فصل ۱

مقدمه

در این بخش ابتدا تاریخچه و کلیاتی در مورد مبحث نمونه‌برداری فشرده ارائه می‌شود. همچنین تعاریف کلیدی که در اکثر فصل‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند، در اولین بخش گنجانده شده است. در انتهای این فصل، نحوه دسته‌بندی مطالب در پایان‌نامه به طور مختصر شرح داده خواهد شد.

۱-۱ نمونه‌برداری شانون تا نمونه‌برداری فشرده

در قضایای نمونه‌برداری کلاسیک (که در ادبیات مهندسی برای اولین بار توسط شانون [۸۴] مطرح شد ولی تاریخچه‌ای قدیمی‌تر دارد [۹۸])، به دنبال بیان یک سیگنال باند محدود توسط نمونه‌های زمانی آن هستیم. به لحاظ پیشینه تاریخی، ابتدا سیگنال‌های پایین‌گذر[1] مورد بررسی قرار گرفتند. شایان ذکر است که مفاهیم باند محدود، پایین گذر، بالاگذر و ... منوط به تعریف حوزه‌ای به نام حوزه فرکانس است که در بررسی‌های کلاسیک نمونه‌برداری، این حوزه همان تبدیل فوریه فرض شده‌است؛ به بیان بهتر، تاکنون دو مفهوم حوزه فرکانس و تبدیل فوریه به یک معنا به کار رفته‌اند که در متن پیش رو لزوماً یکسان نخواهند بود. مفهوم حوزه فرکانس در ادامه شرح داده خواهد شد. بررسی‌های انجام شده در نمونه‌برداری یکنواخت از سیگنال‌های پایین گذر مبین آن است که حداقل نرخ نمونه‌برداری برای قابلیت بازسازی سیگنال اصلی، دو برابر پهنای باند تبدیل فوریه است (نرخ نایکوئیست)[۷۵]. نتیجه مذکور به سیگنال‌های میان‌گذر [۱۸، ۳۴] و چندبانده [۱۷] و نمونه‌برداری‌های غیریکنواخت [۶۹] و حتی تصادفی [۳۲] نیز تعمیم داده شده است. در تمام موارد فوق، کمترین

[1] Lowpass

نرخ نمونه‌برداری که بازسازی کامل سیگنال را تضمین کند، همواره ضریبی از پهنای باند است (این ضریب در بهترین حالت که نمونه‌برداری غیریکنواخت تطبیق‌شده بر سیگنال استفاده شود، برابر یک است!). در مقالات اخیر [۱۰، ۲۶، ۴۰] شرط پهنای‌باند محدود، با شرط قوی‌تری (محدود کننده‌تر) جایگزین شده و نتایج جالبی بدست آمده است. مخلوطی از k سیگنال سینوسی را فرض کنید که با استفاده از نمونه‌های زمانی آن می‌خواهیم فرکانس و ضرایب این سینوس‌ها را (در حالت کلی، ضرایب مختلط که فاز را نیز در بر گیرد) تعیین کنیم. در صورتی که بخواهیم از قضایای کلاسیک نمونه‌برداری استفاده کنیم، نمونه‌برداری یکنواخت را باید با نرخی بیشتر از دو برابر بزرگترین فرکانس موجود در بین سیگنال‌های سینوسی انجام داد؛ یعنی نرخ نمونه‌برداری بدون توجه به تعداد سیگنال‌های تک‌فرکانس و تنها براساس بزرگترین فرکانس تعیین می‌شود. در حالت حدی فرض کنیم تنها یک سیگنال سینوسی $\alpha e^{j2\pi ft}$ موجود باشد؛ به وضوح تنها با دو نمونه زمانی می‌توان α و f را تعیین کرد، حال آن که با استفاده از نرخ نایکوئیست، بی‌نهایت نمونه با فاصله‌های زمانی $\Delta t = \frac{1}{2f}$ مورد نیاز است. اگر سیگنال مجموع چند سینوسی را به صورت یک سیگنال چندبانده با باندهای کم‌عرض فرض کنیم، برای بازسازی آن به نمونه‌برداری غیریکنواخت تناوبی[۲] نیازمندیم که فاصله زمانی بین نمونه‌ها براساس مکان باندهای فرکانسی (تبدیل فوریه) تعیین می‌شوند؛ از آن‌جا که فرکانس سیگنال‌های سینوسی نامعلوم است، تعیین این پارامترها هم ممکن نیست. پس روشن است که قضایای نمونه‌برداری کلاسیک در مورد سیگنال‌های مشابه مثال ذکر شده، نرخ‌های نمونه‌برداری غیربهینه‌ای پیشنهاد می‌کنند. مثال مطرح شده درخصوص مجموع چند سیگنال سینوسی، در مسائل مربوط به تخمین طیف نیز اهمیت بسیاری دارد؛ از جمله روش‌های معروف پیشنهادی در تخمین طیف برای یافتن اندازه و فرکانس سیگنال‌های سینوسی، می‌توان به روش‌های Prony [۳۶]، Pisarenko [۷۸] و MUSIC [۸۳] اشاره کرد. در تمام این روش‌ها، ابتدا ماتریس خودهمبستگی سیگنال از روی نمونه‌ها تخمین زده می‌شود و سپس برحسب مقادیر و بردارهای ویژه، پارامترهای مورد نظر تعیین می‌شوند. روشن است که برای تخمین مناسبی از ماتریس خودهمبستگی، تعداد زیادی نمونه لازم است تا میانگین‌های مربوط، به مقادیر امید ریاضی نزدیک شوند. نکته مثبت این روش‌ها، مرتبط بودن ابعاد ماتریس خودهمبستگی مورد نیاز به تعداد سیگنال‌های تک‌فرکانس است. به عبارت دیگر، با کاهش و یا افزایش تعداد مولفه‌های تک‌فرکانس، تعداد نمونه‌های مورد نیاز و پیچیدگی محاسباتی نیز به ترتیب کم و زیاد می‌شوند (برخلاف روش کلاسیک استفاده از

[۲] Periodic Nonuniform Sampling

نرخ نایکوئیست). در روش جدید نمونه‌برداری که به نمونه‌برداری فشرده[۳] معروف شده است، هدف کاهش تعداد نمونه‌های لازم برای بازسازی سیگنال‌های مشابه با مثال مطرح شده است که در حوزه‌ای به نام حوزه‌ی فرکانس (که در مثال ذکر شده همان تبدیل فوریه است) نمایش تنک[۴] داشته باشند. به بیان دیگر، باید در حوزه‌ی فرکانس مورد نظر، تعداد ضرایب غیرصفر به مراتب کمتر از تعداد ضرایب صفر باشد. گفتنی است که در مورد کنار هم قرار گرفتن ضرایب ناصفر، فرضی وجود ندارد؛ به همین دلیل پهنای‌باند در این حالت مصداق نخواهد داشت.

۱–۲ نمونه‌برداری فشرده

مبحث نمونه‌برداری فشرده که ابتدا در مقالات [۲۳، ۲۵، ۴۰] معرفی شد و هم‌اکنون جزء موضوعات روز تحقیق به شمار می‌رود، حاصل از بکارگیری شرط تنک‌بودن در مسأله‌ی نمونه‌برداری است. نکته‌ی جالب در این مبحث آن است که قبل از پایه‌ریزی روش‌های نمونه‌برداری، روش بازسازی کاملاً شناخته شده بود. در حقیقت موفقیت چشمگیر روش کمینه کردن نرم ℓ_1 موجب طراحی روش‌های نمونه‌برداری منطبق با این روش شد.

فرض کنید بردار $\mathbf{x}_{n\times 1}$ مبین یک سیگنال گسسته و متناهی در زمان باشد. گوییم $\mathbf{x}_{n\times 1}$ یک سیگنال k–تنک است اگر نمایش این بردار در یک حوزه متعامد یکه، حداکثر k مولفه ناصفر داشته باشد. به بیان ریاضی:

$$\mathbf{x}_{n\times 1} = \mathbf{\Psi}_{n\times n} \cdot \mathbf{s}_{n\times 1} \tag{۱–۱}$$

به طوری که $\mathbf{\Psi}_{n\times n}$ یک ماتریس یکانی (معرف حوزه متعامد یکه) و $\mathbf{s}_{n\times 1}$ برداری با حداکثر k درایه ناصفر است. مثلاً اگر $\mathbf{x}_{n\times 1}$ تصویری باشد که به نحوی به بردار تبدیل شده باشد و $\mathbf{\Psi}_{n\times n}$ معادل ماتریسی باشد که عکس تبدیل DCT تصویر را ایجاد کند (به دلیل خطی بودن تبدیل، حتماً چنین ماتریسی وجود دارد)، $\mathbf{s}_{n\times 1}$ برداری است که با تقریب نسبتاً خوبی، تنک فرض می‌شود ($\mathbf{s} = \mathbf{\Psi}^{-1} \cdot \mathbf{x}$). در واقع، این حقیقت ایده اصلی چندین روش فشرده‌سازی تصاویر مثل JPEG 2000 است. حال فرض کنید بخواهیم بردار $\mathbf{x}_{n\times 1}$ را با کمترین اطلاعات (از نظر تعداد نمونه) نمایش دهیم؛ از آنجا که $\mathbf{s}_{n\times 1}$ تنها k مقدار ناصفر دارد، با در اختیار داشتن مقادیر و مکان‌های ناصفر بردار $\mathbf{s}$، این بردار به طور یکتا مشخص می‌شود و در صورت آگاهی از ماتریس $\mathbf{\Psi}$، بردار $\mathbf{x}_{n\times 1}$ نیز به طور یکتا مشخص خواهد شد. در نتیجه، نمایش بردار $\mathbf{x}_{n\times 1}$ تنها با $2k$ نمونه (k نمونه برای اندیس

[۳] Compressed Sensing

[۴] Sparse

مکان‌های ناصفر و k نمونه برای مقادیر این مکان‌ها) امکان پذیر است. اما مشکل اینجاست که برای بدست‌آوردن چنین نمایشی، باید ابتدا کل بردار $\mathbf{x}_{n\times 1}$ را در دست داشته باشیم، سپس تبدیل آن را در حوزه فرکانس بدست آوریم و مکان‌های ناصفر (و یا مکان‌های با مقادیر قابل توجه) آن را مشخص کنیم. پس، ابتدا باید سیگنال به طور کامل ذخیره شود و سپس با توجه به تنک‌بودن آن در حوزه‌ی فرکانس مورد نظر، فشرده شود.

در نمونه‌برداری فشرده، بر خلاف آن چه گفته شد، مایلیم که نمونه‌برداری به صورت غیروفقی[۵] و خطی صورت گیرد. به عبارت دیگر اگر بردار نمونه‌ها را با $\mathbf{y}_{m\times 1}$ نشان دهیم، داریم:

$$\mathbf{y}_{m\times 1} = \mathbf{\Phi}_{m\times n} \cdot \mathbf{x}_{n\times 1} = \mathbf{\Phi}_{m\times n} \cdot \mathbf{\Psi}_{n\times n} \cdot \mathbf{s}_{n\times 1} \qquad (۱-۲)$$

که ماتریس $\mathbf{\Phi}_{m\times n}$ مستقل از $\mathbf{s}_{n\times 1}$ انتخاب شده است و به ماتریس حسگر[۶] شهرت دارد. در حقیقت ابعاد ماتریس حسگر به نوعی نرخ فشرده‌سازی را مشخص می‌کنند؛ اگر نمونه‌برداری بدون از دست رفتن اطلاعات صورت گرفته باشد، یک بردار n بعدی به یک بردار m بعدی معادل تبدیل شده است. برای بازسازی بردار $\mathbf{x}$ و یا بردار تنک $\mathbf{s}$ که با $\mathbf{x}$ معادل است، با معادله فرو-معین[۷] ذیل روبرو هستیم:

$$\mathbf{y}_{m\times 1} = \mathbf{\Phi}_{m\times n} \cdot \mathbf{\Psi}_{n\times n} \cdot \mathbf{s}_{n\times 1} = \mathbf{A}_{m\times n} \cdot \mathbf{s}_{n\times 1} \qquad (۱-۳)$$

که در حالت $m < n$ بی‌شمار جواب دارد ($\mathbf{y}_{m\times 1}$ به عنوان بردار معلوم و $\mathbf{s}_{n\times 1}$ به عنوان بردار مجهول). اما در این‌جا شرط تنک‌بودن $\mathbf{s}_{n\times 1}$ مجموعه جواب‌ها را محدود می‌کند. سوال اصلی در این است که تحت چه شرایطی جواب به اندازه کافی تنک در محدوده جواب یکتا است و در صورت یکتابودن چگونه می‌توان با داشتن بردار $\mathbf{y}_{m\times 1}$ به بردار تنک $\mathbf{s}_{n\times 1}$ دست یافت. همان‌طور که در ابتدا اشاره شد، روش بازسازی از قبل معلوم بود: کمینه کردن نرم ℓ_1 (BP[۸]). این روش نه تنها در عمل کارآمد است بلکه در مقاله [۴۰] نشان داده شده که در حالت نظری نیز به روش بهینه بازسازی بسیار نزدیک است[۹]. پیش از آن که به بررسی شرایط لازم بر روی ماتریس $\mathbf{A}$ بپردازیم، روش BP را کمی دقیق‌تر مطالعه می‌کنیم. در مسأله بازسازی، به دنبال یافتن کمینه‌کننده عبارت زیر

---

[۵] Non-Adaptive

[۶] Sensing Matrix

[۷] Under-determined

[۸] Basis Pursuit

[۹] Near Optimal

هستیم:

$$\arg\min_{\mathbf{s}} \|\mathbf{s}_{n\times 1}\|_{\ell_0} \quad s.t. \quad \mathbf{\Phi}_{m\times n}\cdot\mathbf{\Psi}_{n\times n}\cdot\mathbf{s}_{n\times 1}=\mathbf{y}_{m\times 1} \tag{۱–۴}$$

که منظور از $\|.\|_{\ell_0}$ نرم صفر بردار است (تعداد درایه‌های ناصفر). از آنجا که نرم صفر محدب نیست (کلا $\|.\|_{\ell_p}$ برای $0 \leq p < 1$ محدب نیست) و از آن مهم‌تر، مشتق‌پذیر نیست، مساله NP-Complete [۱۰] تلقی می‌شود و حل آن منوط به جستجوی کامل است که به وضوح در ابعاد بالا غیرعملی است. یکی از راهکارهای مهم در حل سیستم‌های خطی با فرض تنک‌بودن جواب (مشابه صورت مساله مطرح شده)، تقریب‌زدن نرم صفر با نرمی از مرتبه بالاتر است که قابلیت کمینه‌کردن آن ساده‌تر باشد. طبیعی است که هر چه نرم مرتبه پایین‌تری استفاده شود، جواب حاصل از کمینه‌سازی، به جواب حاصل از کمینه‌سازی نرم صفر نزدیک‌تر خواهد بود. از آنجا که نرم یک ($\|.\|_{\ell_1}$) نزدیک‌ترین نرم محدب به نرم صفر است، جایگزینی نرم صفر با نرم یک، منطقی‌ترین تقریب به نظر می‌رسد:

$$\arg\min_{\mathbf{s}} \|\mathbf{s}_{n\times 1}\|_{\ell_1} \quad s.t. \quad \mathbf{\Phi}_{m\times n}\cdot\mathbf{\Psi}_{n\times n}\cdot\mathbf{s}_{n\times 1}=\mathbf{y}_{m\times 1} \tag{۱–۵}$$

برای مساله اخیر راه‌حل‌هایی به کمک برنامه‌نویسی خطی [۱۱] معرفی شده‌اند که به خانواده Basis Pursuit معروفند و پیچیدگی محاسباتی آن‌ها از مرتبه n^3 است [۲۲، ۴۱، ۵۰، ۹۰]. به عبارت بهتر، با افزایش مرتبه نرم، پیچیدگی محاسباتی را کاهش داده‌ایم؛ حال آن‌که به احتمال زیاد جواب حاصل تا حدی با جواب اصلی متفاوت است. در صورتی که نرم صفر با نرم دو ($\|.\|_{\ell_2}$) تقریب زده شود، این روند مشهودتر خواهد شد: کمینه‌سازی براساس نرم دو جزء معروف‌ترین مسائل مهندسی بشمار می‌رود و راه‌حل‌های فراوانی برای آن پیشنهاد شده که پیچیدگی محاسباتی آن‌ها به مراتب کمتر از Basis Pursuit است. از جمله این روش‌ها می‌توان به استفاده از شبه–وارون [۱۲] ، SD [۱۳] ، CG [۱۴] و RLS [۱۵] اشاره کرد. روش رایج دیگر در بازسازی سیگنال‌های تنک Matching Pursuit است که به صورت تکراری و با روش Greedy جواب را تقریب می‌زند (پیچیدگی محاسباتی از مرتبه n) [۵۱، ۸۹، ۹۱]. نتایج شبیه‌سازی‌ها در کاربردهای مختلف حاکی از آن است که تقریب حاصل از نرم دو، در

[۱۰] Non-Polynomial Time

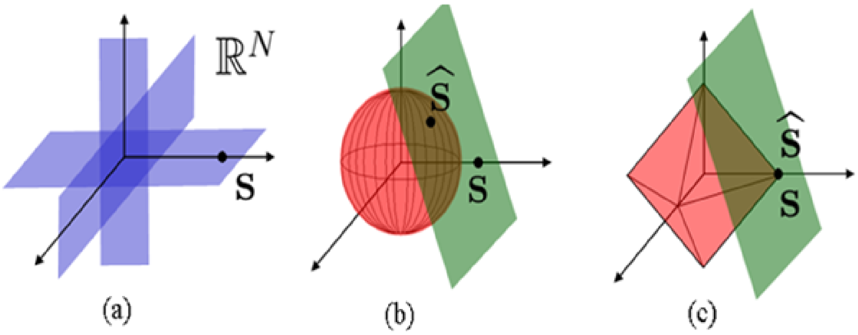
[۱۱] Linear Programming

[۱۲] Pseudo-Inverse

[۱۳] Steepest Descent

[۱۴] Conjugate Gradient

[۱۵] Recursive Least Squares



شکل ۱–۱: (a) یک بردار تنک در فضای سه بعدی، (b) تقریب حاصل از کمینه‌سازی نرم ℓ_2 برای این بردار، (c) تقریب حاصل از کمینه‌سازی نرم ℓ_1 برای این بردار [۱۰].

حالت کلی مناسب نیست در حالی که تقریب حاصل از نرم یک، هنگامی که تعداد نمونه‌ها کافی باشد، به سیگنال اصلی بسیار نزدیک است [۹۶] (با افزایش تعداد نمونه‌ها به اندازه زیاد، تمام نرم‌ها به یک جواب منجر می‌شوند، حال آن که تعداد نمونه‌های مورد نیاز در نرم‌های مختلف، متفاوت است؛ بطور اخص، نرم دو در قیاس با نرم یک، به تعداد نمونه‌های بسیار بیشتری نیاز دارد). شکل ۱–۱ مثالی از کمینه‌سازی با هر دو نرم یک و دو را نشان می‌دهد.

حال به سراغ ماتریس $\mathbf{A}$ می‌رویم. برای آن‌که بتوان هر سیگنال k–تنک را پس از نمونه‌برداری توسط $\mathbf{A}$ بازسازی کرد، باید هیچ دو بردار k–تنک متفاوتی نمونه‌های یکسانی تولید نکنند. در نتیجه تفاضل هیچ دو بردار k–تنکی (که در حالت کلی $2k$–تنک است) نباید در فضای پوچ این ماتریس قرار گیرد. پس شرط لازم برای بازسازی کامل آن است که هر $2k$ انتخاب از ستون‌های $\mathbf{A}$ مستقل خطی باشند. ماتریس‌های واندرموند[۱۶] $2k$ سطری از جمله ماتریس‌های معروفی هستند که چنین خاصیتی دارند. اما نکته منفی در این ماتریس‌ها، ناپایدار شدن آن‌ها در حالت حدی $n \to \infty$ است. یعنی قابلیت بازسازی منوط به دقت بسیار بالا در محاسبات و عدم حضور نویز جمعی است. برای یافتن چاره، باید پایداری جواب نسبت به نویز نیز لحاظ شود. یکی از ابزارهای قوی در مبحث نمونه‌برداری فشرده که نه تنها قابلیت بازسازی بلکه پایداری را نیز تضمین می‌کند، شرط RIP [۲۳] است.

می‌گوییم ماتریس $\mathbf{A}_{m\times n}$ شرط RIP مرتبه k را با ثابت δ_k ($0 \le \delta_k < 1$) ارضا می‌کند اگر برای هر بردار

[۱۶] Vandermonde

k-تنک مانند $\mathbf{s}_{n\times 1}$ داشته باشیم:

$$1-\delta_k \leq \frac{\|\mathbf{A}_{m\times n}\cdot \mathbf{s}_{n\times 1}\|_{\ell_2}^2}{\|\mathbf{s}_{n\times 1}\|_{\ell_2}^2} \leq 1+\delta_k \tag{۱-۶}$$

به عبارت بهتر، نه تنها هیچ یک از بردارهای k-تنک در فضای پوچ ماتریس $\mathbf{A}$ قرار نمی‌گیرند، بلکه فاصله تضمین‌شده‌ای (δ_k) را نسبت به این فضا حفظ می‌کنند.

با وجود تمام نکات مثبت در مورد شرط RIP، از نظر محاسباتی بررسی این که یک ماتریس داده شده شرط RIP از چه مرتبه‌ای را ارضا می‌کند، NP-Hard است. یعنی جز در موارد خاصی نمی‌توان برقراری یا عدم برقراری شرط RIP را در یک ماتریس اثبات کرد. در [۲۵] با کمک گرفتن از ماتریس‌های تصادفی، وجود ماتریس‌های $\mathbf{A}_{m\times n}$ با $m \geq \mathcal{O}\big(k\log\frac{n}{k}\big)$ که شرط RIP مرتبه k را با ثابت دلخواه δ_k ارضا می‌کنند، اثبات شده است، اما تاکنون هیچ روش ساختاری برای تهیه چنین ماتریس‌هایی ارائه نشده است.

ضریب همدوسی ماتریس $\mathbf{A}$ که به صورت زیر تعریف می‌شود، در طراحی ماتریس‌های حسگر اهمیت بسیاری دارد:

$$\mu_{\mathbf{A}} \triangleq \max_{i\neq j}\frac{|\langle \mathbf{a}_i,\mathbf{a}_j\rangle|}{\|\mathbf{a}_i\|\cdot\|\mathbf{a}_j\|}, \tag{۱-۷}$$

که $\mathbf{a}_i$ و $\mathbf{a}_j$ ستون‌های متمایز ماتریس $\mathbf{A}$ هستند. هرچه ضریب همدوسی ماتریس کوچکتر باشد، ماتریس به متعامدبودن نزدیک‌تر است. در فصل آینده نشان می‌دهیم که کوچک‌بودن ضریب همدوسی ماتریس، شرط RIP را تضمین می‌کند و در نتیجه شرط قوی‌تری نسبت به RIP به‌شمار می‌رود. همچنین محاسبه ضریب همدوسی یک ماتریس از نظر محاسباتی به صورت $\mathcal{O}(n^2)$ با افزایش n رشد می‌کند که در موارد عملی قابل قبول است.

براساس یک نامساوی معروف که به نام Welch شهرت دارد [۸۷] در ماتریس‌های $m\times n$ که $m<n$

$$\mu_{\mathbf{A}} \geq \sqrt{\frac{n}{m(n-m)}} \tag{۱-۸}$$

رابطه فوق نشان می‌دهد زمانی که $m \ll n$، $\mu_{\mathbf{A}}$ را نمی‌توان خیلی کوچکتر از $\frac{1}{\sqrt{m}}$ اختیار کرد. در نتیجه اگر بخواهیم با استفاده از ضریب همدوسی شرط RIP را ارضا کنیم، همواره $m \geq \mathcal{O}(k^2)$ و هیچ‌گاه به حالت پیش‌بینی شده $m = \mathcal{O}\big(k\log\frac{n}{k}\big)$ نخواهیم رسید. با این حال استفاده از ضریب همدوسی در طراحی ماتریس حسگر تاکنون تنها ابزار مناسب بوده است.

۱-۳ کاربردهای نمونه‌برداری فشرده

در پنج سال اخیر، به دلیل استقبال شدید محققین از مبحث جدید نمونه‌برداری فشرده، گام‌های موثر و ارزنده‌ای در این راستا برداشته شده است. به طور خاص، پیشرفت‌های چشمگیری در زمینه روش‌های بازسازی سیگنال تنک از روی نمونه‌های فشرده حاصل شده است. با وجود آن که مرحله بازسازی قسمتی مهم از نمونه‌برداری فشرده را در بر دارد، کمینه‌سازی نرم ℓ_1 از این مبحث قدمت بیشتری دارد و نمی‌توان آن را جزء دستاوردهای این زمینه تلقی کرد. حال آن که کاربرد این روش‌های بازسازی در زمینه‌های دیگر همچون بازیابی عکس‌های محو شده [۲۹]، جداسازی منابع [۱۴]، رادار [۴۴] و حتی آشکارسازی نور ستارگان [۱۶] منجر به بهبود و ارتقاء روش‌های کلاسیک شده است. اغلب استفاده از روش‌های بازسازی سیگنال‌های تنک در زمینه‌های دیگر را به اشتباه جزء کاربردهای مبحث نمونه‌برداری فشرده به شمار می‌آورند. با وجود آن که شکوفایی این مبحث موجب مطالعه و پیشرفت این روش‌ها شده است، نمی‌توان روش‌های بازسازی را جزء کاربردهای این زمینه به حساب آورد.

از ابتدا، ایجاد تحول در صنعت عکاسی و مبدل‌های آنالوگ به دیجیتال جزء اهداف اصلی نمونه‌برداری فشرده بوده‌اند که در مطالعات نظری امری میسر به نظر می‌رسد ولی تاکنون چنین طرح‌هایی جامه عمل به خود ندیده‌اند و کماکان جزء اهداف اصلی این مبحث به شمار می‌روند. نقطه ضعف‌های اصلی این مبحث در رسیدن به این اهداف عبارتند از : ۱) پایه‌ریزی عمده مطالب بر اساس سیگنال‌های گسسته و نه پیوسته ؛ ۲) استفاده از ساختارهای تصادفی.

از جمله کاربردهای نمونه‌برداری فشرده که محقق شده است، عکس‌برداری به روش تشدید مغناطیسی (MRI) است [۶۸]. در این روش پرتوهای اشعه X از جسمی (مثل بدن انسان) عبور داده می‌شوند و به دلیل خواص اپتیکی محیط، تبدیل فوریه فضایی جسم در راستای پرتو تابانده شده، دریافت می‌شود. به این صورت، به تعداد پرتوهای تابانده شده، ضریب فوریه از جسم به دست می‌آید و در نهایت براساس ضرایب فوریه بدست آمده، محتوی سه بعدی جسم تقریب زده می‌شود. از آن‌جا که اجسام معمولی و به ویژه بافت‌های بدن، از قسمت‌های تکه‌ای یکنواخت تشکیل شده‌اند، مشتق مکانی جسم تنک است (مشتق مکانی لبه‌ها را آشکار می‌کند). از طرف دیگر، نمونه‌ها به طور ناقص از تبدیل فوریه جسم انتخاب شده‌اند. به دلیل مضربودن پرتوهای اشعه X، مطلوب است که تعداد پرتوهای تابانده شده تا حد ممکن کاهش یابد، به عبارت بهتر، تمام شرایط

نمونه‌برداری فشرده در این‌جا وجود دارد.

مثال دیگری از کاربردهای نمونه‌برداری فشرده، تخمین کانال در ارتباطات OFDM است [۸۵، ۸۶] . در روش OFDM، اطلاعات ارسالی بر روی حامل‌های فرکانسی مجزا و هم‌فاصله قرار داده می‌شوند. برای قابلیت تخمین کانال، بر روی تعدادی از حامل‌ها داده‌های از پیش تعیین‌شده قرار می‌گیرد که گیرنده از قبل نسبت به آن‌ها واقف است. پس از عبور داده از کانال، دنباله ارسالی و پاسخ ضربه کانال به هم پیچیده[۱۷] می‌شوند که معادل ضرب در حوزه فرکانس است؛ در نتیجه حامل‌های فرکانسی به طور مستقل تحت تاثیر کانال قرار می‌گیرند. بنابراین گیرنده قادر است که پاسخ فرکانسی کانال را در فرکانس‌های از پیش تعیین‌شده با دقت مناسبی تخمین زند. برای تخمین کل کانال، کافی است به این نکته توجه شود که پاسخ ضربه کانال معمولاً تنک است. بنابراین با داشتن تعدادی از ضرایب فوریه یک سیگنال تنک (که در انتخاب ضرایب نسبتاً آزاد هستیم) به دنبال تخمین آن هستیم. به وضوح این مسأله حالت خاصی از نمونه‌برداری فشرده است.

با توجه به نتایج نظری بدست آمده و قابلیت‌های فناوری، حدس زده می‌شود که در آینده نزدیک از نمونه‌برداری فشرده در شبکه حسگرها [۱۸] و ضبط سیگنال‌های حیاتی توان پایین به طور عملی استفاده شود.

۱–۴ تکمیل ماتریس

پس از اوج گرفتن مبحث نمونه‌برداری فشرده، تعمیم‌های آن به ابعاد بالاتر نیز مطرح شد. مبحث تکمیل ماتریس[۱۹] یکی از این موارد است. هنگامی که به جای یک بردار، با یک ماتریس روبرو هستیم، شرط تنک‌بودن معادل با کوچک‌بودن رتبه ماتریس است. در حقیقت هنگامی که ماتریس به عنوان یک عملگر در نظر گرفته شود، مقادیر ویژه و یا مقادیر تکین آن اهمیت بسیار بیشتری نسبت به درایه‌ها پیدا می‌کنند. بنابراین، تنک‌بودن یک ماتریس بیشتر معادل با تنک‌بودن مقادیر ویژه آن است تا المانهایش. علاوه بر این، وجود تعداد زیادی صفر در بین مقادیر ویژه به معنی پایین‌بودن رتبه ماتریس نسبت به ابعادش است.

در مبحث تکمیل ماتریس، فرض بر این است که تعدادی از درایه‌های یک ماتریس کم‌رتبه در اختیار است و هدف کامل‌کردن بقیه درایه‌هاست به نحوی که رتبه ماتریس حداقل شود. در [۲۱] نشان داده شده که نرم

[۱۷] convolve

[۱۸] Sensor Networks

[۱۹] Matrix Completion

هسته‌ای[۲۰] ماتریس نقش نرم ℓ_1 در بردارها را ایفا می‌کند و روش کمینه‌کردن نرم هسته‌ای خواصی مشابه با روش BP دارد. یکی از کاربردهای تکمیل ماتریس که در [۲۱] ذکر شده است، مسأله داوری در فستیوال فیلم است. فرض کنید ۱۰۰ فیلم در مسابقه شرکت داده شده‌اند و تنها ۱۰ داور برای بررسی این فیلم‌ها در نظر گرفته‌شده‌است؛ به دلیل وقت کم و تعداد زیاد فیلم‌ها، هر فیلم تنها توسط ۴ یا ۵ داور مورد قضاوت قرار می‌گیرد. اکنون اگر ماتریس ۱۰۰ × ۱۰ مربوط به نمرات داوران در مورد فیلم‌ها را تشکیل دهیم، بسیاری از درایه‌ها در دسترس نیستند. اما به طور شهودی براساس نظرات یک داور و مقایسه آن با نظرات داورهای دیگر، می‌توان بقیه درایه‌های ماتریس را تخمین زد. فرض کنید تنها ۴ عامل فیلمنامه، کارگردانی، بازی هنرپیشه‌ها و جلوه‌های ویژه از نظر داورها اهمیت دارد و هر داور براساس علاقه شخصی خود به نوعی بین این عوامل وزن‌دهی می‌کند و به هر فیلم امتیاز می‌دهد. در این صورت رتبه ماتریس ۱۰۰ × ۱۰ برابر با ۴ خواهد بود و برای تخمین درایه‌های نامعلوم ماتریس می‌توان از روش‌های تکمیل ماتریس سود جست.

۱–۵ طبقه بندی مطالب پایان‌نامه

در این فصل (مقدمه) به توضیح مقدمات و تعاریف مورد استفاده در نمونه‌برداری فشرده پرداختیم. در فصل ۲ کلیات نمونه‌برداری فشرده از قبیل پیش زمینه‌ها و دیدگاه‌های مختلف نسبت به آن توضیح داده خواهد شد. از آن‌جا که نوآوری این پایان‌نامه بیشتر در طراحی روش‌های نمونه‌برداری است، در فصل ۳ به مرور روش‌های کنونی در نمونه‌برداری فشرده می‌پردازیم. ماتریس‌های حسگر جدید که در این پایان‌نامه معرفی شده‌اند در فصل ۴ مطرح می‌شوند. پس از معرفی روش‌های خطی، در فصل ۵ به روش‌های غیرخطی و مزایایی که می‌توانند داشته باشند می‌پردازیم. هدف اصلی در نمونه‌برداری فشرده متحول‌کردن روش‌های کنونی نمونه‌برداری و فشرده‌سازی است که در عمل بر روی داده‌های پیوسته صورت می‌گیرند. برای ورود به مبحث سیگنال‌های پیوسته لازم است که تعاریف مقدماتی از قبیل تنک‌بودن و فشرده‌پذیری مجدداً برای این سیگنال‌ها مطالعه شود که این امر در فصل ۶ صورت گرفته است. ماتریس‌ها تعمیم‌های طبیعی بردارها به شمار می‌روند و همان‌طور که در قسمت قبل اشاره شد، مفهوم تنک‌بودن برای ماتریس‌ها به صورت کم‌بودن رتبه مطرح می‌شود. در فصل ۷ به کمک عملگرهای غیرخطی به دنبال کاهش رتبه ماتریس‌ها هستیم. در انتها با یک جمع‌بندی در فصل ۸ ، پایان‌نامه را به اتمام می‌رسانیم.

---

[۲۰] Nuclear Norm

برای تفکیک نوآوری‌ها در این پایان‌نامه وکارهای موجود، این مطالب در فصل‌های مجزا گنجانده شده‌اند.
به طور خاص فصل‌های ۴، ۵، ۶ و ۷ نتایج این پایان‌نامه هستند که در مقالات [۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸] ارایه شده‌اند.