اگر ستون‌های ماتریس $\mathbf{A}_{m\times n}$ همگی یکه باشند و ضریب همدوسی ماتریس برابر با $\mu_{\mathbf{A}}$ باشد، در این صورت ماتریس $\mathbf{A}$ ، شرط RIP از مرتبه $k < \frac{۱}{\mu_{\mathbf{A}}} + ۱$ با ثابت $\delta_k = (k-۱)\mu_{\mathbf{A}}$ را ارضا می کند.

اثبات: فرض کنید $\mathbf{x}_{n\times ۱}$ یک بردار با حداکثر k درایه ناصفر (k- تنک) باشد. در این صورت:

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_۲^۲ \quad = \quad \|\sum_{i=۱}^{n} x_i\mathbf{a}_i\|_۲^۲ = \sum_{i,j=۱}^{n} x_i x_j^* \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j\rangle = \|\mathbf{x}\|_۲^۲ + \sum_{i\neq j} x_i x_j^* \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j\rangle \qquad (۱-۴)$$

که در آن $\mathbf{a}_i$ و x_i به ترتیب بیانگر ستون i ماتریس $\mathbf{A}$ و المان i بردار $\mathbf{x}$ هستند، با استفاده از تعریف ضریب همدوسی ماتریس داریم:

$$|\sum_{i\neq j} x_i x_j^* \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j\rangle| \quad \leq \quad \mu_{\mathbf{A}} \sum_{i\neq j} |x_i|\cdot|x_j| = \mu_{\mathbf{A}} \Big(\sum_{i=۱}^{n} |x_i|\Big)^۲ - \mu_{\mathbf{A}}\|\mathbf{x}\|_۲^۲ \qquad (۲-۴)$$

از آن‌جا که بردار $\mathbf{x}$ ، k-تنک است می‌توانیم از نامساوی $\Big(\sum_{i=۱}^{n} |x_i|\Big)^۲ \leq k\|\mathbf{x}\|_۲^۲$ استفاده کنیم تا رابطه زیر بدست آید:

$$|\sum_{i\neq j} x_i x_j^* \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j\rangle| \leq (k-۱)\mu_{\mathbf{A}}\|\mathbf{x}\|_۲^۲ \qquad (۳-۴)$$

که شرط RIP را نتیجه می‌دهد:

$$۱ - (k-۱)\mu_{\mathbf{A}} \leq \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_۲^۲}{\|\mathbf{x}\|_۲^۲} \leq ۱ + (k-۱)\mu_{\mathbf{A}} \qquad (۴-۴)$$

و در نتیجه اثبات کامل است. ■

ماتریس‌های حسگر دودویی، ماتریس‌هایی هستند که قبل از نرمالیزه کردن ستون‌ها، از درایه‌های ۰ و ۱ تشکیل شده‌اند. یک نحوه ساخت چنین ماتریس‌هایی در [۳۸] معرفی شده است که پیش از این در فصل ۳ بیان شد. در این‌جا، ارتباط بین ماتریس‌های حسگر و کدهای متعامد نوری را بررسی می‌کنیم. کدهای متعامد نوری مجموعه‌ای از بردارهای دودویی با وزن ثابت (تعداد ۱ ثابت) هستند که ضرب داخلی هر دو بردار (و حتی بردارهای حاصل از گردش دوری آن‌ها) نسبت به وزن بردارها مقدار کمی است. از آنجا که درایه‌های این بردارها تنها شامل ۰ و ۱ است، جملات موجود در بسط ضرب دو بردار، همواره نامنفی هستند و در نتیجه با افزایش وزن بردارها، انتظار داریم که ضرب داخلی آن‌ها نیز افزایش یابد. فرض کنید $R(m,w,\lambda)$ حداکثر تعداد بردارهای دودویی $m\times 1$ با وزن w و ضرب داخلی حداکثر برابر با $\lambda\in\mathbb{Z}$ باشد (در این‌جا تنها ضرب داخلی همان بردارها منظور است و نه انتقال[۶] یافته‌های آن‌ها). در [۵۸] یک کران بالای قوی برای $R(m,w,\lambda)$ به صورت زیر اثبات شده است:

$$R(m,w,\lambda)\leq\left\lfloor\frac{m}{w}\left\lfloor\frac{m-1}{w-1}\lfloor\dots\lfloor\frac{m-\lambda}{w-\lambda}\rfloor\dots\rfloor\right\rfloor\right\rfloor \qquad (۵-۴)$$

که در آن $\lfloor x\rfloor$ جزء صحیح x را نشان می‌دهد.

در مخابرات نوری این بردارهای کد به عنوان امضاهای[۷] کاربرهای مختلف تلقی می‌شوند و از آن‌جا که در گیرنده از همبستگی[۸] سیگنال دریافتی با امضای هر کاربر پیام ارسالی آشکار می‌شود، ضرب داخلی کم بین امضاهای مختلف اهمیت بسزایی دارد. از این‌رو، با وجود عمود نبودن بردارهای امضا، به آن‌ها کدهای متعامد نوری (OOC[۹]) می‌گویند [۸۱]. از آن‌جا که ارتباطات نوری اغلب به صورت غیرهمزمان[۱۰] صورت می‌گیرد، نه تنها ضرب داخلی بین امضاها بلکه ضرب داخلی بین هر امضا و گردش‌های دوری سایر امضاها و همچنین گردش‌های دوری خود این امضا اهمیت شایانی دارد. بنابراین به جای یک λ ساده، دو پارامتر λ_a و λ_c تعریف می‌شوند: λ_a برابر است با حداکثر میزان خودهمبستگی در بین بردارهای کد، هنگامی که میزان گردش دوری ناصفر باشد و λ_c حداکثر همبستگی بین هر دو حالت چرخش یافته بردارهای کد مختلف را نشان می‌دهد. کدهای متعامد نوری اغلب به صورت $(m,w,\lambda_a,\lambda_c)$ شناسایی می‌شوند اما هنگامی که دو پارامتر λ_a و λ_c برابر

[۶] shift
[۷] Signature
[۸] Correlation
[۹] Optical Orthogonal Code
[۱۰] Asynchronous

باشند، از نمایش (m, w, λ) استفاده می‌شود.

فرض کنید $\mathcal{A}$ مجموعه‌ای از بردارهای متعامد نوری با بعد m ، وزن w و پارامترهای $\lambda_a = \lambda_c = \lambda$ باشد؛ همچنین فرض کنید تمام گردش‌های دوری این بردارها نیز در $\mathcal{A}$ گنجانده شده باشند. طبق تعریف کدهای متعامد نوری، ضرب داخلی هر دو بردار داخل $\mathcal{A}$ حداکثر λ است. اکنون اگر ماتریس $\mathbf{A}_{m\times n}$ را با قراردادن این بردارها به عنوان ستون‌های ماتریس و سپس یکه کردن آن‌ها با تقسیم ستون‌ها بر $\sqrt{w}$ بسازیم، ضریب همدوسی ماتریس $\mathbf{A}$ حداکثر $\frac{\lambda}{w}$ خواهد بود. در اینجا فرض کرده‌ایم که تعداد اعضاء مجموعه $\mathcal{A}$ برابر n است. همچنین ترتیب قرار گرفتن این بردارها به عنوان ستون‌های $\mathbf{A}$ اهمیتی در ضریب همدوسی ماتریس حاصل ندارد. در زیر به طور مختصر نحوه‌ی ساخت یک کد متعامد نوری را که بر گرفته از [۳۹] و بر مبنای میدان‌های متناهی است، بیان می‌کنیم.

فرض کنید $q = ۱۶^a$ که $a \in \mathbb{N}$ است و همچنین فرض کنید $\mathbb{F} = GF(q)$ و α یک ریشه اولیه میدان $\mathbb{F}$ باشد. از آن‌جا که $۵|q-۱$، می‌توان نوشت $q = ۵d+۱$. تعریف می‌کنیم :

$$\mathcal{D}_i = \{\alpha^{d+i}, \alpha^{۲d+i}, \ldots, \alpha^{۵d+i}\} \quad , \quad ۰ \le i \le d-۱ \tag{۴-۶}$$

از آن‌جا که تعداد ۱ها در کدهای متعامد نوری بسیار کمتر از تعداد ۰هاست، معمولاً بردارهای کد را توسط مکان ۱های آن‌ها مشخص می‌کنیم. در طرح مورد نظر، d بردار کد با طول $q-۱$ می‌سازیم به گونه‌ای که اگر مکان‌های ناصفر بردار iام مجموعه $\mathcal{C}_i$ را تشکیل دهد، داشته باشیم:

$$\mathcal{C}_i = \log_\alpha(\mathcal{D}_i - ۱) \quad , \quad ۱ \le i \le d-۱ \tag{۴-۷}$$

دقت کنید که $۱ \in \mathcal{D}_۰$ و $\mathcal{D}_۰$ برای ساختن کد استفاده نشده است. در [۳۹] نشان داده شده است که با این روش $\frac{۱۶^a-۶}{۵}$ بردار کد تولید می‌شوند که توسط سه تایی $(۱۶^a - ۱, ۵, ۲)$ مشخص می‌شوند. از آن‌جا که در ساختار ماتریس حسگر تمام گردش‌های این بردارها نیز مورد استفاده قرار می‌گیرند، ماتریسی با ابعاد $n \times (۱۶^a - ۱)$ ساخته می‌شود که $n \lessapprox \frac{(۱۶^a-۱)(۱۶^a-۶)}{۵}$. با توجه به ضریب همدوسی، این ماتریس، RIP مرتبه ۳ را با ثابت $\delta_۳ = ۰/۸$ ارضا می‌کند. در [۳۹] با استفاده از روشی مشابه، کدهای متعامد نوری $(۲, w, n)$ با wهای بزرگتر (مرتبه RIP بزرگتر) معرفی شده‌اند که با توجه به نامساوی (۴-۵) شبه بهینه به نظر می‌رسند.

همان طور که پیشتر نیز اشاره شد، در [۳۸] یک طرح ساخت ماتریس دودویی با ابعاد $p^۲ \times p^{r+۱}$ و ضریب همدوسی $\frac{r}{p}$ بدون استفاده از کدهای نوری معرفی شده است. در اینجا p توان صحیحی از یک عدد اول است و همان طور که در فصل ۳ توضیح داده شد، ستون‌های ماتریس بر اساس چندجمله‌ای‌ها در میدان متناهی $GF(p)$ ساخته می‌شود. در زیر نشان می‌دهیم که این ماتریس‌ها، در بین ماتریس‌های دودویی، از لحاظ ضریب همدوسی در حالت حدی $\frac{p}{r^۲} \to \infty$ بهینه هستند:

$$\begin{aligned} \lim_{\frac{p}{r^۲}\to\infty} \frac{p^{r+۱}}{R(p^۲,p,r)} &\geq \lim_{\frac{p}{r^۲}\to\infty} \prod_{i=۰}^{r} \frac{p(p-i)}{p^۲-i} \geq \lim_{\frac{p}{r^۲}\to\infty} \left(\frac{p(p-r)}{p^۲-r}\right)^{r+۱} \geq \lim_{\frac{p}{r^۲}\to\infty} \left(۱-\frac{r}{p}\right)^{r+۱} \\ &= \lim_{\frac{p}{r^۲}\to\infty} \left(\left(۱-\frac{r}{p}\right)^{-\frac{p}{r}}\right)^{-\frac{r(r+۱)}{p}} \geq \lim_{\frac{p}{r^۲}\to\infty} e^{-\frac{r(r+۱)}{p}} = e^{۰} = ۱ \end{aligned} \qquad (۸-۴)$$

۴-۳ ماتریس‌های دو قطبی به کمک کدهای BCH

در این بخش به بررسی ارتباط میان نظریه‌ی کدگذاری و ماتریس‌های حسگر می‌پردازیم. از آن‌جا که پارامترهای k و n هم در مبحث نمونه‌برداری فشرده و هم در نظریه‌ی کدگذاری مورد استفاده قرار می‌گیرند، برای ایجاد تمایز، متغیرهای مربوط به کد را با علامت $\tilde{}$ نمایش می‌دهیم؛ به عنوان مثال $\tilde{n}$ طول کد را نشان میدهد در حالی که n بیانگر تعداد ستونهای ماتریس حسگر است.

فرض کنید $\mathcal{C}(\tilde{n},\tilde{k};۲)$ یک کد خطی بلوکی دودویی و $۱_{\tilde{n}\times ۱}$ بردار تمام یک باشند؛ می‌گوییم $\mathcal{C}$ متقارن است هر گاه $۱_{\tilde{n}\times ۱} \in \mathcal{C}$ باشد. برای کدهای متقارن اگر $\mathbf{a}_{\tilde{n}\times ۱}$ یک بردار کد باشد، به دلیل خطی بودن کد، مکمل آن که به صورت $\mathbf{a}_{\tilde{n}\times ۱} \oplus ۱_{\tilde{n}\times ۱}$ تعریف می‌شود نیز یک بردار کد است. در نتیجه مجموعه بردارهای کد به صورت زوج‌های مکمل خواهند بود.

قضیه ۴-۱ فرض کنید $\mathcal{C}(\tilde{n},\tilde{k};۲)$ یک کد متقارن با حداقل فاصله‌ی $\tilde{d}_{min}$ باشد و فرض کنید $\tilde{\mathbf{A}}_{\tilde{n}\times ۲^{\tilde{k}-۱}}$ ماتریس حاصل از کنار هم گذاشتن بردارهای کد به صورت ستونی باشد به نحوی که از هر زوج مکمل، دقیقاً یکی انتخاب شده باشد. تعریف می کنیم:

$$\mathbf{A}_{\tilde{n}\times ۲^{\tilde{k}-۱}} \triangleq \frac{۱}{\sqrt{\tilde{n}}}\left(۲\tilde{\mathbf{A}}_{\tilde{n}\times ۲^{\tilde{k}-۱}} - (۱)_{\tilde{n}\times ۲^{\tilde{k}-۱}}\right) \qquad (۹-۴)$$

در این صورت، ضریب همدوسی ماتریس $\mathbf{A}$ حداکثر برابر با $\frac{\tilde{n}-۲\tilde{d}_{min}}{\tilde{n}}$ خواهد بود.

اثبات: ابتدا دقت کنید که ستونهای ماتریس $\mathbf{A}$ همگی یکه هستند. در حقیقت، $۲\tilde{\mathbf{A}}_{\tilde{n}\times ۲^{\tilde{k}-۱}} - (۱)_{\tilde{n}\times ۲^{\tilde{k}-۱}}$

همان ماتریس $\mathbf{A}$ است که در آن صفرها با ۱− جایگذاری شده‌اند (نمایش دو قطبی). بنابراین، قدر مطلق هر درایه ماتریس $\mathbf{A}$ برابر با $\frac{۱}{\sqrt{\tilde{n}}}$ است که یکه بودن ستون‌ها را نشان می‌دهد.

فرض کنید $\mathbf{a}_{\tilde{n}\times ۱}, \mathbf{b}_{\tilde{n}\times ۱}$ دو ستون متمایز در ماتریس $\mathbf{A}$ متناظر با ستون‌های $\tilde{\mathbf{a}}_{\tilde{n}\times ۱}, \tilde{\mathbf{b}}_{\tilde{n}\times ۱}$ در ماتریس $\tilde{\mathbf{A}}$ باشند. اگر $\tilde{\mathbf{a}}$ و $\tilde{\mathbf{b}}$ در l مکان متفاوت باشند، داریم:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{۱}{\tilde{n}} \Big(۱ \times (\tilde{n} - l) + (-۱) \times l \Big) = \frac{\tilde{n} - ۲l}{\tilde{n}} \qquad (۱۰\text{–}۴)$$

همچنین $\tilde{\mathbf{b}}$ و $\tilde{\mathbf{a}} \oplus ۱_{\tilde{n}\times ۱}$ (مکمل $\tilde{\mathbf{a}}$) در $\tilde{n} - l$ مکان با یکدیگر متفاوت هستند و از آن‌جا که هر سه بردار $\{\tilde{\mathbf{a}},\ \tilde{\mathbf{a}} \oplus ۱_{\tilde{n}\times ۱},\ \tilde{\mathbf{b}}\}$، بردار کدهای متفاوتی هستند (از هر زوج مکمل دقیقاً یکی انتخاب شده بود) هر دوی l و $\tilde{n} - l$ کمتر یا مساوی $\tilde{d}_{min}$ خواهند بود. یعنی:

$$\begin{cases} l \geq \tilde{d}_{min} \\ \tilde{n} - l \geq \tilde{d}_{min} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \tilde{d}_{min} \leq l \leq \tilde{n} - \tilde{d}_{min} \Rightarrow |\tilde{n} - ۲l| \leq \tilde{n} - ۲\tilde{d}_{min} \qquad (۱۱\text{–}۴)$$

دقت کنید $۰_{\tilde{n}\times ۱}, ۱_{\tilde{n}\times ۱} \in \mathcal{C}$ و برای هر بردار کد $\tilde{\mathbf{a}}$ یکی از دو مقدار $d(۰_{\tilde{n}\times ۱}, \tilde{\mathbf{a}})$ و یا $d(۱_{\tilde{n}\times ۱}, \tilde{\mathbf{a}})$ حداکثر برابر است با $\frac{\tilde{n}}{۲}$. از این رو، $\tilde{n} - ۲\tilde{d}_{min} \geq ۰$. با ترکیب کردن (۴–۱۰) و (۴–۱۱) داریم:

$$|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| \leq \frac{\tilde{n} - ۲\tilde{d}_{min}}{\tilde{n}} \qquad (۱۲\text{–}۴)$$

که کران مورد نظر برای ضریب همدوسی ماتریس $\mathbf{A}$ را نتیجه می‌دهد. ■

قضیه فوق تنها زمانی کارساز است که $\tilde{d}_{min}$ نزدیک به $\frac{\tilde{n}}{۲}$ باشد؛ برای این که کران بالای k که از ضریب همدوسی نتیجه می‌شود به اندازه کافی بزرگ باشد، باید صورت کسر ذکر شده در (۴–۱۲) به صفر نزدیک باشد. با توجه به قضایای موجود در نظریه‌ی کدگذاری می‌دانیم که $\tilde{d}_{min} \leq \tilde{n} - \tilde{k} + ۱$. لذا برای این که $\tilde{d}_{min}$ در حد $\frac{\tilde{n}}{۲}$ باشد، باید تعداد بیت‌های توازن حداقل در حد تعداد بیت‌های اطلاعاتی باشند که در مورد کدهای رایج در مخابرات چنین امری دور از ذهن است. در ادامه نشان می‌دهیم که می‌توان به کمک کدهای BCH چنین کدهایی را طراحی کرد.

۴–۳–۱ کدهای BCH با $\tilde{d}_{min}$ بزرگ

کدهای BCH زیردسته‌ای از کدهای چرخشی دودویی هستند که در آن‌ها $\tilde{n} = ۲^{\tilde{m}} - ۱$ $(\tilde{m} \in \mathbb{N})$ و بردارهای کد توسط یک چندجمله‌ای مولد $g(x) \in GF(۲)[x]$ با شرط $g(x) | x^{۲^{\tilde{m}}-۱} + ۱$ تولید می‌شوند [۶۶] . با توجه به

ساختار میدان‌های متناهی داریم:

$$x^{۲^{\tilde{m}}-۱}+۱=\prod_{\substack{r\in GF(۲^{\tilde{m}})\\ r\neq ۰}}(x-r) \tag{۱۳-۴}$$

در نتیجه چندجمله‌ای مولد در BCH را می‌توان به فاکتورهای خطی در $GF(۲^{\tilde{m}})[x]$ تجزیه کرد. فرض کنید $\alpha\in GF(۲^{\tilde{m}})$ یک ریشه اولیه برای این میدان و α^i یکی از ریشه‌های $g(x)$ باشد؛ از آن‌جا که $g(x)\in GF(۲)[x]$، تمام مزدوج‌های عنصر α^i نسبت به $GF(۲)$ نیز ریشه‌های $g(x)$ هستند. در میدان‌های متناهی با مشخصه ۲ می‌دانیم که این مزدوج‌ها عناصر متفاوت مجموعه $\{\alpha^{i۲^j}\}_{j=۰}^{\tilde{m}-۱}$ هستند. به علاوه، از آن‌جا که $\alpha^{۲^{\tilde{m}}-۱}=۱$ برای هر $i_۱,i_۲$ که $i_۱\equiv i_۲(\bmod ۲^{\tilde{m}}-۱)$ ، داریم $\alpha^{i_۱}=\alpha^{i_۲}$ که خاصیت چرخشی توان‌ها را نشان می‌دهد.

مزیت اصلی کدهای BCH نسبت به سایر کدهای چرخشی، وجود کران پایین تضمین شده برای $\tilde{d}_{min}$ است: اگر $\alpha^{i_۱},\ldots,\alpha^{i_d}$ ریشه‌های متمایزی از $g(x)$ باشند (نه لزوماً تمامی ریشه‌ها) به طوری که $i_۱,\ldots,i_d$ یک تصاعد حسابی تشکیل دهند، داریم $\tilde{d}_{min}\geq d+۱$.

اکنون به مسئله طراحی کد با $\tilde{d}_{min}$ بزرگ بازمی‌گردیم. در این روش، به جای طراحی چندجمله‌ای مولد، چندجمله‌ای آزمون توازن[۱۱] را می‌سازیم:

$$h(x)\triangleq\frac{x^{۲^{\tilde{m}}-۱}+۱}{g(x)} \tag{۱۴-۴}$$

به بیان بهتر، هر عنصری از میدان یا ریشه‌ای از $g(x)$ است و یا $h(x)$. برای ساختن $h(x)$ ریشه‌های آن را معرفی می‌کنیم. فرض کنید $l<\tilde{m}-۱$ عددی صحیح است و :

$$\mathcal{G}_{\tilde{m}}^{(l)}=\{\alpha^{۰},\alpha^{۱},\ldots,\alpha^{۲^{\tilde{m}-۱}+۲^l-۱}\} \tag{۱۵-۴}$$

دقت کنید که تعریف $\mathcal{G}_{\tilde{m}}^{(l)}$ به انتخاب ریشه اولیه α بستگی دارد. اکنون $\mathcal{H}_{\tilde{m}}^{(l)}$ را به صورت زیرمجموعه‌ای از $\mathcal{G}_{\tilde{m}}^{(l)}$ تعریف می‌کنیم که نسبت به عمل مزدوج‌گیری بسته باشد:

$$\mathcal{H}_{\tilde{m}}^{(l)}\triangleq\{r\in\mathcal{G}_{\tilde{m}}^{(l)}\mid\forall\, j\in\mathbb{N}:\ r^{۲^j}\in\mathcal{G}_{\tilde{m}}^{(l)}\} \tag{۱۶-۴}$$

تعریف فوق نشان می‌دهد که برای هر $r\in\mathcal{H}_{\tilde{m}}^{(l)}$ تمام مزدوج‌های آن به صورت $r^{۲^j}$ نیز داخل $\mathcal{H}_{\tilde{m}}^{(l)}$ قرار دارند.

[۱۱] Parity Check

اکنون چندجمله‌ای آزمون توازن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$h(x) = \prod_{r \in \mathcal{H}_{\tilde{m}}^{(l)}} (x - r) \tag{۱۷-۴}$$

همانطور که اشاره شد، برای هر r که ریشه $h(x)$ باشد، تمام مزدوج‌های آن نیز ریشه $h(x)$ خواهند بود. در نتیجه $h(x) \in GF(۲)[x]$ که شرط لازم و کافی برای دودویی بودن ضرایب $g(x)$ است. همچنین:

$$۱ = \alpha^{۰} \in \mathcal{G}_{\tilde{m}}^{(l)} \Rightarrow ۱ \in \mathcal{H}_{\tilde{m}}^{(l)} \Rightarrow (۱ + x) \big| h(x) \tag{۱۸-۴}$$

که نشان می‌دهد بردار تمام یک متعلق به فضای کد است:

$$\begin{aligned} c = [\underbrace{۱, \ldots, ۱}_{۲^{\tilde{m}}-۱}]^T \quad &\Rightarrow \quad c(x) = ۱ + x + \cdots + x^{۲^{\tilde{m}}-۲} = \frac{x^{۲^{\tilde{m}}-۱} + ۱}{x + ۱} \\ &\Rightarrow \quad x^{۲^{\tilde{m}}-۱} + ۱ \big| (x^{۲^{\tilde{m}}-۱} + ۱) \frac{h(x)}{۱ + x} = c(x) h(x) \end{aligned} \tag{۱۹-۴}$$

در نتیجه کد تولید شده توسط $g(x) = \frac{x^{\tilde{n}}+۱}{h(x)}$ یک کد متقارن است که تمام شرایط قضیه ۴-۱ را بر آورده می‌کند. برای یافتن حداقل فاصله کد، دقت کنید که ریشه‌های $h(x)$ زیرمجموعه‌ای از $\mathcal{G}_{\tilde{m}}^{(l)}$ هستند و در نتیجه، تمام اعضای $GF(۲^{\tilde{m}}) \backslash \mathcal{G}_{\tilde{m}}^{(l)}$ ریشه‌های $g(x)$ هستند:

$$\forall \;\; ۲^{\tilde{m}-۱} + ۲^{l} \leq j \leq ۲^{\tilde{m}} - ۲ : \qquad g(\alpha^{j}) = ۰ \tag{۲۰-۴}$$

بنابراین، یک تصاعد حسابی با طول حداقل $۲^{\tilde{m}-۱} - ۲^{l} - ۱$ در بین توان‌های αای که ریشه $g(x)$ هستند یافت می‌شود. بنابراین:

$$\tilde{d}_{min} \geq (۲^{\tilde{m}-۱} - ۲^{l} - ۱) + ۱ = ۲^{\tilde{m}-۱} - ۲^{l} \tag{۲۱-۴}$$

روند رایج در نظریه‌ی کدگذاری چنین است که بر حسب $\tilde{n}, \tilde{k}$ داده شده، به دنبال کدی با حداکثر $\tilde{d}_{min}$ هستیم . در این‌جا، برای یک $\tilde{d}_{min}$ مناسب و یک $\tilde{n}$ داده شده، کدی طراحی کردیم که $\tilde{k}$ آن همچنان نامعلوم است:

$$\begin{aligned} \tilde{n} &= \tilde{k} + deg\big(g(x)\big) \\ \Rightarrow \tilde{k} &= \tilde{n} - deg\big(g(x)\big) = \big(deg\big(g(x)\big) + deg\big(h(x)\big)\big) - deg\big(g(x)\big) = deg\big(h(x)\big) = |\mathcal{H}_{\tilde{m}}^{(l)}| \end{aligned} \tag{۲۲-۴}$$

قضیه زیر تعداد اعضای مجموعه $|\mathcal{H}_{\tilde{m}}^{(l)}|$ را به یک مساله ترکیبیاتی مربوط می‌کند:

قضیه ۴-۲ با استفاده از نمادهای قبلی، $|\mathcal{H}_{\tilde{m}}^{(l)}|$ برابر است با تعداد دنباله‌های دودویی به طول $\tilde{m}$ به طوری که بین هر دو ۱ متوالی، حداقل $\tilde{m}-l-1$ صفر به صورت گردشی وجود داشته باشد.

اثبات: نشان می‌دهیم که یک نگاشت یک به یک بین تعداد اعضای $\mathcal{H}_{\tilde{m}}^{(l)}$ و دنباله‌های دودویی مذکور وجود دارد. فرض کنید $(b_{\tilde{m}-1},\ldots,b_0)\in\{0,1\}^{\tilde{m}}$ یکی از این دنباله‌های دودویی و β نمایش اعشاری این دنباله باشد:

$$\beta=(\overline{b_{\tilde{m}-1}\ldots b_0})_2=\sum_{i=0}^{\tilde{m}-1}b_i 2^i \qquad (۴-۲۳)$$

نشان می‌دهیم $\alpha^\beta\in\mathcal{H}_{\tilde{m}}^{(l)}$. برای سادگی فرض کنید β_j نمایش اعشاری دنباله اصلی (که β را تولید می‌کند) پس از j واحد انتقال چرخشی به سمت چپ باشد:

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= (\overline{b_{\tilde{m}-1}\ldots b_0})_2\\
\beta_1 &= (\overline{b_{\tilde{m}-2}\ldots b_0 b_{\tilde{m}-1}})_2\\
\beta_2 &= (\overline{b_{\tilde{m}-3}\ldots b_0 b_{\tilde{m}-1} b_{\tilde{m}-2}})_2\\
&\vdots\\
\beta_{\tilde{m}-1} &= (\overline{b_0 b_{\tilde{m}-1}\ldots b_1})_2
\end{aligned} \qquad (۴-۲۴)$$

اکنون داریم

$$\begin{aligned}
2\beta_j &= 2\times(\overline{b_{\tilde{m}-1-j}\ldots b_0 b_{\tilde{m}-1} b_{\tilde{m}-j}})_2 = 2^{\tilde{m}}b_{\tilde{m}-1-j}+(\overline{b_{\tilde{m}-2-j}\ldots b_0 b_{\tilde{m}-1} b_{\tilde{m}-j}0})_2\\
&\equiv \beta_{j+1}\pmod{2^{\tilde{m}}-1}\Rightarrow\ \beta_j\equiv 2^j\beta\pmod{2^{\tilde{m}}-1}\Rightarrow\ \alpha^{\beta_j}=\alpha^{2^j\beta}
\end{aligned} \qquad (۴-۲۵)$$

که نشان می‌دهد $\{\alpha^{\beta_j}\}_j$ مجموعه مزدوج‌های α^β است. برای این که نشان دهیم $\alpha^\beta\in\mathcal{H}_{\tilde{m}}^{(l)}$، باید ثابت کنیم که تمام مزدوج‌های آن متعلق به $\mathcal{G}_{\tilde{m}}^{(l)}$ هستند و یا به طور معادل، باید نشان دهیم $0\le\beta_j\le 2^{\tilde{m}-1}+2^l-1$. واضح است که $\beta_j>0$؛ برای اثبات طرف دیگر نامساوی فوق، دو حالت در نظر می‌گیریم:

۱. با ارزش‌ترین بیت β_j صفر است؛

$$b_{\tilde{m}-1-j}=0\Rightarrow\beta_j<2^{\tilde{m}-1}<2^{\tilde{m}-1}+2^l-1 \qquad (۴-۲۶)$$

۲. با ارزش‌ترین بیت β_j یک است؛ با توجه به خاصیت قرارگیری ۱ها در دنباله، $\tilde{m}-l-۱$ بیت باارزش پس از باارزش‌ترین بیت، همگی صفر هستند:

$$b_{\tilde{m}-۱-j}=۱ \quad \Rightarrow \quad b_{\tilde{m}-۲-j}=\cdots=b_{l-j}=۰ \Rightarrow \quad \beta_j \le ۲^{\tilde{m}-۱}+\sum_{j=۰}^{l-۱} ۲^j$$
$$\Rightarrow \quad \beta_j \le ۲^{\tilde{m}-۱}+۲^l-۱ \qquad (۲۷\text{–}۴)$$

تاکنون نشان دادیم که دنباله‌های دودویی با نحوه‌ی مناسب قرارگیری ۱ها، متناظر با ریشه‌هایی مجزا در $h(x)$ هستند. برای تکمیل اثبات باید نشان دهیم تمام ریشه‌های $h(x)$ به این صورت پوشانده شده‌اند. دقت کنید که اگر بسط $\tilde{m}$رقمی مبنای ۲ عدد اعشاری β خاصیت ذکر شده را در مورد نحوه قرارگیری ۰ و ۱ها در کنار هم نداشته باشد، حداقل یکی از β_jها از $۲^{\tilde{m}-۱}+۲^l-۱$ بزرگتر خواهد بود . در نتیجه تمام مزدوج‌های α^β در $\mathcal{G}_{\tilde{m}}^{(l)}$ قرار نمی‌گیرند. ■

قضیه ۴–۲ پارامتر $\tilde{k}$ ایجاد شده در این نحوه طراحی کد را به یک مساله ترکیباتی تبدیل می‌کند. در پیوست الف نشان می‌دهیم که $|\mathcal{H}_{\tilde{m}}^{(l)}| \gtrapprox \mathcal{O}\left(۲^{(l+۱)\frac{\ln \tilde{m}-l-۱}{\tilde{m}-l-۱}}\right)$.

۴–۳–۲ الگوریتم تولید ماتریس

با توجه به قضیه ۴–۱ به هر نحوی که از هریک از زوج‌های مکمل، یک عضو را انتخاب کنیم می‌توان به ماتریسی با ضریب همدوسی مورد نظر دست یافت. از آن‌جا که $۲^{\tilde{k}-۱}$ زوج مکمل وجود دارد، جدا از نحوه چینش بردارهای کد به عنوان ستون‌های ماتریس، $۲^{۲^{\tilde{k}-۱}}$ حالت مختلف برای ساختن ماتریس حسگر وجود دارد. از بین این تعداد حالت بسیار زیاد، ویژگی برخی از آن‌ها متمایز کننده است. چنانچه بتوانیم انتخاب عضو از زوج‌های مکمل را به نحوی انجام دهیم که بردارهای انتخاب شده نسبت به چرخش دوری بسته باشند، می‌توان پیچیدگی محاسباتی در الگوریتم بازسازی بردار تنک از روی نمونه‌ها را کاهش داد (این مطلب در بخش ۴–۶ مفصلاً شرح داده خواهد شد). یادآوری می‌شود که کدهای BCH، خود زیرمجموعه‌ای از کدهای گردشی هستند. بنابراین اگر در انتخاب عضو از زوج‌های مکمل با دقت عمل کنیم، می‌توانیم خاصیت گردشی کد را کماکان حفظ کنیم. از آن‌جا که طول کد ($\tilde{n}=۲^{\tilde{m}}-۱$) عددی فرد است، در هر زوج مکمل دقیقاً یکی از بردارها تعداد زوجی المان ۱ دارد. اکنون اگر تمام بردارهای کد با وزن فرد (و یا زوج) را دور بریزیم، از هر زوج مکمل دقیقاً یکی را انتخاب کرده‌ایم و همچنین گردش‌های دوری بردارهای کد باقیمانده نیز حفظ شده‌اند. مراحل ساخت

ماتریس حسگر به طور خلاصه به شرح زیر است:

۱. برای یک مقدار k (مرتبه RIP) داده شده، قرار دهید $i = \lceil \log_۲(k) \rceil$ و انتخاب کنید $\tilde{m} \geq i$. ماتریس نهایی $m = ۲^{\tilde{m}} - ۱$ سطر خواهد داشت؛

۲. فرض کنید $\mathcal{H}_{seq}$ مجموعه تمام دنباله‌های دودویی به طول $\tilde{m}$ باشد که بین هر دو ۱ حداقل i صفر به صورت دوری قرار گرفته باشد. همچنین فرض کنید $\mathcal{H}_{dec}$ نمایش اعشاری این دنباله‌ها باشد؛

۳. یک ریشه اولیه دلخواه از میدان $GF(۲^{\tilde{m}})$ مثل α انتخاب کنید و قرار دهید:

$$\mathcal{H} = \{\alpha^r \mid r \in \mathcal{H}_{dec}\} \tag{۲۸-۴}$$

۴. چند جمله ای‌های مولد کد و آزمون توازن را به صورت زیر تعریف کنید:

$$\begin{aligned} h(x) &= \prod_{r \in \mathcal{H}} (x - r) \\ g(x) &= \frac{x^{۲^{\tilde{m}}-۱} + ۱}{h(x)} \end{aligned} \tag{۲۹-۴}$$

۵. ماتریس $\tilde{\mathbf{A}}_{(۲^{\tilde{m}}-۱)\times(۲^{\deg(h)-۱})}$ را با کنار هم قرار دادن بردارهای کد با توازن زوج تشکیل دهید (ترتیب قرارگرفتن بردارها دلخواه است)؛

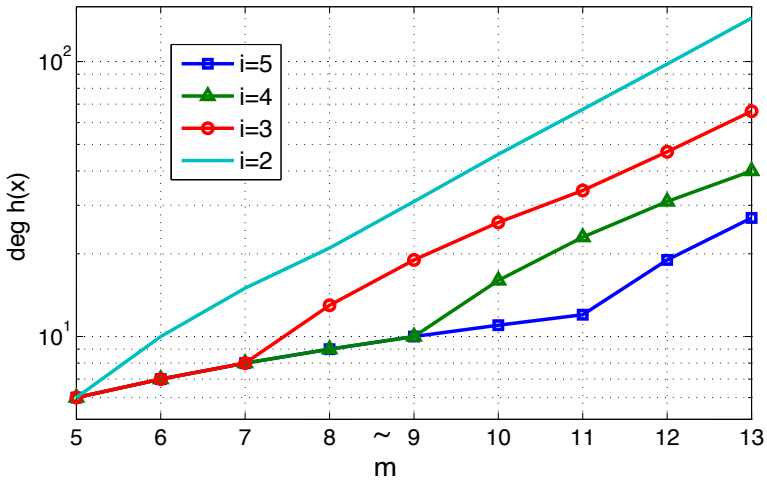
۶. صفرهای ماتریس $\tilde{\mathbf{A}}$ را با ۱- جایگذاری و ستون‌ها را با ضرب کردن در $\frac{۱}{\sqrt{m}}$ یکه کنید تا ماتریس $\mathbf{A}_{(۲^{\tilde{m}}-۱)\times ۲^{\deg h-۱}}$ بدست آید؛

. به عنوان یک مثال ساده، حالت $\tilde{m} = i$ را بررسی می‌کنیم؛ به راحتی می‌توان نشان داد که تعداد ۱ها در دنباله‌های دودویی حداکثر برابر با ۱ است، در نتیجه $\mathcal{H}_{dec} = \{۰, ۲^۰, ۲^۱, ۲^۲, \ldots, ۲^{۲^{i-۱}}\}$. این به آن معنی است که $h(x)$ از ضرب $x + ۱$ در چندجمله‌ای مینیمال α حاصل می‌شود. از آن‌جا که برای تولید کد از چندجمله‌ای $g(x)$ به جای $(x + ۱)g(x)$ استفاده می‌کنیم (دور ریختن توازن‌های فرد)، $h(x)$ موثر همان چندجمله‌ای مینیمال α خواهد بود که یک چندجمله‌ای اولیه است. در این حالت ماتریس $\tilde{\mathbf{A}}$ یک ماتریس مربعی $(۲^i - ۱) \times (۲^i - ۱)$ است که ستون‌های آن از گردش‌های دوری یک دنباله شبه تصادفی[۱۲] حاصل شده‌اند و ضریب همدوسی آن برابر با $\frac{۱}{۲^i - ۱}$ است.

[۱۲] Pseudo Noise Sequence (PNS)

$\tilde{m}$	$h(x)$
۴	$x^{۵}+x^{۴}+x^{۲}+۱$
۶	$x^{۷}+x^{۶}+x^{۲}+۱$
۸	$x^{۱۳}+x^{۱۲}+x^{۱۰}+x^{۹}+x^{۸}+x^{۴}+x^{۳}+۱$
۱۰	$x^{۲۶}+x^{۲۵}+x^{۲۴}+x^{۲۰}+x^{۱۶}+x^{۱۴}+x^{۱۳}+x^{۱۲}$ $+x^{۱۰}+x^{۹}+x^{۷}+x^{۵}+x^{۴}+x^{۳}+x+۱$

جدول ۴-۱: چندجمله‌ای آزمون توازن برای مقادیر متفاوت $\tilde{m}$ و $i=۳$.



شکل ۴-۱: درجه چندجمله‌ای $h(x)$ برای مقادیر متفاوت $\tilde{m}$ و i.

جدول ۴-۱ چند جمله ای‌های آزمون توازن برای حالت $i=۳$ (و نتیجتاً $k<۸$) را نمایش می‌دهد. همچنین شکل ۴-۱ درجه $h(x)$ را برای چند انتخاب مختلف $\tilde{m}$ و i نشان می‌دهد؛ نرخ رشد این درجه بر حسب $\tilde{m}$ در مقادیر کوچک خطی و از جایی به بعد، نمایی است.

۴-۴ ماتریس‌های مختلط به کمک کدهای غیردودویی

در بخش قبل با استفاده از کدهای دودویی، ماتریس‌های حسگر دو قطبی ساختیم. در این بخش به دنبال تعمیم روش قبلی به کدهای p-سمبلی[۱۳] هستیم. برای این منظور دو مانع اصلی در سر راه است: ۱) $\tilde{d}_{min}$ در کدهای p-سمبلی، تنها تعداد مکان‌های نابرابر در دو کد را نمایش می‌دهد و اطلاعات بیشتری در مورد ارتباط مقادیر نابرابر در اختیار قرار نمی‌دهد (در حالت دودویی، نابرابربودن دو مقدار به منزله ۰ و ۱ بودن آن‌هاست)؛ ۲) در

[۱۳] p-ary Codes

کدهای دودویی با تبدیل ۰ به ۱−، قدر مطلق درایه‌ها را برابر کردیم اما در کدهای p–سمبلی، p مقدار با اندازه‌های برابر مورد نیاز است. برای حل مشکل دوم، از به توان رساندن[۱۴] کد بهره می‌جوییم که منجر به تولید ماتریس مختلط می‌شود.

فرض کنید $\mathcal{C}(\tilde{n},\tilde{k};p)$ یک کد خطی p–سمبلی روی میدان $GF(p)$ (p توانی از یک عدد اول است) با حداقل فاصله $\tilde{d}_{min}$ باشد به نحوی که بردار تمام یک $\mathbf{1}_{\tilde{n}\times 1}$ متعلق به فضای کد باشد؛ به دلیل خطی بودن کد، تمامی بردارهای $\mathbf{0}_{\tilde{n}\times 1}, \mathbf{1}_{\tilde{n}\times 1}, \ldots, (p-1)_{\tilde{n}\times 1}$ نیز در فضای کد قرار دارند. مشابه حالت دودویی، برای هر دو بردار کد $\mathbf{a}_{\tilde{n}\times 1}$ و $\mathbf{b}_{\tilde{n}\times 1}$ اگر تعریف کنیم $\mathbf{c}_{\tilde{n}\times 1} \triangleq \mathbf{a} \oplus -\mathbf{b}$ که $\oplus$ جمع المان به المان به پیمانه p است، یکی از دو حالت زیر رخ می‌دهد:

۱. $\mathbf{c} = \mathbf{0}_{\tilde{n}\times 1}$ یا $\mathbf{c} = \mathbf{1}_{\tilde{n}\times 1}$ یا ... یا $\mathbf{c} = (p-1)_{\tilde{n}\times 1}$؛

۲. $\mathbf{c} \notin \{\mathbf{0}_{\tilde{n}\times 1}, \mathbf{1}_{\tilde{n}\times 1}, \ldots, (p-1)_{\tilde{n}\times 1}\}$؛ بنابراین

$$\begin{cases} d(\mathbf{c}_{\tilde{n}\times 1}, \mathbf{0}_{\tilde{n}\times 1}) \geq \tilde{d}_{min} \\ d(\mathbf{c}_{\tilde{n}\times 1}, \mathbf{1}_{\tilde{n}\times 1}) \geq \tilde{d}_{min} \\ \vdots \\ d(\mathbf{c}_{\tilde{n}\times 1}, (p-1)_{\tilde{n}\times 1}) \geq \tilde{d}_{min} \end{cases} \qquad (۳۰-۴)$$

که نشان می‌دهد $\mathbf{c}_{\tilde{n}\times 1}$ حداکثر $\tilde{n} - \tilde{d}_{min}$ عضو از هریک از اعضای مجموعه $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ را در بر می‌گیرد. برای هر $0 \leq i \leq p-1$، N_i را برابر تعداد تکرارهای عدد i در بردار $\mathbf{c}_{\tilde{n}\times 1}$ تعریف می‌کنیم. در نتیجه داریم $N_i \leq \tilde{n} - \tilde{d}_{min}$ و نیز $\sum_{i=0}^{p-1} N_i = \tilde{N}$ که نتیجه می‌دهد:

$$N_i = \tilde{n} - \sum_{j\neq i} N_j \geq \tilde{n} - (p-1)(\tilde{n} - \tilde{d}_{min}) \qquad (۳۱-۴)$$

بنابراین

$$\underbrace{\tilde{n} - (p-1)(\tilde{n} - \tilde{d}_{min})}_{N_{min}} \leq N_i \leq \underbrace{\tilde{n} - \tilde{d}_{min}}_{N_{max}}, \qquad (۳۲-۴)$$

که معادل است با :

$$\left|N_i - \frac{N_{min} + N_{max}}{2}\right| \leq \frac{N_{max} - N_{min}}{2} \qquad (۳۳-۴)$$

[۱۴] Exponentiation

به جای جفت‌کردن بردارهای کد در حالت دودویی (جفت‌های مکمل) در این‌جا می‌توان بردارهای کد را به مجموعه‌هایی به شکل $\{\mathbf{a}, \mathbf{a} \oplus \mathbf{1}_{\tilde{n}\times 1}, \ldots, \mathbf{a} \oplus (p-1)_{\tilde{n}\times 1}\}$ افراز کرد. در حقیقت، این افراز، تقسیم گروه کل بردارهای کد به زیر گروه $\{\mathbf{0}_{\tilde{n}\times 1}, \ldots, (p-1)_{\tilde{n}\times 1}\}$ را نشان می‌دهد (گروه نسبت به عمل $\oplus$).

قضیه ۴-۳ فرض کنید $\mathcal{C}(\tilde{n}, \tilde{k}; p)$ یک کد خطی p-سمبلی بر روی میدان $GF(p)$ با $\tilde{d}_{min}$ باشد به طوری که بردار تمام ۱ متعلق به فضای کد باشد؛ همچنین فرض کنید $\tilde{\mathbf{A}}_{\tilde{n}\times p^{\tilde{k}-1}}$ ماتریس حاصل از کنار هم قراردادن دسته‌ای از بردارهای کد باشد به نحوی که از هر مجموعه به شکل $\{\mathbf{a}, \mathbf{a} \oplus \mathbf{1}_{\tilde{n}\times 1}, \ldots, \mathbf{a} \oplus (p-1)_{\tilde{n}\times 1}\}$ دقیقاً یک عضو انتخاب شده باشد. اکنون اگر ماتریس $\mathbf{A}_{\tilde{n}\times p^{\tilde{k}-1}}$ را از به توان رساندن و سپس یکه کردن ماتریس $\tilde{\mathbf{A}}$ به صورت زیر بسازیم:

$$\tilde{\mathbf{A}} = [\tilde{a}_{\alpha\beta}]_{\alpha,\beta} \Rightarrow \mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{n}}}\left[e^{j\frac{2\pi}{p}\tilde{a}_{\alpha\beta}}\right]_{\alpha,\beta} \qquad (۳۴-۴)$$

ضریب همدوسی ماتریس $\mathbf{A}$ حداکثر برابر با $\frac{p(p-1)\tilde{n}-p^2\tilde{d}_{min}}{2\tilde{n}}$ است.

اثبات: ابتدا دقت کنید که ستون‌های $\mathbf{A}$ یکه هستند:

$$\|\mathbf{a}_\beta\| = \left\| \frac{1}{\sqrt{\tilde{n}}}[e^{j\frac{2\pi}{p}\tilde{a}_{1,\beta}} \ \ldots \ e^{j\frac{2\pi}{p}\tilde{a}_{\tilde{n},\beta}}]^T \right\| = 1 \qquad (۳۵-۴)$$

فرض کنید $\mathbf{a}_\alpha, \mathbf{a}_\beta$ ستون‌های متمایزی از ماتریس $\mathbf{A}$ و $\tilde{\mathbf{a}}_\alpha, \tilde{\mathbf{a}}_\beta$ ستون‌های متناظر در ماتریس $\tilde{\mathbf{A}}$ باشند و تعریف کنید $\mathbf{c} = \tilde{\mathbf{a}}_\alpha \oplus -\tilde{\mathbf{a}}_\beta$. همچنین مشابه قبل، فرض کنید N_i بیانگر تعداد تکرارهای عدد i در بردار $\mathbf{c}$ باشد $(0 \le i \le p-1)$. داریم:

$$|\langle \mathbf{a}_\alpha, \mathbf{a}_\beta \rangle| = |\tilde{\mathbf{a}}_\beta^H . \tilde{\mathbf{a}}_\alpha| = \frac{1}{\tilde{n}}\left|\sum_{i=1}^{\tilde{n}} e^{j\frac{2\pi}{p}(\tilde{a}_{i,\alpha}-\tilde{a}_{i,\beta})}\right| = \frac{\left|\sum_{i=1}^{\tilde{n}} e^{j\frac{2\pi}{p}c_i}\right|}{\tilde{n}} = \frac{\left|\sum_{i=0}^{p-1} N_i e^{j\frac{2\pi}{p}i}\right|}{\tilde{n}} \qquad (۳۶-۴)$$

از آن‌جا که $e^{j\frac{2\pi}{p}}$ یک ریشه چندجمله‌ای $1 + x + \cdots + x^{p-1}$ است، برای تمام مقادیر γ داریم:

$$\left|\sum_{i=0}^{p-1} N_i e^{j\frac{2\pi}{p}i}\right| = \left|\sum_{i=0}^{p-1} (N_i - \gamma) e^{j\frac{2\pi}{p}i}\right| \le \sum_{i=0}^{p-1} |N_i - \gamma| \qquad (۳۷-۴)$$

با استفاده از نامساوی‌های (۴-۳۲) و (۴-۳۳) و قرار دادن $\gamma = \frac{N_{min}+N_{max}}{2}$ خواهیم داشت:

$$\left|\sum_{i=0}^{p-1} N_i e^{j\frac{2\pi}{p}i}\right| \le p\ \frac{N_{max} - N_{min}}{2} = \frac{p(p-1)\tilde{n} - p^2\tilde{d}_{min}}{2} \qquad (۳۸-۴)$$

که کران بالای مورد نظر برای ضریب همدوسی ماتریس $\mathbf{A}$ را نتیجه می‌دهد:

$$|\langle \mathbf{a}_\alpha, \mathbf{a}_\beta \rangle| \leq \frac{p(p-1)\tilde{n} - p^2 \tilde{d}_{min}}{2\tilde{n}} \qquad (۳۹-۴)$$

■

نکته ۱ بهترین انتخاب γ در (۴-۳۷) که کوچکترین کران بالا را ارائه می‌دهد، میانه N_iهاست و نه لزوماً مقدار به کار رفته در (۴-۳۸). اما از آن‌جا که رابطه مشخصی برای میانه این اعداد وجود ندارد، از مقدار یاد شده برای γ استفاده می‌شود.

نکته ۲ برای برقراری RIP مرتبه k، با استفاده از نامساوی یاد شده بر روی ضریب همدوسی در قضیه ۴-۳باید داشته باشیم:

$$\frac{\tilde{d}_{min}}{\tilde{n}} > \frac{p-1}{p} - \frac{2}{p^2(k-1)} \geq \frac{p-1}{p}(1 - \frac{8}{kp^2}) \qquad (۴۰-۴)$$

در نتیجه $\tilde{d}_{min}$ باید بسیار نزدیک به $\frac{p-1}{p}\tilde{n}$ باشد؛ به عبارت بهتر، برای مقادیر بزرگ p، $\tilde{d}_{min}$ باید تقریباً برابر با $\tilde{n}$ باشد. در ادامه، مشابه حالت دودویی، وجود چنین کدهایی را به کمک ساختار BCH اثبات می‌کنیم.

۴-۴-۱ کدهای BCH p-سمبلی با $\tilde{d}_{min}$ بزرگ

کدهای BCH p-سمبلی بر روی میدان $GF(p)$ تعریف می‌شوند و طول بردارهای کد به صورت $\tilde{n} = p^{\tilde{m}} - 1$ انتخاب می‌شود و بردارهای کد توسط چندجمله‌ای مولد کد $g(x)$ متعلق به $GF(p)[x]$ تولید می‌شوند. مشابه حالت دودویی، تمام ریشه‌های $g(x)$ و چندجمله‌ای آزمون توازن $h(x)$ در $GF(p^{\tilde{m}})$ قرار دارند. از آن‌جا که:

$$\prod_{\substack{r \in GF(p^{\tilde{m}}) \\ r \neq 0}} (x - r) = x^{p^{\tilde{m}}-1} - 1 \qquad (۴۱-۴)$$

در حالت p-سمبلی داریم:

$$h(x) = \frac{x^{p^{\tilde{m}}-1} - 1}{g(x)} \qquad (۴۲-۴)$$

در این حالت نیز می‌توان مشابه حالت دودویی، قضیه‌ای بر روی حداقل فاصله کد به صورت زیر بیان کرد: اگر α یک ریشه اولیه میدان $GF(p^{\tilde{m}})$ و $\{\alpha^{i_1}, \ldots, \alpha^{i_d}\}$ زیرمجموعه‌ای از ریشه‌های متمایز $g(x)$ باشد به طوری که

$i_1,\ldots,i_d$ یک تصاعد حسابی تشکیل دهند، داریم $\tilde{d}_{min} \geq d+1$ [۶۶]. برای اثبات، فرض کنید که $[c_1,\ldots,c_{\tilde{n}}]^T$ یک بردار کد ناصفر باشد؛ در نتیجه $g(x)|\sum_{j=1}^{\tilde{n}} c_j x^{j-1}$[۱۵] ولذا:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \alpha^{0\times i_1} & \alpha^{1\times i_1} & \ldots & \alpha^{(\tilde{n}-1)\times i_1} \\ \alpha^{0\times i_2} & \alpha^{1\times i_2} & \ldots & \alpha^{(\tilde{n}-1)\times i_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha^{0\times i_d} & \alpha^{1\times i_d} & \ldots & \alpha^{(\tilde{n}-1)\times i_d} \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_{d\times\tilde{n}}} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{\tilde{n}} \end{bmatrix} = 0_{d\times 1} \qquad (۴۳-۴)$$

از آن‌جا که $\{i_1,\ldots,i_d\}$ یک تصاعد حسابی تشکیل می‌دهند، هر زیر ماتریس $d\times d$ از ماتریس $\mathbf{H}$ یک ماتریس واندرموند[۱۶] است. از این رو، هر d ستون از ماتریس $\mathbf{H}$ مستقل خطی هستند که وجود حداقل $d+1$ عضو ناصفر در بین $[c_1,\ldots,c_{\tilde{n}}]^T$ را ایجاب می‌کند (کران مورد نظر بر روی حداقل فاصله).

فرض کنید چندجمله‌ای مولد کد $g(x)$ طوری انتخاب شده باشد که مجموعه $\{\alpha^{p^{\tilde{m}-1}+\frac{p^l-1}{p-1}+1}, \alpha^{p^{\tilde{m}-1}+\frac{p^l-1}{p-1}+2},\ldots,\alpha^{p^{\tilde{m}}-2}\}$ برای $l<\tilde{m}$ زیرمجموعه‌ای از ریشه‌های $g(x)$ باشد. با توجه به نکته بیان شده در مورد ارتباط بین حداقل فاصله کد و طول تصاعد حسابی موجود در بین توان‌های α میان ریشه‌های $g(x)$، داریم:

$$\begin{aligned} \tilde{d}_{min} &\geq p^{\tilde{m}} - p^{\tilde{m}-1} - \frac{p^l-1}{p-1} - 1 = (p^{\tilde{m}}-1)\left(1 - \frac{p^{\tilde{m}-1}}{p^{\tilde{m}}-1} - \frac{p^l-1}{(p^{\tilde{m}}-1)(p-1)}\right) \\ &= \tilde{n}\left(\frac{p-1}{p} - \frac{p^{l+1}-1}{p(p-1)(p^{\tilde{m}}-1)}\right) \\ &\Rightarrow \frac{\tilde{d}_{min}}{\tilde{n}} \geq \frac{p-1}{p}\left(1 - \frac{p^{l+1}-1}{(p-1)^2(p^{\tilde{m}}-1)}\right) \end{aligned} \qquad (۴۴-۴)$$

که نشان میدهد چنین کدی شرط مطلوب برای حداقل فاصله را دارد. برای بدست آوردن $g(x)$، مشابه حالت دودویی تعریف کنید:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\tilde{m}}^{(l)} &= \{\alpha^0, \alpha^1, \ldots, \alpha^{p^{\tilde{m}-1}+\frac{p^l-1}{p-1}}\} \\ \mathcal{H}_{\tilde{m}}^{(l)} &= \{r \in \mathcal{G}_{\tilde{m}}^{(l)} \mid \forall\, j\in\mathbb{N}:\ r^{p^j} \in \mathcal{G}_{\tilde{m}}^{(l)}\} \end{aligned} \qquad (۴۵-۴)$$

به بیان ساده‌تر، $\mathcal{H}_{\tilde{m}}^{(l)}$ زیرمجموعه‌ای از $\mathcal{G}_{\tilde{m}}^{(l)}$ است که تمامی مزدوج‌های هر عضو آن نسبت به $GF(p)$ را نیز

[۱۵] $x|y$ یعنی y بر x بخش پذیر است.

[۱۶] Vandermonde

شامل می‌شود. در نتیجه:

$$h(x) \triangleq \prod_{h \in \mathcal{H}_{\tilde{m}}^{(l)}} (x - \alpha^h) \in GF(p)[x] \tag{۴۶-۴}$$

چندجمله‌ای $g(x)$ را نیز می‌توان از روی $h(x)$ تعریف شده محاسبه کرد. نحوه طراحی چند جمله ای‌های $g(x), h(x)$ نشان می‌دهد که کد حاصل، حداقل فاصله مطلوب را دارد. اما این نکته که بردار تمام ۱ متعلق به فضای کد است، هنوز چندان روشن نیست. دقت کنید که $\alpha^{\circ} = ۱ \in \mathcal{H}_{\tilde{m}}^{(l)}$ ریشه $h(x)$ است و در نتیجه نسبت به $g(x)$ اول است. پس:

$$\begin{cases} g(x) \big| x^{\tilde{n}} - ۱ = (x-۱)(۱ + x + \cdots + x^{\tilde{n}-۱}) \\ \\ gcd\big(g(x)\ ,\ x-۱\big) = ۱ \end{cases} \Rightarrow g(x) \big| ۱ + x + \cdots + x^{\tilde{n}-۱} \tag{۴۷-۴}$$

که تعلق $۱_{\tilde{n}\times ۱}$ به فضای کد را نشان می‌دهد. مجدداً در این ساختار $\tilde{n}$ و $\tilde{d}_{min}$ (کران پایین) معلوم هستند در حالی که $\tilde{k}$ هنوز مشخص نشده است. قضیه زیر تعداد اعضای $\mathcal{H}_{\tilde{m}}^{(l)}$ و در نتیجه درجه $h(x)$ را به صورت یک مسئله ترکیباتی بیان می‌کند:

قضیه ۴-۴ $|\mathcal{H}_{\tilde{m}}^{(l)}|$ برابر است با تعداد دنباله‌های دودویی به طول $\tilde{m}$ به طوری که بین هر دو ۱ متوالی دست کم $\tilde{m} - l - ۱$ صفر به صورت گردشی وجود داشته باشد.

اثبات: روند کاملاً مشابه اثبات قضیه ۴-۲ است با این تفاوت که در این حالت به جای بسط مبنای ۲، بسط مبنای p استفاده می‌شود. ■

در پیوست الف نشان می‌دهیم $|\mathcal{H}_{\tilde{m}}^{(l)}| = \mathcal{O}(\gamma^{l+۱})$ که γ بزرگترین ریشه $x^{\tilde{m}-l-۱} - x - ۱$ است. در این صورت، ماتریس حسگر $m \times n$ ساخته شده، شرط RIP از مرتبه k را ارضا خواهد کرد که:

$$\begin{cases} m & = & p^{\tilde{m}} - ۱ \\ \log_p n & = & |\mathcal{H}_{\tilde{m}}^{(l)}| = \mathcal{O}\big(\gamma^{l+۱}\big) \\ k_{max} & \geq & ۲\frac{p-۱}{p} p^{\tilde{m}-l-۱} \geq p^{\tilde{m}-l-۱} \end{cases} \tag{۴۸-۴}$$

که منظور از k_{max} حداکثر مرتبه RIP است که با استفاده از استدلالات مبتنی بر ضریب همدوسی، قابل تضمین است. با استفاده از نامساوی $\ln \gamma \geq \frac{\ln(\tilde{m}-l-۱)}{\tilde{m}-l-۱}$ که در پیوست الف نشان داده شده است، می‌توان ثابت کرد $\gamma^{\frac{\log_p k_{max}}{\log_p \log_p k_{max}}} \geq p$. در نتیجه برای ماتریس‌های حسگر ساخته شده داریم:

$$m \leq \mathcal{O}\left(k_{max} (\log_p n)^{\frac{\log_p k_{max}}{\log_p \log_p k_{max}}} \right) \tag{۴۹-۴}$$

جدول ۴-۲: $\frac{\mu_{BCH}}{\mu_{WB}}$ برای چند ماتریس p–سمبلی $(p^{۲l}-۱)\times p^{۳l}$ با pهای مختلف.

	$p=۲$	$p=۳$	$p=۵$	$p=۷$
$l=۱$	—	۱٫۱۸۶۳	۱٫۱۰۰۹	۱٫۰۷۰۹
$l=۲$	۱٫۱۲۹۶	۱٫۰۵۴۹	۱٫۰۱۹۸	۱٫۰۱۰۲
$l=۳$	۱٫۰۶۱۸	۱٫۰۱۸۴	۱٫۰۰۴۰	۱٫۰۰۱۵

به وضوح، کران بالا بر روی m در ماتریس‌های حسگر تصادفی، $m \leq \mathcal{O}(k_{max}\log_p n)$، به مراتب کوچکتر از کران بالای بدست آمده برای این ماتریس‌ها در رابطه (۴-۴۹) است. این ضعف ناشی از استفاده از استدلالات مبتنی بر ضریب همدوسی است که شرطی قوی‌تر از RIP است. همان طور که قبلاً اشاره شد، نامساوی ولش[۱۷] کران پایینی برای ضریب همدوسی یک ماتریس نسبت به ابعاد آن ارائه می‌دهد. از آن‌جا که برقراری شرط RIP در ماتریس‌های معرفی شده توسط ضریب همدوسی صورت گرفته است، به جای مقایسه ابعاد این ماتریس‌ها با ماتریس‌های تصادفی که شرط RIP را با مرتبه یکسانی ارضا می‌کنند، مطلوب‌تر آن است که ضریب همدوسی بدست آمده را با کران ولش مقایسه کنیم. برای این منظور در جدول ۴-۲ نسبت ضریب همدوسی‌های ماتریس‌های بدست آمده به ضریب همدوسی پیش بینی شده توسط نامساوی ولش ($\frac{\mu_{BCH}}{\mu_{WB}}$) برای چند حالت مختلف محاسبه شده است. برای این مقایسه، از حالت خاص $\tilde{m}=۲l$ استفاده کرده‌ایم که منجر به تولید ماتریس‌های $(p^{۲l}-۱)\times p^{۳l}$ می‌شود. به راحتی می‌توان نشان داد که برای هر p، $\mathcal{H}_{۲l}^{(l)}=\{۰\}\cup\{p^i\}_{i=۰}^{۲l-۱}\cup\{p^{l+i}+p^i\}_{i=۰}^{l-۱}$. نتایج جدول ۴-۲ نشان می‌دهند که با افزایش p، ضریب همدوسی ماتریس‌های بدست آمده به کران ولش نزدیک‌تر می‌شوند.

۴-۴-۲ الگوریتم تولید ماتریس

در قضیه ۴-۳ به این نکته اشاره شد که به منظور دست‌یابی به یک ماتریس حسگر مطلوب باید از هر زیرمجموعه به شکل $\{\mathbf{a}, \mathbf{a}\oplus ۱_{\tilde{n}\times ۱}, \ldots, \mathbf{a}\oplus(p-۱)_{\tilde{n}\times ۱}\}$ در فضای کد، دقیقاً یک بردار کد انتخاب شود. در حالت دودویی ($p=۲$) دیدیم که این انتخاب را می‌توان به نحوی انجام داد که بردارهای انتخاب شده کماکان خاصیت چرخش دوری خود را حفظ کنند (مثلاً با انتخاب تمام بردارهای کد با وزن زوج). مشابه این عمل را نیز می‌توان در حالت p–سمبلی به کار برد. از ان جا که طول بردار کد ($\tilde{n}$) نسبت به اندازه میدان (p) اول است، $x=۱$ ریشه دقیقاً یکی از چند جمله ای‌های متناظر با بردارهای $\{\mathbf{a}, \mathbf{a}\oplus ۱_{\tilde{n}\times ۱}, \ldots, \mathbf{a}\oplus(p-۱)_{\tilde{n}\times ۱}\}$ است (تعمیم وزن زوج

[۱۷] Welch

به حالت p–سمبلی). در نتیجه اگر $x = ۱$ به ریشه‌های $g(x)$ اضافه شود، به طور خودکار از هر مجموعه به شکل یاد شده، دقیقاً یک عضو انتخاب می‌شود و کد حاصل همچنان یک کد گردشی است. از این رو، می‌توان مراحل الگوریتم تولید ماتریس را برای p داده‌شده به صورت توانی از یک عدد اول توسط گام‌های زیر بیان کرد:

۱. عدد طبیعی $\tilde{m}$ را انتخاب کنید و قرار دهید $m = p^{\tilde{m}} - ۱$؛

۲. عدد صحیح $۰ \leq l \leq \tilde{m} - ۱$ را اختیار کنید؛ ماتریس نهایی، شرط RIP با مرتبه $k < ۲\frac{p-۱}{p}\frac{p^{\tilde{m}}-۱}{p^{l+۱}-۱} + ۱$ را ارضا خواهد کرد؛

۳. مجموعه $\mathcal{H}_{seq}^{(\tilde{m},l)}$ شامل تمام دنباله‌های دودویی به طول $\tilde{m}$ را که میان هر دو یک متوالی دست کم $\tilde{m} - l - ۱$ صفر به صورت گردشی وجود دارد، تشکیل دهید. همچنین $\mathcal{H}_{\tilde{m}}^{(l)}$ شامل تمام اعداد اعشاری است که بسط مبنای p آن‌ها عضوی از مجموعه $\mathcal{H}_{seq}^{(\tilde{m},l)}$ باشد؛

۴. α را برابر یا یک ریشه اولیه میدان $GF(p^{\tilde{m}})$ قرار دهید و تعریف کنید:

$$h(x) = \prod_{r \in \mathcal{H}_{\tilde{m}}^{(l)} - \{۰\}} (x - \alpha^r)$$

همچنین قرار دهید $n = p^{|\mathcal{H}_{\tilde{m}}^{(l)}|-۱}$ ؛

۵. تمام بردارهای کد تعریف شده توسط چندجمله‌ای آزمون توازن $h(x)$ و چندجمله‌ای مولد کد $g(x) = \frac{x^{p^{\tilde{m}}-۱}-۱}{h(x)}$ را به عنوان ستون‌های ماتریس $\tilde{\mathbf{A}}_{m\times n}$ قرار دهید؛

۶. ماتریس حسگر نهایی را به صورت

$$\mathbf{A}_{m\times n} = \frac{۱}{\sqrt{m}}\left[e^{j۲\pi\frac{\tilde{a}_{i,j}}{p}}\right]$$

تعریف کنید که در آن $\tilde{a}_{i,j}$ها المان‌های ماتریس $\tilde{\mathbf{A}}$ هستند.

۴-۵ ادغام ماتریس‌ها

روش‌های طراحی ماتریس حسگر یقینی تقریباً در تمام موارد بر اساس کمینه‌سازی ضریب همدوسی ماتریس و بر پایه میدان‌های متناهی بنا شده‌اند. به همین دلیل، تعداد سطرهای این ماتریس‌ها که رابطه بسیار نزدیکی با اندازه میدان دارد، به دسته خاصی از اعداد طبیعی مانند توان‌های اعداد اول محدود می‌شود. در این بخش، به

کمک دو رویکرد متفاوت با تلفیق ماتریس‌های حسگر، ماتریس جدیدی معرفی می‌کنیم که ابعاد آن حوزه وسیع‌تری از مقادیر را می‌پذیرد.

در روش نخست، با استفاده از ماتریس‌های دودویی، با ثابت نگاه‌داشتن تعداد سطرها و ضریب همدوسی، تعداد ستون‌ها را افزایش می‌دهیم حال آن که در روش دوم، با تلفیق دو ماتریس حسگر دلخواه، با ثابت نگاه‌داشتن ضریب همدوسی و یا مرتبه RIP، ماتریس جدیدی با تعداد سطر و ستون بیشتر طراحی می‌کنیم.

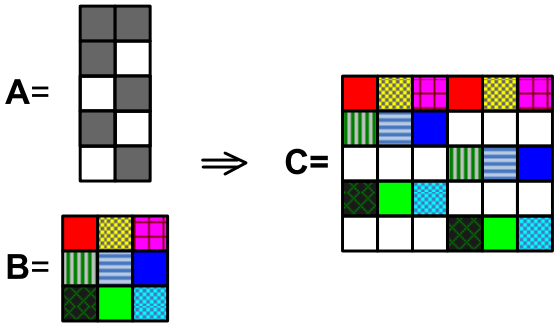
۴-۵-۱ ادغام با ماتریس‌های دودویی

طراحی ماتریس‌های دودویی با ضریب همدوسی کوچک به دلیل نامنفی بودن جملات در ضرب داخلی ستون‌ها، دشوارتر از طراحی در حالتی است که محدود به ماتریس‌های دودویی نیستیم. خوشبختانه، حداقل دو طرح دودویی موجود است: ۱) طرح Devore [۳۸] که در آن ماتریس $p^۲$ سطر دارد و هر ستون وزن p دارد (که p توانی از یک عدد اول است)؛ ۲) ماتریس‌های ساخته شده براساس کدهای متعامد نوری که در بخش ۴-۲ به آن اشاره شد. لم زیر نشان می‌دهد که چگونه می‌توان یک ماتریس دودویی و یک ماتریس غیردودویی را با یکدیگر ادغام کرد.

لم ۴-۲ فرض کنید $\mathbf{A}$ یک ماتریس دودویی با ضریب همدوسی $\mu_{\mathbf{A}} \leq \frac{۱}{k-۱}$ باشد که وزن هر ستون آن w_m است؛ همچنین فرض کنید $\mathbf{B}_{w_m \times n_۲}$ ماتریسی با درایه‌های هم‌اندازه، ستون‌های یکه و ضریب همدوسی $\mu_{\mathbf{B}} \leq \frac{۱}{k-۱}$ باشد. در این صورت، می‌توان ماتریس $\mathbf{C}_{m \times (n-۱n_۲)}$ با ستون‌های یکه و ضریب همدوسی $\mu_{\mathbf{C}} \leq \frac{۱}{k-۱}$ را با ادغام ماتریس‌های $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ ساخت.

اثبات: برای ساختن ستون lام از ماتریس $\mathbf{C}$، ابتدا $l-۱$ را به صورت $\alpha n_۲ + \beta$ که $\alpha \in \{۰, ۱, \ldots, n_۱ - ۱\}$ و $\beta \in \{۰, ۱, \ldots, n_۲ - ۱\}$ می‌نویسیم (α و β در حقیقت خارج‌قسمت و باقیمانده تقسیم $l-۱$ بر $n_۲$ هستند). فرض کنید $i_۱, \ldots, i_{w_m}$ اندیس مکان‌های ناصفر در ستون $\alpha + ۱$ ماتریس $\mathbf{A}$ باشند. حال ستون lام ماتریس را چنین تعریف می‌کنیم :

$$\begin{cases} c_{i_۱,l} &= b_{۱,\beta+۱} \\ c_{i_۲,l} &= b_{۲,\beta+۱} \\ &\vdots \\ c_{i_{w_m},l} &= b_{w_m,\beta+۱} \\ c_{s,l} &= ۰ \quad , \quad s \notin \{i_۱, \ldots, i_{w_m}\}, \end{cases} \tag{۵۰-۴}$$



شکل ۴-۲: عمل ادغام ماتریس $\mathbf{B}$ با ماتریس دودویی $\mathbf{A}$.

که $[b_{۱,\beta+۱}, \ldots, b_{w_m,\beta+۱}]^T$ ستون $\beta+۱$ام $\mathbf{B}$ است. شکل ۴-۲ به صورت نمادین این نحوه ادغام را نشان می‌دهد.

برای اثبات کران مورد نیاز بر روی ضریب همدوسی ماتریس $\mathbf{C}$، فرض کنید $\mathbf{u}_{w_m\times ۱}, \mathbf{v}_{w_m\times ۱}$ ستون‌های $l_۱$ و $l_۲$ ماتریس $\mathbf{C}$ باشند و $l_۱ - ۱ = \alpha_۱ \cdot n_۲ + \beta_۱$ و $l_۲ - ۱ = \alpha_۲ \cdot n_۲ + \beta_۲$. به راحتی می‌توان یکه بودن بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ را بر اساس یکه بودن ستون‌های $\mathbf{B}$ نشان داد. برای بررسی ضرب داخلی میان این دو بردار، دو حالت زیر را در نظر بگیرید:

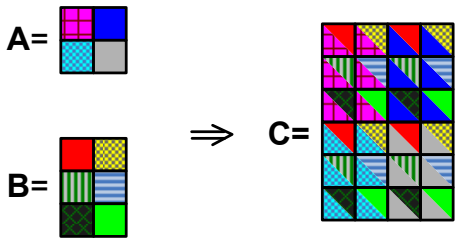
۱. هنگامی که $\alpha_۱ \neq \alpha_۲$، دو بردار $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ از بردارهای متفاوتی در ماتریس $\mathbf{A}$ حاصل شده‌اند و در نتیجه الگوهای ناصفر متفاوتی دارند. از آن‌جا که ضرب داخلی هر دو ستون ماتریس $\mathbf{A}$ کمتر از $\frac{۱}{k-۱}$ ($\frac{w_m}{k-۱}$ پیش از یکه‌کردن) است، مکان‌های ناصفر دو بردار $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ حداکثر $\frac{w_k}{k-۱}$ اشتراک دارند. به علاوه، قدرمطلق عناصر ناصفر بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ برابر با $\frac{۱}{\sqrt{w_m}}$ است (با توجه به یکه بودن ستون‌ها و هم‌اندازه‌بودن درایه‌های ناصفر $\mathbf{B}$). در نتیجه :

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| = |\sum_{i=۱}^{n} u_i v_i| \leq \sum_{i=۱}^{n} |u_i v_i| = \lfloor \frac{w_m}{k-۱} \rfloor \left(\frac{۱}{\sqrt{w_m}}\right)^۲ \leq \frac{۱}{k-۱} \qquad (۵۱\text{-}۴)$$

۲. هنگامی که $\alpha_۱ = \alpha_۲$، بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ از بردار یکسانی در ماتریس $\mathbf{A}$ ساخته شده‌اند و در نتیجه ضرب داخلی آن‌ها با ضرب داخلی بردارهای سازنده آن‌ها از $\mathbf{B}$ (ستون‌های $\beta_۱+۱$ و $\beta_۲+۱$) برابر است:

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| = |\langle \mathbf{b}_{\beta_۱+۱}, \mathbf{b}_{\beta_۲+۱}\rangle| \leq \frac{۱}{k-۱} \qquad (۵۲\text{-}۴)$$

بنابراین $\mathbf{C}$ ستون‌های یکه دارد و ضریب همدوسی آن کمتر از $\frac{۱}{k-۱}$ است. ■



شکل ۴-۳: ضرب کرونکر دو ماتریس ($\mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$).

۴-۵-۲ ضرب کرونکر

برای ماتریس‌های دلخواه $\mathbf{A}_{m_a \times n_a}$ و $\mathbf{B}_{m_b \times n_b}$ تعریف کنید:

$$\mathbf{C}_{m_a m_b \times n_a n_b} \triangleq \mathbf{A}_{m_a \times n_a} \otimes \mathbf{B}_{m_b \times n_b} \tag{۵۳-۴}$$

که در آن $\otimes$ ضرب کرونکر[۱۸] دو ماتریس را نمایش می‌دهد، یعنی:

$$c_{\eta,\theta} = a_{\gamma,\tau} b_{\rho,\nu}, \tag{۵۴-۴}$$

که $\eta = (\gamma - ۱)m_b + \rho$ و $\theta = (\tau - ۱)n_b + \nu$ و γ, τ, ρ, ν اعداد طبیعی هستند که به ترتیب از m_a, n_a, m_b, n_b فراتر نمی‌روند. شکل ۴-۳ به صورت نمادین ضرب کرونکر دو ماتریس را نمایش می‌دهد.

لم ۴-۳ فرض کنید $\mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$،

(*i*) اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ ستون‌های یکه داشته باشند، ستون‌های $\mathbf{C}$ نیز یکه است؛

(*ii*) $\mu_{\mathbf{C}} = \max\{\mu_{\mathbf{A}}, \mu_{\mathbf{B}}\}$؛

(*iii*) اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ شرط *RIP* از مرتبه k با ثابت‌های $\delta_{k,\mathbf{A}}, \delta_{k,\mathbf{B}}$ را ارضا کنند، ماتریس $\mathbf{C}$ شرط *RIP* از مرتبه k با ثابت $\delta_{k,\mathbf{C}} \leq \delta_{k,\mathbf{A}}\delta_{k,\mathbf{B}} + \delta_{k,\mathbf{A}} + \delta_{k,\mathbf{B}}$ را ارضا می‌کند.

اثبات دو عبارت اول در [۸۰، ۶۰] آورده شده است. یک نتیجه ساده از (i) و (ii) آن است که اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ ستون‌های یکه داشته باشند و ضرایب همدوسی آن‌ها به ترتیب $\mu_{\mathbf{A}} < \frac{۱}{k_{\mathbf{A}}-۱}$ و $\mu_{\mathbf{B}} < \frac{۱}{k_{\mathbf{B}}-۱}$ با $k_{\mathbf{A}}, k_{\mathbf{B}}$ صحیح باشد، ماتریس $\mathbf{C}$ شرط RIP از مرتبه $k_{\mathbf{C}} = \min\{k_{\mathbf{A}}, k_{\mathbf{B}}\}$ را ارضا می‌کند. در حقیقت عبارت (iii) که در [۴۳]

[۱۸] Kronecker

اثبات شده است، تعمیمی از این نتیجه به حالتی است که ماتریس‌های $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ شرط RIP را بدون هیچ‌گونه محدودیتی بر روی ضریب همدوسی ارضا می‌کنند.

نتیجه جالبی که می‌توان از ضرب کرونکر ماتریس‌ها بدست آورد، تولید ماتریس‌های حسگر با تعداد سطر دلخواه است. با استفاده از روش بیان شده در [۳۸]، می‌توان ماتریس‌هایی با p^k سطر تولید کرد که p یک عدد اول است. اکنون با استفاده از عملگر ضرب کرونکر، می‌توان تعداد سطرها را به هر حاصل ضربی از توان‌های اعداد اول تعمیم داد. به این ترتیب می‌توان ماتریس‌های با تعداد سطرهای دلخواه تولید کرد. نکته منفی در باره ضرب کرونکر، افزایش فاصله میان ابعاد ماتریس حاصل و کران پیش‌بینی شده برای ماتریس‌های تصادفی است. برای ماتریس $\mathbf{X}_{m_x \times n_x}$، اگر $\mathcal{B}_{\mathbf{X}} \triangleq \frac{k_x \log n_x}{m_x}$ که k_x مرتبه RIP ماتریس است. داریم:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\mathbf{C}} &= \frac{\min\{k_a, k_b\}\big(\log n_a + \log n_b\big)}{m_a m_b} \leq \frac{1}{m_b}\frac{k_a \log n_a}{m_a} + \frac{1}{m_a}\frac{k_b \log n_b}{m_b} \\ &= \frac{1}{m_b}\mathcal{B}_{\mathbf{A}} + \frac{1}{m_a}\mathcal{B}_{\mathbf{B}} \end{aligned} \tag{۵۵-۴}$$

از این رو، حتی اگر $\mathcal{B}_{\mathbf{A}}$ و $\mathcal{B}_{\mathbf{B}}$ در حد به سمت اعداد ثابت ناصفر میل کنند، $\mathcal{B}_{\mathbf{C}}$ به سمت صفر میل خواهد کرد .

۶-۴ بازسازی سریع

روش MP یکی از ساده‌ترین روش‌ها برای بازسازی بردار تنک از روی نمونه‌هاست. در اینجا نشان می‌دهیم که نمونه‌های حاصل از ماتریس‌های معرفی‌شده در این فصل، هنگامی که بدون نویز باشند توسط این روش و گونه‌های متفاوت آن قابل بازسازی هستند.

فرض کنید $\mathbf{A}_{m \times n}$ ماتریسی با ضریب همدوسی کمتر از $\frac{1}{2k-1}$ باشد که چرخش‌های دوری ستون‌های آن، مجدداً ستونی از $\mathbf{A}$ باشند. همچنین فرض کنید $\mathbf{s}_{n\times 1}$ برداری k-تنک با درایه‌های ناصفر در مکان‌های $\mathcal{S} = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$ باشد و داشته باشیم:

$$\mathbf{y}_{m\times 1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{s} = \sum_{j=1}^{k} s_{i_j} \mathbf{a}_{i_j} \tag{۵۶-۴}$$

که در آن $\mathbf{a}_i$ ستون iام ماتریس $\mathbf{A}$ را نمایش می‌دهد. در روش‌های حریص، به ویژه در روش MP، تخمین بردار تنک ($\hat{\mathbf{s}}_{n\times 1}$) در ابتدا با بردار تمام صفر پایه ریزی می‌شود و در چندین تکرار به مقدار نهایی خود می‌رسد. در هر مرحله، بردار باقیمانده به صورت $\mathbf{r}_{m\times 1} = \mathbf{A}(\mathbf{s} - \hat{\mathbf{s}}) = \mathbf{y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{s}}$ تعریف می‌شود که به وضوح در ابتدا برابر با $\mathbf{y}$

است. در هر تکرار، ضرب داخلی بردار باقیمانده با تمام ستون‌های $\mathbf{A}$ محاسبه می‌شود و اندیس ستونی که حداکثر ضرب داخلی را ایجاد می‌کند (i_{max})، به عنوان یکی از مکان‌های ناصفر بردار $\mathbf{s}$ انتخاب می‌شود. سپس مقدار تمامی مکان‌هایی که تا این مرحله به عنوان مکان‌های ناصفر $\mathbf{s}$ انتخاب شده‌اند، بر حسب یک قاعده که در روش‌های مختلف متفاوت است، به‌روز می‌شوند و این روند تا هنگام رسیدن به شرط خاتمه ادامه می‌یابد. در اینجا نشان می‌دهیم که در هیچ یک از مراحل، در شناسایی مکان‌های ناصفر بردار $\mathbf{s}$ مرتکب اشتباه نمی‌شویم. در نتیجه اگر به‌روز رسانی مقادیر به طرز درستی انجام شود، پس از k مرحله، بردار اصلی به صورت کامل بازسازی شده است؛ در صورت به‌روز رسانی نادرست، ممکن است در چندین مرحله، موقعیت یکسانی به عنوان مکان ناصفر انتخاب شود. این موضوع را به کمک استقرا ثابت می‌کنیم: فرض کنید تا تکرار t موقعیت‌های درستی به عنوان مکان‌های ناصفر $\mathbf{s}$ انتخاب شده باشند. در نتیجه در شروع تکرار tام، مکان‌های ناصفر $\hat{\mathbf{s}}$ و $\delta = \mathbf{s} - \hat{\mathbf{s}}$ زیرمجموعه‌ای از $\mathcal{S}$ هستند. بدون کاسته شدن از کلیت مسأله فرض کنید $|\delta_{i_1}| \geq |\delta_{i_2}| \geq \cdots \geq |\delta_{i_k}|$ و سایر δ_iها صفر هستند. داریم:

$$\left|\langle \mathbf{r}, \mathbf{a}_{i_1} \rangle\right| = \left|\langle \sum_{j=1}^{k} \delta_{i_j} \mathbf{a}_{i_j}, \mathbf{a}_{i_1} \rangle\right| \geq |\delta_{i_1}| |\langle \mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_1} \rangle - \sum_{j=2}^{k} |\delta_{i_j}| |\langle \mathbf{a}_{i_j}, \mathbf{a}_{i_1} \rangle| \qquad (۵۷-۴)$$

با استفاده از شرط ضریب همدوسی ماتریس $\mathbf{A}$ می‌دانیم:

$$\left|\langle \mathbf{r}, \mathbf{a}_{i_1} \rangle\right| > |\delta_{i_1}| - \frac{1}{2k-1} \sum_{j=2}^{k} |\delta_{i_j}| \geq |\delta_{i_1}| - \frac{k-1}{2k-1} |\delta_{i_1}| = \frac{k}{2k-1} |\delta_{i_1}| \qquad (۵۸-۴)$$

از طرفی اگر $l \notin \mathcal{S}$، داریم:

$$\left|\langle \mathbf{r}, \mathbf{a}_l \rangle\right| = \left|\sum_{j=1}^{k} \delta_{i_j} \langle \mathbf{a}_{i_j}, \mathbf{a}_l \rangle\right| < \frac{1}{2k-1} \sum_{j=1}^{k} |\delta_{i_j}| \leq \frac{k}{2k-1} |\delta_{i_1}| \qquad (۵۹-۴)$$

از ترکیب (۴-۵۸) و (۴-۵۹) به دست می‌آوریم:

$$\left|\langle \mathbf{r}, \mathbf{a}_l \rangle\right| \; < \; \frac{k}{2k-1} |\delta_{i_1}| \; < \; \left|\langle \mathbf{r}, \mathbf{a}_{i_1} \rangle\right| \qquad (۶۰-۴)$$

بنابراین بیشترین ضرب داخلی یا با $\mathbf{a}_{i_1}$ حاصل می‌شود یا با یکی دیگر از $\mathbf{a}_{i_j}$ها. به عبارت بهتر، بیشترین ضرب داخلی همواره برای یک عضو $\mathbf{s}_{n\times 1}$ بدست می‌آید. به این ترتیب حکم استقراء ثابت می‌شود.

همان طور که در بالا شرح داده شد، در هر تکرار، ضرب داخلی $\mathbf{r}_{m\times 1}$ با تمامی ستون‌های $\mathbf{A}$ محاسبه می‌شود. هر ضرب داخلی نیازمند m عمل ضرب و $m-1$ عمل جمع است. اکنون نشان می‌دهیم خاصیت

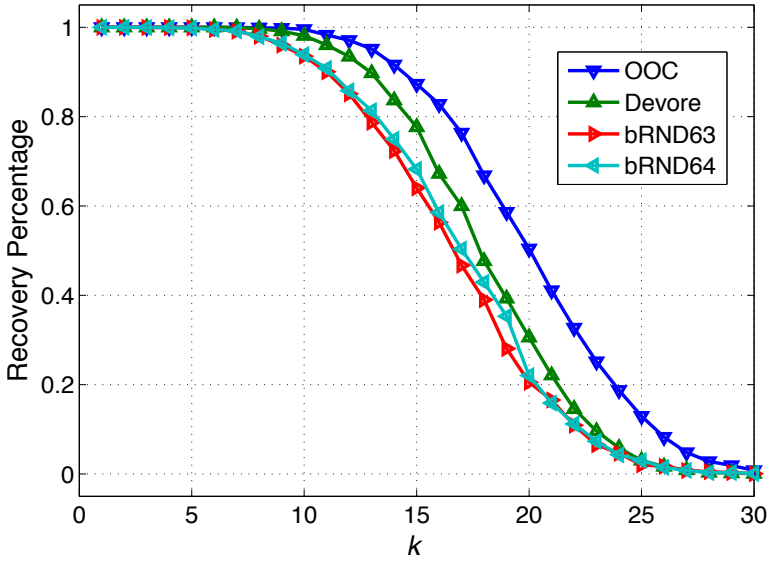
گردشی ستون‌های $\mathbf{A}$ میزان محاسبات لازم را به شدت کاهش می‌دهد. فرض کنید $\mathbf{a}$ یکی از ستون‌های ماتریس $\mathbf{A}$ و $\mathbf{a}^{(j)}$ همین ستون پس از j واحد چرخش دوری باشد. به دلیل خاصیت گردشی $\mathbf{A}$، تمامی $\mathbf{a}^{(j)}$ها ستون‌هایی از $\mathbf{A}$ هستند. در نتیجه باید $\langle \mathbf{a}^{(j)}, \mathbf{r} \rangle$ برای تمام jها محاسبه شود. فرض کنید $\{\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{a}^{(2)}, \ldots, \mathbf{a}^{(\mu)}\}$ گردش‌های دوری متفاوت $\mathbf{a}$ باشند (باید توجه داشت $\mu | m$). در این صورت محاسبه ضرب داخلی‌های ناشی از مجموعه مذکور و بردار $\mathbf{r}$، مستلزم μm عمل ضرب و $\mu(m-1)$ عمل جمع است. یک روش سریع برای محاسبه این ضرب داخلی‌ها استفاده از الگوریتم FFT است. نکته کلیدی در آن است که این ضرب داخلی‌ها، معادل با کانولوشن دایروی $\mathbf{r}$ و $\mathbf{a}$ هستند:

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{a}^{(j)} \rangle = \left(\mathbf{r} \circledast_m \mathbf{a}\right)\big|_j \qquad (۶۱-۴)$$

که نماد $\circledast_m$ کانولوشن دایروی با دوره تناوب m را نشان می‌دهد. می‌دانیم که یک روش کاراً برای محاسبه کانولوشن دایروی استفاده از ضرایب DFT است: اگر $\mathbf{r}_f$ و $\mathbf{a}_f$ به ترتیب تبدیل‌های DFT دو بردار $\mathbf{r}$ و $\mathbf{a}$ را نشان دهند، داریم:

$$IDFT\{\mathbf{r}_f \odot \mathbf{a}_f\} = \left[\left(\mathbf{r} \circledast_m \mathbf{a}\right)\big|_0, \ldots, \left(\mathbf{r} \circledast_m \mathbf{a}\right)\big|_{m-1}\right] \qquad (۶۲-۴)$$

که $\mathbf{v}_{m\times 1} \odot \mathbf{u}_{m\times 1} \triangleq [v_1 u_1, \ldots, v_m u_m]^T$. برای محاسبه این ضریب داخلی‌ها، $\mathbf{r}_f$ (در هر تکرار) تنها یک بار محاسبه می‌شود و به جای μ ضرب داخلی ذکر شده به یک عمل DFT، یک عمل IDFT و m عمل ضرب نیاز داریم. از آن‌جا که بردار $\mathbf{a}$، تنها μ گردش دوری متفاوت دارد، در حوزه DFT نیز حداکثر μ ضریب ناصفر خواهد داشت که این ضرایب مربوط به فرکانس‌هایی با فواصل یکسان هستند. در نتیجه محاسبه DFT μ–نقطه‌ای $\mathbf{a}$ کفایت می‌کند (تبدیل DFT m–نقطه‌ای بردار $\mathbf{r}$ به DFT μ–نقطه‌ای به راحتی امکان پذیر است). با استفاده از الگوریتم FFT برای عمل‌های DFT و IDFT μ–نقطه ای، به $2\mu\lceil \log_2 \mu \rceil$ عملگر ضرب و $m - \mu + \mu\lceil \log_2 \mu \rceil$ عملگر جمع نیاز داریم. مقایسه تعداد عملگرهای لازم در دو حالت فوق (استفاده از الگوریتم FFT و محاسبه مستقیم کانولوشن دوری) نشان دهنده کاهش پیچیدگی محاسباتی در عمل بازسازی است. این کاهش چشمگیر در پیچیدگی محاسباتی مدیون خاصیت گردشی ستون‌های ماتریس $\mathbf{A}$ است.

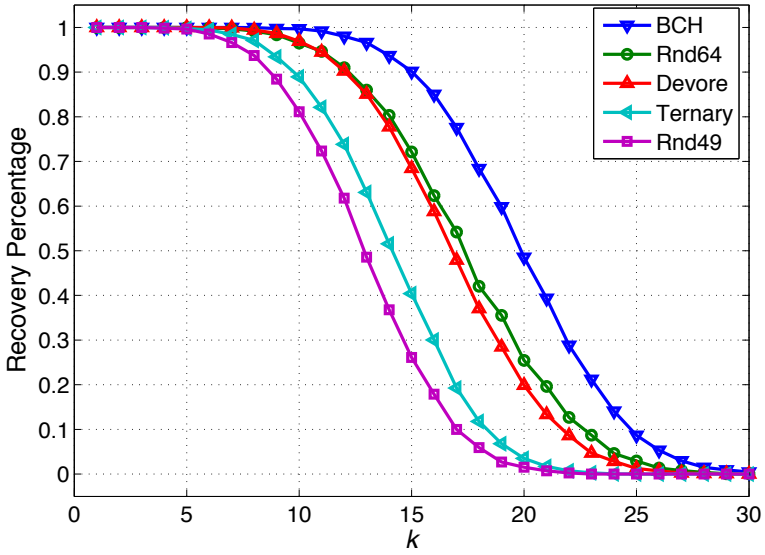


شکل ۴-۴: درصد بازسازی ($\text{SNR}_{rec.} \geq ۱۰۰dB$) در مقادیر مختلف k. ماتریس‌های حسگر با ساختار OOC و Devore ابعاد ۳۷۸ × ۶۳ و ۳۷۸ × ۶۴ دارند. همچنین دو ماتریس تصادفی دودویی با ابعاد ۳۷۸ × ۶۴ و ۳۷۸ × ۶۳ در نظر گرفته شده‌اند.

۴-۷ نتایج شبیه‌سازی

در بخش‌های پیشین، تعدادی ماتریس حسگر یقیینی معرفی کردیم. در این بخش به کمک نتایج شبیه‌سازی، عملکرد برخی از این ماتریس‌ها را بررسی می‌کنیم. از آن‌جا که ماتریس‌های مختلط، اطلاعات بیشتری در مورد سیگنال تنک ارائه می‌دهند (به کمک دو قسمت حقیقی و موهومی)، در نتایج هر شبیه‌سازی، تنها یکی از دو خانواده‌ی ماتریس‌های حقیقی و مختلط مورد بررسی قرار می‌گیرند. به عبارت دیگر، مقایسه‌ای میان عملکرد این دو دسته از ماتریس‌ها صورت نمی‌گیرد.

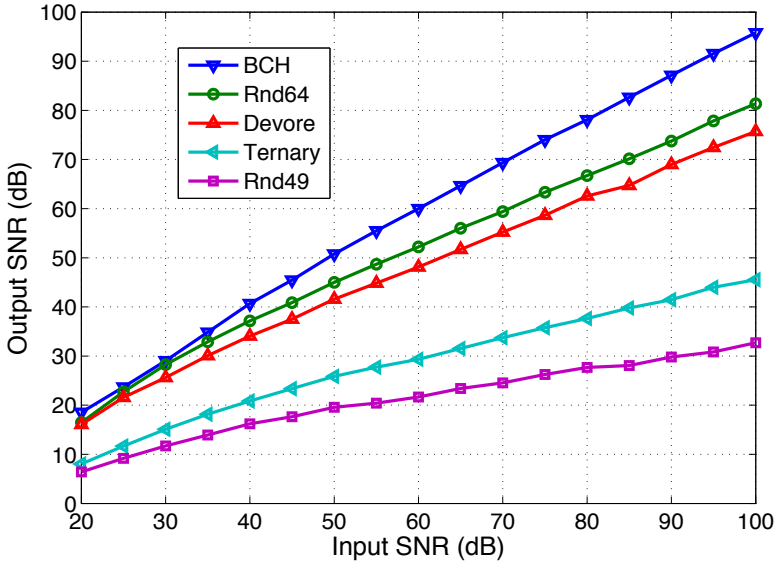
ابتدا به مقایسه عملکرد ماتریس‌های دودویی می‌پردازیم. برای این منظور از دو طرح یقینی OOC و Devore و دو ساختار تصادفی استفاده می‌کنیم. کدهای OOC معمولا با پارامتر λ کوچک طراحی می‌شوند و به همین دلیل مقایسه عادلانه بین دو ساختار OOC و Devore کمی مشکل است. برای مقایسه، از یک کد متعامد نوری (۶۳, ۹, ۲) با ۶ کلمه کد، یک ماتریس دودویی ۳۷۸ × ۶۳ با ضریب همدوسی $\frac{۲}{۹}$ ساخته‌ایم. همچنین با کمک ساختار Devore می‌توان یک ماتریس ۵۱۲ × ۶۴ با وزن ستونی ۸ و ضریب همدوسی $\frac{۱}{۴}$ ساخت که در اینجا برای مقایسه تنها ۳۷۸ ستون اول آن مورد استفاده قرار گرفته‌اند. همچنین از دو ماتریس دودویی تصادفی با



شکل ۴–۵: درصد بازسازی ($\text{SNR}_{rec.} \geq ۱۰۰dB$) در مقادیر مختلف k. ماتریس‌های حسگر با ساختار BCH، Devore و ادغامی (Ternary) ابعاد ۵۱۲ × ۶۳، ۵۱۲ × ۶۴ و ۵۱۲ × ۴۹ دارند. همچنین دو ماتریس تصادفی گوسی ابعاد ۵۱۲ × ۶۴ و ۵۱۲ × ۴۹ دارند.

ابعاد ۳۷۸ × ۶۳ و ۳۷۸ × ۶۴ بهره جسته‌ایم به نحوی که درایه‌ها به صورت مستقل و به ترتیب با احتمال $\frac{۹}{۶۴}$ و $\frac{۸}{۶۴}$ مقدار یک اختیار می‌کنند. شکل ۴–۴ درصد بازسازی کامل ($\text{SNR}_{rec} \geq ۱۰۰dB$) را هنگام پیاده‌سازی روش OMP و استفاده از ماتریس‌های فوق برای مرتبه‌های تنک‌بودن (k) متفاوت نشان می‌دهد. در این شبیه‌سازی، نمونه‌ها بدون نویز هستند و نمودارها از میانگین گیری ۵۰۰۰ شبیه‌سازی متفاوت حاصل شده‌اند. همانگونه که از مقادیر ضرایب همدوسی انتظار می‌رود ساختار OOC بهترین عملکرد را دارد.

برای بررسی ماتریس‌های حقیقی، از ماتریس‌های زیر استفاده کرده‌ایم: ماتریس دودویی ۵۱۲ × ۶۴ با ساختار Devore، ماتریس دو قطبی ۵۱۲ × ۶۳ با ساختار BCH، ادغام ماتریس دودویی ۳۴۳ × ۴۹ با ساختار Devore و ماتریس دو قطبی ۸ × ۷ با ساختار BCH. پس از ادغام، ماتریسی با ابعاد ۲۷۴۴ × ۴۹ حاصل می‌شود که ما تنها ۵۱۲ ستون اول آن را در نظر می‌گیریم. ضریب همدوسی این ماتریس‌ها به ترتیب $\frac{۱}{۴}$، $\frac{۱}{۷}$ و $\frac{۱}{۴}$ است. شکل ۴–۵ درصد موفقیت ($\text{SNR}_{rec.} \geq ۱۰۰dB$) روش OMP در بازسازی سیگنال تنک از روی نمونه‌های حاصل شده به کمک این ماتریس‌ها را نمایش می‌دهد. به منظور مقایسه جامع تر، ماتریس‌های تصادفی با توزیع گوسی با اندازه‌های ۵۱۲ × ۶۴ و ۵۱۲ × ۴۹ نیز استفاده شده‌اند و نتایج این بازسازی‌ها در ۵۰۰۰ شبیه‌سازی

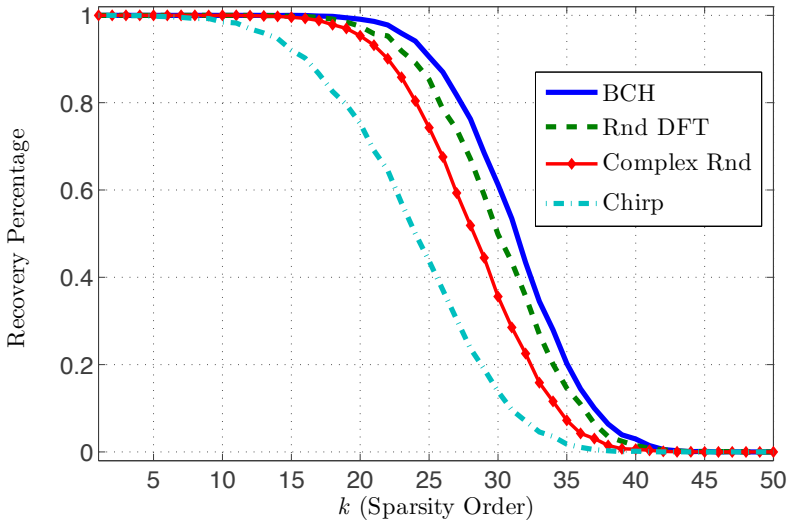


شکل ۴–۶: SNR سیگنال‌های ۱۵–تنک بازسازی شده هنگامی که نمونه‌های فشرده تحت تاثیر نویز جمعی با توان‌های متفاوتی قرار گیرند. ماتریس‌های حسگر با ساختار BCH، Devore و ادغامی (Ternary) ابعاد ۵۱۲ × ۶۳، ۵۱۲ × ۶۴ و ۵۱۲ × ۴۹ دارند. همچنین دو ماتریس تصادفی گوسی ابعاد ۵۱۲ × ۶۴ و ۵۱۲ × ۴۹ دارند.

متفاوت متوسط گیری شده است. در شکل ۴–۶ عملکرد همین ماتریس‌ها در شرایط نویزی و با میزان نویزهای متفاوت و هنگامی که سیگنال ورودی ۱۵–تنک است، نشان داده شده‌اند. در هر دو شکل، ماتریس‌های دو قطبی با ساختار BCH نسبت به ماتریس‌های تصادفی متناظر و ماتریس دودویی Devore عملکرد بهتری دارند.

برای ماتریس‌های مختلط، از ماتریس‌های BCH با ابعاد $p^۶ \times (p^۴ - ۱)$ به ازای $p = ۳,۵$ استفاده کرده‌ایم. همچنین، ماتریس‌های بر مبنای توابع Chirp، ماتریس‌های تصادفی با توزیع گوسی و زیر ماتریس‌های تصادفی از ماتریس DFT (سطرهای تصادفی) با اندازه‌های مشابه پیاده‌سازی شده‌اند. شکل ۴–۷ و ۴–۸ نتایج در حالت $p = ۳$ و شکل ۴–۹ نتایج در حالت $p = ۵$ را نشان می‌دهند. در تمام این شکل‌ها، عملکرد ماتریس BCH در حد زیر ماتریس‌های تصادفی از ماتریس DFT است که از عملکرد سایر روش‌ها بهتر است.

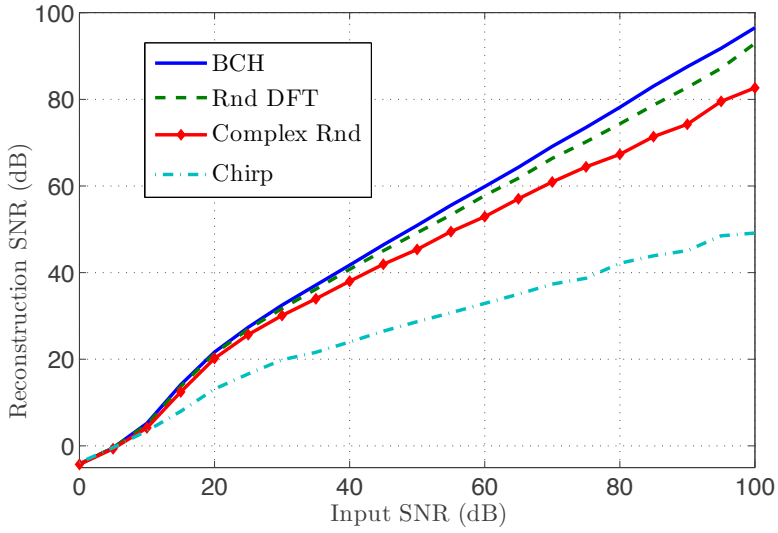
در شکل ۴–۱۰ عملکرد ماتریس‌های ادغامی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. برای این منظور، ماتریس دودویی ۵۱۲ × ۶۴ با ساختار Devore و وزن ۸ را با ماتریس ۹ × ۸ از نوع BCH ۳–سمبلی ادغام می‌کنیم تا یک ماتریس ۴۶۰۸ × ۶۴ با ضریب همدوسی $\frac{۱}{۴}$ بدست آید. به عنوان مثالی از ضرب کرونکر ماتریس‌ها، یک ماتریس دودویی ۲۷ × ۹ با ساختار Devore و وزن ستونی ۳ را با یک ماتریس دو قطبی ۶۴ × ۷ با ساختار BCH ادغام



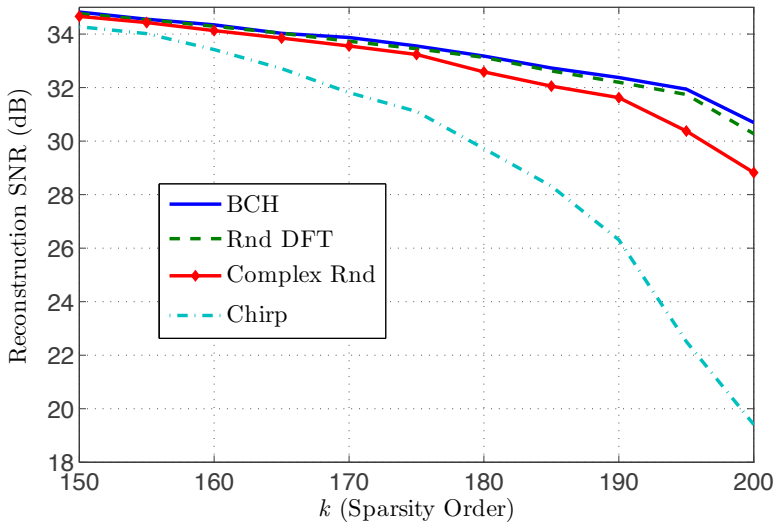
شکل ۴-۷: درصد بازسازی کامل ($\text{SNR}_{rec.} \geq ۱۰۰dB$) هنگامی که نمونه‌ها بدون نویز هستند. ماتریس BCH بر مبنای کدهای $p = ۳$ سمبلی ساخته شده است و ابعاد تمامی ماتریس‌ها ۷۲۹ × ۸۰ است.

کرده‌ایم به طوری که یک ماتریس ۱۷۲۸ × ۶۳ با ضرب همدوسی $\frac{۵}{۷}$ حاصل شود. ماتریس‌های تصادفی در این شکل با ابعاد ۴۶۰۸ × ۶۴ هستند اما ماتریس بر پایه توابع Chirp ۴۶۰۸ × ۷۵ است. نتایج شبیه‌سازی حاکی از اختلاف شدید بین دو روش ادغام ماتریس است. عملکرد روش ادغام با ماتریس‌های دودویی کمابیش در حد عملکرد ماتریس‌های تصادفی است در حالی که عملکرد ماتریس حاصل از ضرب کرونکر بسیار ناامیدکننده است.

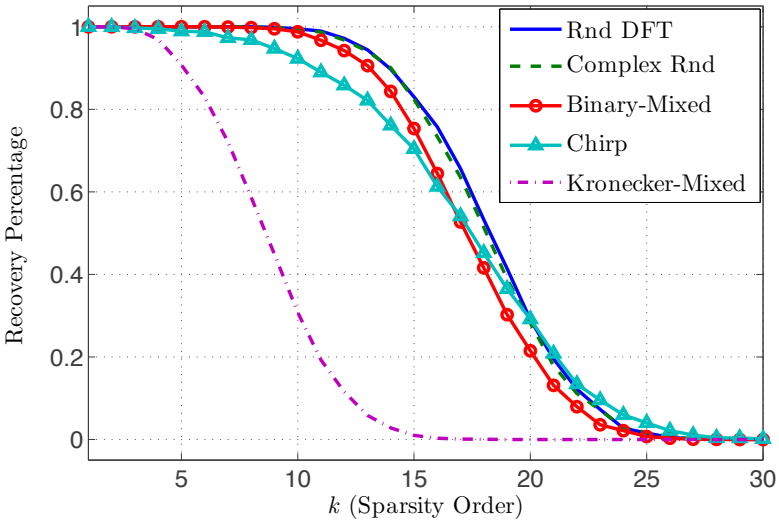
در انتها برای مقایسه پیچیدگی محاسباتی روش OMP با و بدون استفاده از الگوریتم FFT، شکل ۴-۱۱ را رسم کرده‌ایم. در این شکل زمان بازسازی یک سیگنال ۱۵۶۲۵ × ۱ توسط نمونه‌های ۶۲۴ بعدی آن نشان داده شده است. برای حالت $k = ۴۵$ زمان لازم برای OMP ساده بیش از ۱۲ برابر زمان لازم برای حالتی است که از FFT استفاده کنیم.



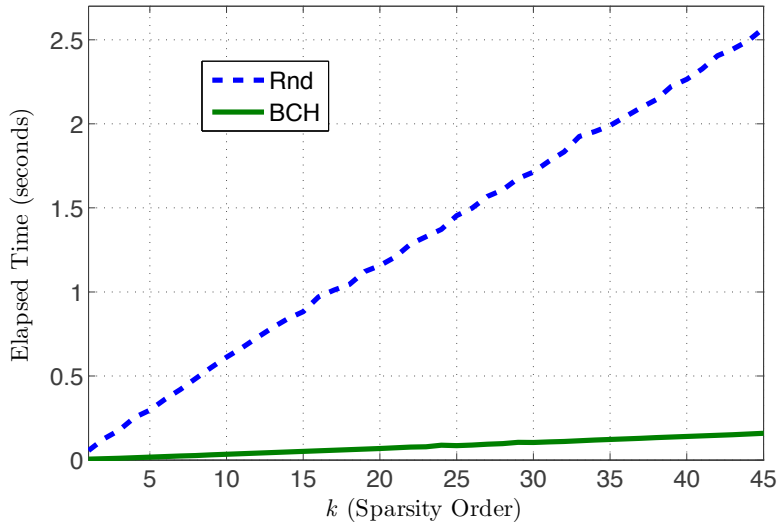
شکل ۴-۸: SNR سیگنال ۲۵-تنک بازسازی شده برای توان‌های متفاوت نویز جمعی. ماتریس BCH بر مبنای کدهای $p = ۳$ سمبلی ساخته شده است و ابعاد تمامی ماتریس‌ها ۷۲۹ × ۸۰ است.



شکل ۴-۹: SNR سیگنال ۲۵-تنک بازسازی شده برای توان‌های متفاوت نویز جمعی. ماتریس BCH بر مبنای کدهای $p = ۵$ سمبلی ساخته شده است و ابعاد تمامی ماتریس‌ها ۱۵۶۲۵ × ۶۲۴ است.



شکل ۴-۱۰: درصد بازسازی کامل ($\text{SNR}_{rec.} \geq ۱۰۰dB$) هنگامی که نمونه‌ها بدون نویز هستند. ابعاد ماتریس‌های بر مبنای ادغام دودویی، ادغام کرونکر، توابع Chirp، تصادفی گوسی و سطرهای تصادفی ماتریس DFT به ترتیب عبارتند از ۴۶۰۸ × ۶۴، ۱۷۲۸ × ۶۳، ۴۶۰۸ × ۷۵، ۴۶۰۸ × ۶۴ و ۴۶۰۸ × ۶۴.



شکل ۴-۱۱: مقایسه زمان لازم برای بازسازی یک بردار تنک ۱ × ۱۵۶۲۵ از نمونه‌های فشرده ۱ × ۶۲۴ توسط ماتریس تصادفی (OMP ساده) و ماتریس‌های BCH با $p = ۵$ سمبلی (OMP تسریع شده).