

دینامیک سیستم های کوانتومی - نگاشت های مثبت

وحیدکریمی پور- دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

۲ آذر ۱۳۹۱

۱ مقدمه

می دانیم که کلی ترین توصیف حالت یک سیستم با یک ماتریس چگالی داده می شود، زیرا از یک طرف ممکن است که هنوز هیچ آزمایش مشخصی برای تهیه سیستم در یک حالت خالص انجام نداده باشیم و از طرف دیگر ممکن است که سیستم در کنترل ما بخشی از یک سیستم بزرگتر باشد. مثلاً ممکن است که ما تنها به یک فوتون از یک زوج فوتون درهم تنیده دسترسی داشته باشیم که فوتون دوم کیلومترها دور از ما باشد. ما می توانیم بر روی سیستمی که در دست ماست انواع و اقسام آزمایشها را انجام دهیم، مثلاً می توانیم این سیستم را اندازه گیری کنیم، یا اینکه با ایجاد برهم کنش هایی آن را متحول کنیم. این اندازه گیری ها و تحول ها می توانند موضعی یا سرتاسری باشند به این معنا که می توانند کل سیستم و یا تنها بخشی را که در دست ماست تحت تاثیر قرار دهند. نهایتاً همه این اعمال باعث می شوند که ماتریس چگالی سیستم ما یعنی ρ به یک ماتریس چگالی دیگر یعنی ρ' متحول شود. سوالی که در این درس به آن خواهیم پرداخت این است که ماتریس ρ' چه ربطی به ماتریس ρ دارد و خواص نگاشتی که این دورا به هم ربط می دهد چیست؟

۲ ابر عملگرها و نگاشت های مثبت

فرض کنید که نگاشتی که ρ را به ρ' می نگارد با $\mathcal{E}$ نشان دهیم. برای حفظ کلیت حتی می توان فرض کرد که بعد ρ و ρ' یکی نباشد. یعنی اینکه $\rho \in D(H_1)$ و $\rho' \in D(H_2)$. (یادآوری: $B(H)$ عبارت است از فضای تمام عملگرهای روی H و $D(H)$ عبارت است از فضای تمام ماتریس های چگالی روی H .) در این صورت می نویسیم

$$\mathcal{E} : D(H_1) \longrightarrow D(H_2). \quad (1)$$

خواصی که نگاشت $\mathcal{E}$ دارد آن است که:
الف: خطی است.

ب: ماتریس هرمیتی را به ماتریس هرمیتی می نگارد.

ج: ماتریس مثبت را به ماتریس مثبت می نگارد.

د: رد ماتریس را حفظ می کند.

به چنین نگاشتی یک نگاشت مثبت و ردّ نگه دار *Trace Preserving Positive Map* می گوئیم. هم چنین به نگاشت $\mathcal{E}$ یک ابرعملگر^۱ گفته می شود.

می توان نشان داد که نگاشت های مثبت را (چنانچه یک شرط اضافی داشته باشند) همواره می توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_m A_m \rho A_m^\dagger, \quad (2)$$

که در آن

$$\sum_m A_m^\dagger A_m = I. \quad (3)$$

در ادامه این درس در باره این شرط اضافه بحث خواهیم کرد. در نتیجه می توان اثر یک نگاشت مثبت را به این صورت تعبیر کرد که حالت ρ تحت اثر این نگاشت به مخلوطی از حالت های چگالی^۲.

$$\rho_m := \frac{A_m \rho A_m^\dagger}{\text{tr}(A_m \rho A_m^\dagger)}$$

تبدیل می شود که هرکدام با احتمال^۳.

$$P_m = \text{tr}(A_m \rho A_m^\dagger)$$

در مخلوط نهایی وجود دارند.

^۱Superoperator



شکل ۱: () تمام اعمالی که آلیس روی سیستم خود انجام می دهد با یک نگاشت مثبت قابل بیان هستند.

در مورد این نگاشت ها قضایای بسیار جالبی وجود دارد که در انتهای این درس با آن ها آشنا خواهیم شد. اما قبل از آن بهتر است با مثالهایی از این نگاشت ها آشنا شویم.

یک نکته در مورد نامگذاری: گاهی اوقات از نام کانال برای این تحولات زمانی و یا نگاشت ها استفاده می شود، که یادآور تاثیر محیط بر یک حالت کوانتومی است که از جایی به جایی دیگر ارسال شده است مثل تاثیر یا فیبر نوری بر حالت قطبش فوتونی که از طریق فیبر ارسال شده است.

یک نمونه از نگاشت های مثبت همان اندازه گیری های عام یا $POVM$ بوده است. که در درس قبلی با آن آشنا شدیم. در این نوع نگاشت عملگرهای کراوس همان عملگرهای $POVM$ هستند.

ترکیب نگاشت های مثبت: فرض کنید که $\mathcal{E}$ و $\mathcal{F}$ دو نگاشت مثبت باشند. در این صورت واضح است که ترکیب این دو نگاشت یعنی $\mathcal{E} \circ \mathcal{F}$ که به صورت زیر عمل می کند،

$$(\mathcal{E} \circ \mathcal{F})(\rho) = \mathcal{E}(\mathcal{F}(\rho)) \quad (4)$$

نیز یک نگاشت مثبت است، زیرا همه خواص گفته شده برای یک نگاشت مثبت را در خود دارد. هم چنین واضح است که جمع محدب دو نگاشت مثبت باز هم مثبت است یعنی به ازای هر $0 \leq \lambda \leq 1$ نگاشت زیر یک نگاشت مثبت است:

$$\mathcal{S}_\lambda(\rho) = \lambda \mathcal{E}(\rho) + (1 - \lambda) \mathcal{F}(\rho). \quad (5)$$

البته در حالت اخیر لازم است که دامنه و برد نگاشت های $\mathcal{E}$ و $\mathcal{F}$ یکی باشند.

۳ دینامیک یک زیر سیستم

در درس های مکانیک کوانتومی معمولاً گفته می شود که حالت یک سیستم کوانتومی یعنی $|\psi\rangle$ مطابق با معادله زیر در طول زمان تحول می یابد

$$\psi(t) = U(t)|\psi(\cdot)\rangle, \quad (۶)$$

که در آن $U(t)$ یک عملگر یکانی است که از روی هامیلتونی برهم کنش بدست می آید. این رابطه البته ناموقعی برقرار است که سیستم کوانتومی با یک بردار حالتِ خالص توصیف شود. در غیر این صورت یعنی وقتی که حالت سیستم خالص نیست بلکه با یک ماتریس چگالی تعریف می شود، چنانکه در مکانیک آماری نیز دیده ایم معمولاً گفته می شود که ماتریس چگالی مطابق با رابطه زیر متحول می شود:

$$\rho(t) = U(t)\rho(\cdot)U^\dagger. \quad (۷)$$

این رابطه تحول زمانی ماتریس چگالی را تنها در یک حالت خاص بیان می کند و آن هنگامی است که برهم کنش بین سیستم کوانتومی و محیط آن ضعیف باشد و در اغلب موارد دیگر صحیح نیست. برای آنکه این موضوع را بخوبی دریابیم فرض کنید که در لحظه صفر، حالت سیستم که آن را با A نشان می دهیم و محیط آن که آن را با B نشان می دهیم به صورت زیر باشد:

$$\rho_{AB}(\cdot) = \rho_A \otimes \rho_B. \quad (۸)$$

حال اگر هامیلتونی سیستم و محیط به شکل زیر باشد

$$H_{AB} = H_A \otimes I_B + I_A \otimes H_B \quad (۹)$$

در این صورت عملگر تحول سیستم و محیط به شکل ساده زیر درخواهد آمد:

$$U_{AB}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}H_{AB}t} = e^{-\frac{i}{\hbar}(H_A \otimes I_B + I_A \otimes H_B)t} = e^{-\frac{i}{\hbar}H_A t} \otimes e^{-\frac{i}{\hbar}H_B t} = U_A(t) \otimes U_B(t). \quad (۱۰)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \rho_{AB}(t) &= U_{AB}(t)\rho_{AB}(\cdot)U_{AB}^\dagger(t) = (U_A(t) \otimes U_B(t))\rho_{AB}(\cdot)(U_A^\dagger(t) \otimes U_B^\dagger(t)) \\ &= (U_A(t)\rho_A(\cdot)U_A^\dagger(t)) \otimes (U_B(t)\rho_B(\cdot)U_B^\dagger(t)). \end{aligned} \quad (۱۱)$$

در نتیجه ماتریس چگالی سیستم بعد از گذشت زمان t برابر می شود با

$$\rho_A(t) = tr_B(\rho_{AB}(t)) = U_A(t)\rho_A(\cdot)U_A^\dagger(t). \quad (۱۲)$$

که همان معادله ۷ است. بنابراین ماتریس چگالی سیستم فقط موقعی به این صورت ساده تحول می یابد که برهم کنش بین سیستم و محیط برابر با صفر باشد و یا اینکه فوق العاده کوچک باشد. حالت اخیر همانی است که در مکانیک آماری با آن

مواجه هستیم. در این درس می خواهیم دینامیک یک سیستم کوانتومی را برای وقتی که برهم کنش بین سیستم و محیط کوچک نیست بررسی کنیم. اهمیت این موضوع بدین سبب است که در کامپیترهای کوانتومی و به طور کلی در سیستم های کوانتومی ای که در سالها و دهه های آینده با آن سروکار خواهیم داشت، یک سیستم کوانتومی می تواند تنها از یک یا چند اتم یا یون تشکیل شده باشد و برای چنین سیستمی برهم کنش های درون سیستم به همان اندازه مهم هستند که برهم کنش های بین سیستم و محیط.

برای آنکه دینامیک کلی یک سیستم را بررسی کنیم فرض می کنیم که در لحظه صفر سیستم در یک حالت $\rho_A(\cdot)$ و محیط در یک حالت خالص $|e\rangle$ قرار دارد. در آینده در باره میزان اعتبار این فرض ها توضیح خواهیم داد. تحت این شرایط ماتریس چگالی سیستم و محیط در لحظه t برابر خواهد بود با

$$\rho_{AB}(t) = U(t)(\rho_A(\cdot) \otimes |e\rangle\langle e|)U^\dagger(t), \quad (13)$$

که در آن $U(t)$ عملگر تحول سیستم و محیط است. ماتریس چگالی سیستم با محاسبه ردّ جزیی روی محیط بدست می آید. در نتیجه بدست می آوریم

$$\rho_A(t) = \text{tr}_B(\rho_{AB}(t)) = \text{tr}_B(U(t)(\rho_A(\cdot) \otimes |e\rangle\langle e|)U^\dagger(t)) \quad (14)$$

با کمی محاسبه می توان طرف راست را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\rho_A(t) = \sum_m A_\mu \rho_A(\cdot) A_\mu^\dagger, \quad (15)$$

که در آن

$$A_\mu := \langle \mu | U(t) | e \rangle, \quad (16)$$

و $\{|\mu\rangle\}$ یک پایه متعامد یکه برای محیط است. دقت کنید که A_μ ها عملگرهایی هستند که روی سیستم اثر می کنند. به این ترتیب دینامیک عمومی سیستم کوانتومی بدست می آید. عملگرهای A_μ عملگرهای کراوس^۲ خوانده می شوند و تعداد آنها حداکثر برابر با بعد فضای هیلبرت محیط است. از تعریف این عملگرها یعنی رابطه 16 براحتی می توان نشان داد که دارای خاصیت زیر هستند.

$$\sum_\mu A_\mu^\dagger A_\mu = I. \quad (17)$$

تمرین: هدف این تمرین این است که نشان دهیم شرط درهم تنیده نبودن حالت اولیه سیستم و محیط برای استخراج روابط بالا اساسی است. در واقع اگر سیستم و محیط در لحظه $t=0$ درهم تنیده باشند نمی توان حالت سیستم را در لحظه t به عنوان تابعی از حالت سیستم در لحظه صفر نوشت. برای فهم این مطلب حالت اولیه سیستم و محیط را یک بار به صورت

$$|\Psi_{SE}^+(\cdot)\rangle = a|\cdot, 1\rangle + b|1, \cdot\rangle \quad (18)$$

و بار دیگر به صورت

^۲Kraus Operators

$$|\Psi_{SE}^-(\cdot)\rangle = a|\cdot, 1\rangle - b|1, \cdot\rangle \quad (19)$$

در نظر بگیرید. عملگر U را به صورت $CNOT$ بگیرید که بیت محیط برایش بیت کنترل است. حالت سیستم را بعد از تحول تحت این عملگریکانی و رد گرفتن روی محیط پیدا کنید و نشان دهید که حالت سیستم تابعی از حالت اولیه سیستم در لحظه صفر نیست.

تمرین: : دو مثال دیگر ارائه دهید و نشان دهید که وقتی حالت اولیه ضربی نیست، ماتریس چگالی در لحظه نهایی تابعی از ماتریس چگالی در لحظه صفر نیست.

۴ کانال بیت - برگردان

در این کانال با احتمال $1-p$ حالت یک کیوبیت تغییر نمی کند و با احتمال p عملگر $X \equiv \sigma_x$ روی آن اثر می کند و بیت را برمی گرداند. یادآوری می کنیم که اثر عملگر پاولی X روی یک کیوبیت چنین است: $X(a|0\rangle + b|1\rangle) = a|1\rangle + b|0\rangle$. بنابراین اثر این کانال با نگاشت زیر تعریف می شود.

$$\mathcal{E}(\rho) = (1-p)\rho + pX\rho X \quad (20)$$

عملگرهای کراوس عبارتند از:

$$M_0 := \sqrt{1-p}I, \quad M_1 := \sqrt{p}X. \quad (21)$$

براحتی معلوم می شود که این کانال یک حالت که با بردار $\mathbf{r} = (x, y, z)$ در کره بلوخ مشخص می شود را به حالتی دیگر با بردار $\mathbf{r}'$ می نگارد. یعنی

$$\mathcal{E} : (x, y, z) \longrightarrow (x, (1-2p)y, (1-2p)z). \quad (22)$$

بنابراین کانال بیت برگردان کره بلوخ را در امتداد صفحه عمود بر محور x به طور یکسان فشرده می کند. هرگاه $p = \frac{1}{4}$ باشد، کره بلوخ کاملاً تبدیل به یک پاره خط در امتداد محور x می شود و تمامی اطلاعات در جهات دیگر از بین می رود.

۵ کانال فاز - برگردان

در این کانال بجای خطای برگرداندن بیت، خطای تغییر فاز رخ می دهد به این معنا که با احتمال p عملگر $Z \equiv \sigma_z$ روی کیوبیت اثر می کند. در نتیجه اثر کانال با نگاشت زیر تعریف می شود:

$$\mathcal{E}(\rho) = (1-p)\rho + pZ\rho Z \quad (23)$$

عملگرهای کراوس عبارتند از:

$$M_0 := \sqrt{1-p}I, \quad M_1 := \sqrt{p}Z. \quad (24)$$

$$\mathcal{E} : (x, y, z) \longrightarrow ((1-p)x, (1-p)y, z). \quad (25)$$

۶ کانال واقطبش

در این کانال با احتمال $1-p$ حالت اولیه سالم به مقصد می رسد و با احتمال p تمام اطلاعات آن از بین می رود و به یک حالت کاملاً مخلوط تبدیل می شود. بنابراین اثر کانال به صورت زیر است:

$$\mathcal{E}(\rho) = (1-p)\rho + p\frac{I}{4} \quad (26)$$

این کانال به صورت زیر روی کره بلوخ اثر می کند:

$$\mathcal{E} : \mathbf{r} \longrightarrow (1-p)\mathbf{r}. \quad (27)$$

یعنی کانال واقطبش کره بلوخ را به صورت همسانگرد منقبض می کند. برای پیدا کردن عملگرهای کراوس از اتحاد زیر که خواننده خود می تواند براحتی آن را ثابت کند، استفاده می کنیم:

$$\rho + X\rho X + Y\rho Y + Z\rho Z = 2I \quad \forall \rho \quad (28)$$

باجایگذاری این رابطه در 26 به رابطه زیر می رسیم:

$$\mathcal{E}(\rho) = \frac{1-3p}{4}\rho + \frac{p}{4}X\rho X + \frac{p}{4}Y\rho Y + \frac{p}{4}Z\rho Z. \quad (29)$$

بنابراین عملگرهای کراوس عبارتند از:

$$M_0 := \sqrt{\frac{1-3p}{4}}I, \quad M_1 := \sqrt{\frac{p}{4}}X, \quad M_2 := \sqrt{\frac{p}{4}}Y, \quad M_3 := \sqrt{\frac{p}{4}}Z. \quad (30)$$

بنابراین در کانال واقطبش هر سه خطای X, Y, Z با احتمال یکسان عمل می کنند. سه کانال گفته شده در بالا حالت های خاصی از کانال پاوولی هستند که در آن خطاهای گفته شده می توانند با احتمالات متفاوت رخ دهند.

۷ کانال میراکننده دامنه

فرض کنید که می خواهیم فوتون هایی تک رنگ را از یک نقطه به یک نقطه دیگر از طریق یک فیبر نوری یا هوا بفرستیم. حالت ورودی یا حالت سیستم برابر است با:

$$|\psi_A\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n |n\rangle. \quad (31)$$

دراین رابطه $|n\rangle$ نشان دهنده حالتی است که دقیقاً دارای n فوتون و $|0\rangle$ نشان دهنده خلأ است. دربین راه ممکن است این فوتون ها جذب محیط شده و از سیستم خارج شوند. کانال میراکننده دامنه کانالی است که چنین تحولی را نشان می دهد. برای سادگی حالت سیستم و محیط را در ابتدا به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$|\psi\rangle_A = a|0\rangle + b|1\rangle, \quad |\psi\rangle_B = |0\rangle. \quad (32)$$

بنابراین حالت سیستم بعلاوه محیط برابر خواهد بود با:

$$|\psi\rangle_{A,B} = a|0, 0\rangle + b|1, 0\rangle. \quad (33)$$

حال فرض کنید که عملگریکائی زیر روی سیستم و محیط اثر کند:

$$\begin{aligned} |0, 0\rangle &\longrightarrow |0, 0\rangle \\ |0, 1\rangle &\longrightarrow \cos\theta |0, 1\rangle - \sin\theta |1, 0\rangle \\ |1, 0\rangle &\longrightarrow \sin\theta |0, 1\rangle + \cos\theta |1, 0\rangle \\ |1, 1\rangle &\longrightarrow |1, 1\rangle \end{aligned} \quad (34)$$

در نتیجه ی اثر این عملگر حالت نهایی سیستم و محیط عبارت خواهد بود از:

$$|\psi'\rangle_{A,B} = a|0, 0\rangle + b \sin\theta |0, 1\rangle + b \cos\theta |1, 0\rangle. \quad (35)$$

دقت کنید که شکل صریح حالت اولیه عبارت است از:

$$\rho_A = \begin{pmatrix} a\bar{a} & a\bar{b} \\ b\bar{a} & b\bar{b} \end{pmatrix} \quad (36)$$

و شکل صریح حالت نهایی برابر است با:

$$\rho'_s = \text{tr}_e(|\psi'\rangle_{s,e}\langle\psi'|) = \begin{pmatrix} a\bar{a} + b\bar{b}\sin^2\theta & a\bar{b}\cos\theta \\ b\bar{a}\cos\theta & b\bar{b}\cos^2\theta \end{pmatrix} \quad (37)$$

با مقایسه این دو ماتریس و کمی محاسبه می توان عملگرهای کراوس برای این کانال را بدست آورد.

$$E_{\cdot} = \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & \cos \theta \end{pmatrix} \quad E_{\backslash} = \begin{pmatrix} \cdot & \sin \theta \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad (38)$$

از آنجا که در این کانال فوتون های سیستم جذب محیط می شوند و شدت نور ورودی کاهش می یابد به آن نام کانال میراکننده دامنه داده شده است.

۱.۷ کانال میراکننده دامنه در دمای غیر صفر

در مثال قبلی فرض کردیم که محیط در دمای صفر باشد و به همین دلیل هیچ فوتونی نداشته باشد. هرگاه محیط در دمای غیر صفر باشد حالت آن مخلوطی از حالت های $|0\rangle\langle 0|$ و $|1\rangle\langle 1|$ است که نسبت این دو حالت را در مخلوط، دما تعیین می کند. بنابراین فرض کنید که حالت اولیه محیط برابر باشد با:

$$\rho_e = (1-p)|0\rangle\langle 0| + p|1\rangle\langle 1|. \quad (39)$$

در این صورت براحتی می توان نشان داد که تحت تاثیر همان عملگریکانی مثال قبل ماتریس چگالی سیستم دچار تحول زیر می شود:

$$\rho = E_{\cdot} \rho E_{\cdot}^{\dagger} + E_{\backslash} \rho E_{\backslash}^{\dagger} + E_{\nabla} \rho E_{\nabla}^{\dagger} + E_{\nabla} \rho E_{\nabla}^{\dagger}. \quad (40)$$

که در آن عملگرهای کراوس عبارتند از:

$$\begin{aligned} E_{\cdot} &= \sqrt{1-p} \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & \cos \theta \end{pmatrix} & E_{\backslash} &= \sqrt{1-p} \begin{pmatrix} \cdot & \sin \theta \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \\ E_{\nabla} &= \sqrt{p} \begin{pmatrix} \cos \theta & \cdot \\ \cdot & 1 \end{pmatrix} & E_{\nabla} &= \sqrt{p} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \sin \theta & \cdot \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (41)$$

به این کانال، گاهی اوقات کانال تعمیم یافته میراکننده دامنه *Generalized Amplitude Damping Channel* نیز می گویند.

۸ کانال میراکننده فاز

حالت $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ را در نظر بگیرید. این حالت ترکیب خطی دو حالت پایه $|0\rangle$ و $|1\rangle$ بایک فاز نسبی مشخص است. باورود به این کانال فاز نسبی این دو حالت بتدریج از بین می رود و حالت خروجی یک حالت مخلوط است. برای مدل سازی چنین کانالی فرض می کنیم که عملگری مثل $R_z(\theta)$ که روی حالت های ورودی $|0\rangle$ و $|1\rangle$ اختلاف فاز θ ایجاد می کند به طور نامنظم و بایک تابع توزیع گاوسی روی حالت اثر کند. در نتیجه عمل این کانال به شرح زیر است:

$$\mathcal{E}(\rho) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int R_z(\theta) |\psi\rangle\langle\psi| R_z^\dagger(\theta) e^{-\frac{\theta^2}{4\lambda}} d\theta. \quad (42)$$

ماتریس چگالی حالت ورودی که یک ماتریس چگالی خالص است به شکل زیر است:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} a\bar{a} & a\bar{b} \\ b\bar{a} & b\bar{b} \end{pmatrix} \quad (43)$$

داریم

$$R_z(\theta) \rho R_z^\dagger(\theta) = \begin{pmatrix} a\bar{a} & a\bar{b}e^{i\theta} \\ b\bar{a}e^{-i\theta} & b\bar{b} \end{pmatrix} \quad (44)$$

بامحاسبه انتگرال بدست می آوریم

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\rho) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} a\bar{a} & a\bar{b}e^{i\theta} \\ b\bar{a}e^{-i\theta} & b\bar{b} \end{pmatrix} e^{-\frac{\theta^2}{4\lambda}} d\theta \\ &= \begin{pmatrix} a\bar{a} & a\bar{b}e^{-\lambda} \\ b\bar{a}e^{-\lambda} & b\bar{b} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (45)$$

که نشان می دهد جملات غیرقطری ماتریس چگالی با پارامتر $e^{-\lambda}$ دچار میرایی می شوند.

۹ کلی ترین ابر عملگری که بر یک کیوبیت اثر می کند.

در بخش های قبلی مثالهایی از کانال های کوانتومی را مطالعه کردیم. این کانال ها به یک چند تا پارامتر بستگی داشتند که در واقع احتمال خطاهای انجام شده بر روی کیوبیت را مشخص می کردند. در این بخش می خواهیم ببینیم کلی ترین کانالی

که روی یک کیوبیت اثر می کند چگونه مشخص می شود. با چه تعداد پارامتر می توان یک کانال کوانتومی تک کیوبیتی را مشخص کرد. این ابر عملگر روی کره بلوخ چه عملی انجام می دهد. برای درک این موضوع دقت می کنیم که یک حالت کلی برای یک کیوبیت با بردارش در کره بلوخ مشخص می شود یعنی:

$$\rho = \frac{1}{4}(I + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \quad (46)$$

وقتی که کانال کوانتومی $\mathcal{E}$ روی این حالت اثر می کند آن را به بردار دیگری در کره بلوخ می نگارد که به ترتیب زیر نوشته می شود.

$$\mathcal{E}(\rho) = \frac{1}{4}(I + \mathbf{r}' \cdot \boldsymbol{\sigma}) \quad (47)$$

بنابراین کاریک کانال کوانتومی این است که بردار $\mathbf{r}$ را به بردار $\mathbf{r}'$ بنگارد. یعنی $\mathbf{r}' = T\mathbf{r}$. اما این نگاشت محدودیت های مهمی دارد و یک نگاشت دلخواه نیست. مهمترین محدودیت آن از این جا ناشی می شود که کانال کوانتومی دارای خاصیت تحذب خطی است. به این معنا که

$$\mathcal{E}(\lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2) = \lambda\mathcal{E}(\rho_1) + (1-\lambda)\mathcal{E}(\rho_2), \quad (48)$$

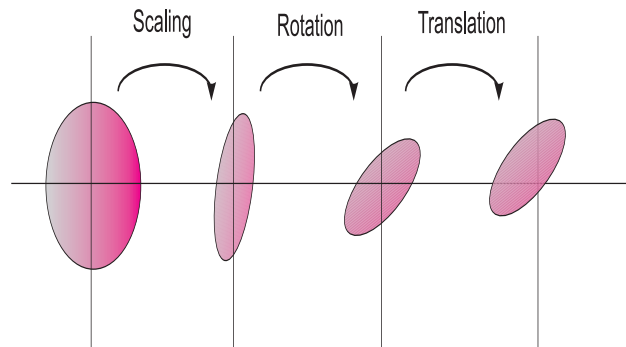
از این رابطه نتیجه می گیریم که نگاشتی نیز که روی بردارهای کره بلوخ اعمال می شود می بایست دارای همین خاصیت باشد، به این معنا که

$$T(\lambda\mathbf{r}_1 + (1-\lambda)\mathbf{r}_2) = \lambda T(\mathbf{r}_1) + (1-\lambda)T(\mathbf{r}_2), \quad (49)$$

برای برآورده کردن شرط بالا نگاشت T می بایست به صورت زیر باشد که اصطلاحاً به آن یک تبدیل آفین *AffineTransformation* می گوئیم:

$$T(\mathbf{r}) = \Lambda\mathbf{r} + \mathbf{t} \quad (50)$$

می توان ماتریس Λ را تجزیه مقدار منفرد کرد و به صورت $\Lambda = S\Lambda_D T$ نوشت که در آن S و T دو ماتریس متعامد و Λ_D یک ماتریس قطری است. می توان نشان داد که شرط مثبت بودن نگاشت آن است که مقادیر منفرد Λ یعنی مقادیر روی قطر ماتریس Λ_D می بایست اندازه شان از ۱ کوچکتر یا مساوی با آن باشد. بنابراین با استفاده از این اطلاعات می توانیم بفهمیم که تبدیل آفین بالا روی کره بلوخ چه عملی انجام می دهد. این تبدیل روی کره بلوخ یک دوران انجام می دهد (ناشی از T) و سپس کره بلوخ را در سه جهت متعامد به اندازه های گوناگون منقبض می کند (ناشی از Λ_D) و بعد باز هم یک دوران دیگر روی کره بلوخ (ناشی از S) انجام می دهد. سرانجام هم شکل به دست آمده را به اندازه $\mathbf{t}$ جابجا می کند. برای آنکه نتیجه



شکل ۲: (کلی ترین عملی که یک نگاشت مثبت روی کره بلوخ انجام می دهد.

نهایی بازهم نشان دهنده ماتریس های چگالی باشد می بایست شکل نهایی بدست آمده از داخل کره بلوخ بیرون نرود. تمام این ها به ما می گوید که مثبت بودن نگاشت یا کانال محدودیت های شدیدی روی ماتریس Λ و بردار t اعمال می کند. برای آنکه با کلی ترین کانال تک کیوبیتی آشنا شویم تجزیه کراوس کانال را در نظر می گیریم:

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_{\mu} A_{\mu} \rho A_{\mu}^{\dagger}, \quad (51)$$

برای آنکه اثر کانال را روی یک ماتریس چگالی دلخواه پیدا کنیم کافی است که اثر آن را روی ماتریس واحد و ماتریس های پاولی پیدا کنیم. داریم:

$$\mathcal{E}(I) = \sum_{\mu} A_{\mu} A_{\mu}^{\dagger}, \quad (52)$$

و

$$\mathcal{E}(\sigma_i) = \sum_{\mu} A_{\mu} \sigma_i A_{\mu}^{\dagger}, \quad (53)$$

ولی ماتریس $\mathcal{E}(\sigma_i)$ را می توان بر حسب ماتریس های پاولی بسط داد. بنابراین می توانیم بنویسیم

$$\mathcal{E}(\sigma_i) = \Lambda_{ji} \sigma_j \quad (54)$$

دقت کنید که در سمت راست تساوی بالا عملگر واحد وجود ندارد زیرا کانال $\mathcal{E}$ رد را نگاه می دارد و رد ماتریس های پاولی صفر است. هم چنین می توانیم بنویسیم

$$\mathcal{E}(I) = I + t_i \sigma_i \quad (55)$$

در طرف راست این تساوی می بایست ماتریس واحد با ضریب یک وارد شود تا رد دو طرف باهم برابر باشد. بازهم از این خاصیت استفاده کرده ایم که کانال $\mathcal{E}$ رد نگه دار است. با استفاده از خواص بهنجار بودن ماتریس های پاوولی یعنی $tr(\sigma_i \sigma_j) = 2\delta_{ij}$ خواهیم داشت:

$$\Lambda_{ji} = \frac{1}{4} tr(\sigma_j \mathcal{E}(\sigma_i)), \quad t_i = \frac{1}{4} tr(\sigma_i \mathcal{E}(I)) \quad (56)$$

برای آنکه ارتباط این مطالب را با تجزیه مقدار منفرد ماتریس Λ که در ابتدا به آن اشاره کردیم پیدا کنیم دقت می کنیم که اگر $\mathcal{E}$ یک کانال کوانتومی یعنی یک نگاشت کاملاً مثبت رد نگه دار باشد آنگاه نگاشت $\mathcal{E}_c := \mathcal{U} \circ \mathcal{E} \circ \mathcal{V}$ نیز یک کانال کوانتومی است. در این رابطه $\mathcal{U}$ و $\mathcal{V}$ نگاشت های یکانی هستند. به این معنا که $\mathcal{U}(\rho) = U \rho U^\dagger$ که در آن U یک ماتریس یکانی است. مشابه همین تعریف برای $\mathcal{V}$ برقرار است. در واقع معنای رابطه بالا این است که

$$\mathcal{E}_c(\rho) = U \mathcal{E}(V \rho V^\dagger) U^\dagger, \quad (57)$$

کمی محاسبه نشان می دهد که رابطه ماتریس های تبدیلات بین دو نگاشت به صورت زیر است:

$$(\Lambda_c)_{ji} = \frac{1}{4} tr(U^\dagger \sigma_j U \mathcal{E}(V \sigma_i V^\dagger)) \quad (58)$$

اما می دانیم که تبدیلات یکانی روی ماتریس های پاوولی یک دوران ایجاد می کنند به این معنا که :

$$V \sigma_i V^\dagger = T_{il} \sigma_l, \quad U^\dagger \sigma_j U = S_{kj} \sigma_k. \quad (59)$$

با ترکیب روابط بالا بدست می آوریم

$$(\Lambda_c)_{ji} = S_{kj} \Lambda_{kl} T_{il} = S^{-1}_{jk} \Lambda_{kl} T^{-1}_{li} \quad (60)$$

که به این معناست که $\Lambda = S \Lambda_c T$ که همان رابطه ای است که قبلاً با تجزیه مقدار منفرد Λ بدست آورده بودیم. در ادامه این درس بازهم به این موضوع باز خواهیم گشت.

۱۰ رد و رد جزئی

در این بخش نشان می دهیم که محاسبه ی رد و رد جزئی نیز به عنوان ابرعملگرهای کوانتومی قابل درک هستند. رد یک ماتریس حالت را به صورت زیر حساب می کنیم که در آن عدد $tr(\rho)$ را با عملگر $|\cdot\rangle\langle\cdot|$ در یک فضای یک بعدی یکی گرفته ایم:

$$tr(\rho) \equiv |\cdot\rangle\langle\cdot| tr(\rho) = \sum_{i=1}^N \langle i|\rho|i\rangle \equiv \sum_{i=1}^N |\cdot\rangle\langle i|\rho|i\rangle\langle\cdot| = \sum_{i=1}^N E_i \rho E_i^\dagger, \quad (61)$$

که نشان می دهد عملگرهای کراوس برای رد جزئی عبارتند از:

$$E_i := |\cdot\rangle\langle i|, \quad E_i^\dagger = |i\rangle\langle\cdot|. \quad (62)$$

هم چنین می توان رد جزئی یک عملگر را نیز به صورت یک ابرعملگر کوانتومی در نظر گرفت: داریم

$$tr_A(\rho) = \sum_{\mu=1}^N I_A \otimes \langle\mu|\rho|I_A \otimes |\mu\rangle \equiv \sum_{\mu=1}^N I_A \otimes |\cdot\rangle\langle\mu|\rho|I_A \otimes |\mu\rangle\langle\cdot|, \quad (63)$$

که نشان می دهد عملگرهای کراوس برای رد جزئی عبارتند از:

$$E_\mu = I \otimes |\cdot\rangle\langle\mu|, \quad E_\mu^\dagger = I \otimes |\mu\rangle\langle\cdot|. \quad (64)$$

۱۱ نگاشت های کاملاً مثبت

فرض کنید که $\mathcal{E} : L(V) \rightarrow L(V)$ نگاشتی مثبت از فضای عملگرهای روی V به عملگرهای روی همان فضا باشد. در این جا منظور از $L(V)$ فضای عملگرهای از V به V است. در این صورت این نگاشت را کاملاً مثبت *Completely Positive* می گوئیم اگر به ازای هر فضای W نگاشت زیر نیز مثبت باشد:

$$\mathcal{E} \otimes I : L(V \otimes W) \rightarrow L(V \otimes W). \quad (65)$$

نخست بهتراست مثالی از یک نگاشت مثبت ولی نه کاملاً مثبت ارائه دهیم تا معلوم شود که همه نگاشت های مثبت کاملاً مثبت نیستند. این مثال چیزی نیست جز عملگری که یک ماتریس را به ترانهاده آن می نگارد.

مثالی از یک عملگر مثبت که کاملاً مثبت نیست. نگاشت ترانهاده را در نظر بگیرید که به صورت زیر عمل می کند:

$$\mathcal{E} : \rho \rightarrow \rho^T \quad (66)$$

حال گسترش این نگاشت به طریقی که در شرط 65 آمده است به صورت زیر خواهد بود که در آن یک از این حقیقت استفاده

کرده ایم که یک ماتریس دلخواه ρ را همواره می توان به صورت $\rho = \sum_i a_i \otimes b_i$ تجزیه کرد:

$$(\mathcal{E} \otimes I)(\rho) = (\mathcal{E} \otimes I)\left(\sum_i a_i \otimes b_i\right) = \sum_i a_i^T \otimes b_i = \rho^{TA}. \quad (67)$$

این عملگر در واقع عناصر اول را در ضرب تانسوری ترانهاد می کند و عناصر دوم را دست نخورده باقی می گذارد. به همین دلیل آن را با نماد $\rho \rightarrow \rho^{TA}$ نمایش می دهیم. تعریف مشابهی برای $\rho \rightarrow \rho^{TB}$ وجود دارد. (دراین جا فرض کرده ایم که فضای برداری V و W به ترتیب فضاهای برداری سیستم های A و B هستند.) اثر ترانهاد جزئی به شکل صریح عبارت است از:

$$(\rho^{TA})_{i\mu,j\nu} = (\rho)_{j\mu,i\nu}, \quad (\rho^{TB})_{i\mu,j\nu} = (\rho)_{i\nu,j\mu}. \quad (68)$$

به عنوان مثال صریح تراگر ρ به شکل ماتریس زیر باشد:

$$\rho = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} \quad (69)$$

آنگاه ماتریس های ρ^{TA} و ρ^{TB} به ترتیب عبارتند از:

$$\rho^{TA} = \begin{pmatrix} a & b & i & j \\ e & f & m & n \\ c & d & k & l \\ g & h & o & p \end{pmatrix}, \quad (70)$$

و

$$\rho^{TB} = \begin{pmatrix} a & e & c & g \\ b & f & d & h \\ i & m & k & o \\ j & n & l & p \end{pmatrix}. \quad (71)$$

حال دقت می کنیم که نگاشت ترانهاد واقعا یک نگاشت خطی و مثبت است زیرا ویژه مقادیر یک ماتریس را تغییر نمی دهد. اما توسعه این عملگر و تعریف ترانهاد جزئی یک عملگر مثبت نخواهد بود. برای مثال ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & x & y & \\ & y & x & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad (72)$$

ویژه مقادیر این ماتریس عبارتند از $1, 1, x+y, x-y$ که هرگاه $x > y > 0$ باشد همگی مثبت خواهند بود. اما اگر ترانهاده جزئی این ماتریس را حساب کنیم بدست می آوریم:

$$\rho^{TA} = \begin{pmatrix} 1 & & y \\ & x & \\ & & x \\ y & & & 1 \end{pmatrix} \quad (73)$$

که ویژه مقادیرش عبارتند از $1-y, 1+y, x, x$ که اگر $y > 1$ باشد می تواند مقدار منفی داشته باشد. با این مثال نشان داده ایم که نگاشت ترانهاده یک نگاشت خطی مثبت است ولی کاملاً مثبت نیست.

در این جا با یک سوال مهم مواجه می شویم و آن اینکه آیا نگاشتی که تحول یک ماتریس چگالی را بیان می کند تنها می بایست یک نگاشت خطی و مثبت باشد یا اینکه می بایست یک نگاشت خطی و کاملاً مثبت باشد؟ پاسخ این سوال این است که دینامیک یک ماتریس چگالی حتماً می بایست توسط یک نگاشت کاملاً مثبت بیان شود، زیرا سیستم A می تواند جزئی از یک سیستم بزرگ تر AB باشد و آلیس می تواند فقط روی این سیستم عمل کند (اندازه گیری یا تحول) و این عمل همچنان می بایست ماتریس چگالی سیستم بزرگ یعنی ρ_{AB} را به یک ماتریس چگالی تبدیل کند. بنابراین نگاشت $\mathcal{E}_A \otimes I_B$ می بایست همچنان مثبت باشد.

۱۲ یکسانی چوی-یاومیولکوسکی

فضای هیلبرت H را در نظر بگیرید. این فضا n بعد دارد. ماتریس های چگالی زیر فضایی هستند از مجموعه ماتریس های $n \times n$. این زیر فضا را با $D(H)$ نشان می دهیم. یک کانال کوانتومی یک نگاشت است از $D(H)$ به $D(H)$. حال می خواهیم به هر کانال کوانتومی یک ماتریس $n^2 \times n^2$ بعدی نسبت دهیم. این ماتریس به شکل زیر تعریف می شود:

$$R_{\mathcal{E}} := (\mathcal{E} \otimes I)|\phi\rangle\langle\phi|, \quad (74)$$

که در آن $|\phi\rangle$ حالت زیر است:

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_i |i, \hat{i}\rangle, \quad (75)$$

در رابطه بالا $\{|i\rangle\}$ و $\{|\hat{i}\rangle\}$ پایه های متعامد برای فضای اول و فضای دوم تشکیل می دهند. به این ترتیب شکل صریح $R_{\mathcal{E}}$ عبارت خواهد بود از:

$$R_{\mathcal{E}} := \frac{1}{d} \sum_{i,j} \mathcal{E}(|i\rangle\langle j|) \otimes |\hat{i}\rangle\langle\hat{j}|, \quad (76)$$

هم چنین از رابطه ۷۴ می توان دریافت که:

$$\mathcal{E}(|i\rangle\langle j|) = d\langle\hat{i}|R_{\mathcal{E}}|\hat{j}\rangle, \quad (77)$$

و در نتیجه برای هر حالت دلخواه مثل $|\psi\rangle = \sum_i \psi_i |i\rangle$ خواهیم داشت

$$\mathcal{E}(|\psi\rangle\langle\psi|) = d\langle\psi^*|R_{\mathcal{E}}|\psi^*\rangle, \quad (78)$$

که در آن $|\psi^*\rangle = \sum_i \psi_i^* |\hat{i}\rangle$ و در نتیجه $\langle\psi^*| = \sum_i \psi_i \langle\hat{i}|$.

قضیه: خواننده ب راحتی می تواند نشان دهد که خواص زیر برقرارند:

الف:

$$R_{\lambda\mathcal{E}_1 + (1-\lambda)\mathcal{E}_2} = \lambda R_{\mathcal{E}_1} + (1-\lambda)R_{\mathcal{E}_2}. \quad (79)$$

ب: اگر کانال $\mathcal{E}$ رد نگاه دار باشد آنگاه $R_{\mathcal{E}}$ به عنوان یک ماتریس دارای رد مساوی یک است.

ب: اگر $\mathcal{E}(X^\dagger) = (\mathcal{E}(X))^\dagger$ آنگاه ماتریس $R_{\mathcal{E}}$ هرمیتی است.

ت: اگر نگاشت $\mathcal{E}$ کاملاً مثبت باشد آنگاه ماتریس $R_{\mathcal{E}}$ یک ماتریس مثبت است.

د: نگاشت $R_{\mathcal{E}} \rightarrow \mathcal{E}$ یک نگاشت یک به یک است.

نکته مهمی که شاید خواننده نتواند آن را ب راحتی ثابت کند آن است که هر ماتریس مثبت $n^2 \times n^2$ که دارای رد برابر با یک باشد به ترتیب بالا متناظر با یک نگاشت کاملاً مثبت است. این رابطه یک به یک یکسانی چوی-یامبولکوفسکی *Choi – Jamiołkowski Isomorphisms* نامیده می شود. به عبارت دیگر قضیه بالا نشان می دهد که هرگاه $\mathcal{E}$ یک کانال کوانتومی یعنی یک نگاشت کاملاً مثبت رد نگه دار باشد آنگاه $R_{\mathcal{E}}$ یک ماتریس چگالی است.

۱.۱۲ قضیه کراوس

دیدیم که هم فرایندهای اندازه گیری و هم دینامیک عمومی یک سیستم را می توان بانگاشتی به صورت زیر نشان داد:

$$\rho \longrightarrow \mathcal{E}(\rho) = \sum_m E_m \rho E_m^\dagger, \quad (۸۰)$$

که در آن شرط $\sum_\mu E_\mu^\dagger E_\mu = I$ برقرار است. این نگاشت دارای این خاصیت هاست که خطی است، ردّ را نگاه می دارد، و ماتریس هرمیتی مثبت را به ماتریس هرمیتی مثبت می نگارد. می توانیم این سوال را به صورت وارونه نیز بپرسیم. به این معنا که اگر نگاشتی مثل-

$$\rho \longrightarrow \rho' = \mathcal{E}(\rho) \quad (۸۱)$$

داشته باشیم که ماتریس های چگالی را به ماتریس های چگالی می نگارد و کاملاً مثبت هم باشد و دارای خواص بالا باشد، آیا حتماً این نگاشت به صورت 80 است یا خیر؟ پاسخ این سوال مثبت است و محتوی قضیه کراوس را تشکیل می دهد. برای اثبات این قضیه کافی است از یکسانی چوی-یامپولکوفسکی استفاده کنیم. می دانیم متناظر با کانال $\mathcal{E}$ یک ماتریس چگالی $R_{\mathcal{E}}$ وجود دارد. این ماتریس چگالی یک تجزیه آنزاملی دارد به این معنا که می توان نوشت:

$$R_{\mathcal{E}} = \sum_\mu |\alpha_\mu\rangle\langle\alpha_\mu|. \quad (۸۲)$$

که در آن $|\alpha_\mu\rangle$ ها حالت های دلخواه (نه لزوماً متعامد و یکه) هستند. حال با ترکیب روابط ۷۸ و ۸۲ می توانیم بنویسیم

$$\mathcal{E}(|\psi\rangle\langle\psi|) = \sum_\mu \langle\psi^*|\alpha_\mu\rangle\langle\alpha_\mu|\psi^*\rangle \quad (۸۳)$$

حال به $\langle\psi^*|\alpha_m\rangle$ نگاه می کنیم. این عبارت یک حالت در فضای اول است. ضمناً این عبارت نسبت به $|\psi\rangle$ خطی است.

بنابراین می توان آن را به صورت زیر نوشت که در آن E_μ یک عملگر خطی است:

$$\langle\psi^*|\alpha_\mu\rangle = E_\mu|\psi\rangle. \quad (۸۴)$$

دقت کنید که ستاره دار بودن ψ^* در طرف چپ بسیار مهم است وگرنه نمی شد طرف راست را به صورت یک عملگر خطی

روی حالت $|\psi\rangle$ نوشت. با ترکیب این رابطه با رابطه قبلی براحتی به نتیجه زیر می رسیم:

$$\mathcal{E}(|\psi\rangle\langle\psi|) = \sum_\mu E_\mu|\psi\rangle\langle\psi|E_\mu^\dagger, \quad (۸۵)$$

و چون هر حالت دلخواهی مثل ρ را می توان به صورت ترکیبی خطی از حالت های $|\psi\rangle\langle\psi|$ نوشت، پس ثابت کرده ایم که

می توان هر عملگر مثبت را به صورت تجزیه کراوس نوشت.

تمرین: نشان دهید که عملگرهای E_μ که به صورت بالا تعریف شده اند در شرط $\sum_\mu E_\mu^\dagger E_\mu = I$ صدق می کنند.

تمرین: : با توجه به اینکه یک ماتریس مثل $R_{\mathcal{E}}$ می تواند تجزیه های آنزاملی متفاوت داشته باشد نشان دهید که یک کانال کوانتومی نیز می تواند تجزیه های کراوس متفاوت داشته باشد. نشان دهید که اگر $\{E_{\mu}\}$ یک تجزیه کراوس و $\{F_{\nu}\}$ یک تجزیه کراوس دیگر باشد، اولاً تعداد عملگرهای کراوس در دو تجزیه می تواند متفاوت باشد، ثانیاً رابطه این عملگرهای کراوس به شکل زیر است:

$$F_{\nu} = \sum_{\mu} \Omega_{\nu,\mu} E_{\mu} \quad (۸۶)$$

که در آن Ω یک ماتریس یکانی و نه لزوماً مربعی است.

تمرین: : با استفاده از این که هر ماتریس چگالی را حتماً می توان تجزیه طیفی کرد نشان دهید که هر کانال کوانتومی را که روی یک فضای هیلبرت n بعدی عمل می کند همواره می توان با تعداد مساوی یا کمتر از n^2 عملگر کراوس نمایش داد.

تمرین: : یک کانال کوانتومی کلی را که با یک تبدیل آفین $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' := \Lambda \mathbf{r} + \mathbf{t}$ مشخص می شود در نظر بگیرید. شکل کانونیک این تبدیل یعنی $\mathcal{E}_c$ را که در آن Λ قطری شده است در نظر بگیرید. می دانیم که اگر $\mathcal{E}_c$ یک کانال کوانتومی باشد آنگاه $\mathcal{E}$ نیز یک کانال است و بالعکس زیرا رابطه این دو نگاشت تبدیلات یکانی هستند. ماتریس $R_{\mathcal{E}_c}$ را بدست آورید. سپس خود را محدود کنید به کانال های یونیتال یعنی کانال هایی که $t = 0$ است. ثابت کنید که نگاشت $\mathcal{E}_c$ وقتی یک کانال کوانتومی است که مقدارهای ویژه Λ_D درون یک چهاروجهی باشند. رؤس این چهاروجهی را بدست آورید.

۱۳ دینامیک ماتریس چگالی در زمان پیوسته

تا کنون به تحول حالت کوانتومی در طول زمان نگاه نکرده ایم. در بخش های گذشته تنها به این اکتفا کردیم که یک تحول کوانتومی بین دو لحظه زمان یا بین دو نقطه از مکان چگونه باید باشد. در واقع به تحول کوانتومی به عنوان یک جعبه سیاه یا *BlackBox* نگاه کردیم که یک حالت ورودی ρ_{in} را به عنوان ورودی می پذیرد و یک حالت خروجی را به صورت ρ_{out} تولید می کند. تمام بحث های گذشته معطوف به این بود که این رابطه بین حالت ورودی و خروجی چگونه رابطه ای است، انواع آن کدام است و بهترین نحوه توصیف این رابطه یا این جعبه سیاه چیست. یاد گرفتیم که یک جعبه سیاه با یک مجموعه از عملگرهای کراوس مشخص می شود و این مجموعه عملگرها یکتا هم نیست ولی مجموعه های متفاوت با هم رابطه روشنی دارند. هم چنین یاد گرفتیم که این جعبه سیاه با یک تبدیل آفین مشخص می شود که در مورد کیوبیت ها می توان این تبدیل آفین را به سادگی تشریح کرد. در این بخش می خواهیم بررسی کنیم که ماتریس چگالی در طول زمان و لحظه به لحظه چگونه تغییر می کند؟ وقتی با یک سیستم بسته سرو کار داریم می دانیم تحول ماتریس چگالی به صورت زیر است:

$$\rho(t) = U(t)\rho(0)U^{\dagger}(t) \quad (۸۷)$$

که در آن عملگریکانی U دارای خاصیت مهم زیر است:

$$U(t_2 + t_1) = U(t_2)U(t_1). \quad (88)$$

این خاصیت اولاً بیان کننده این است که تحول سیستم بسته در طول زمان همگن است به این معنا که تحول سیستم از ساعت ۰ تا ساعت ۱ درست مثل تحول آن از ساعت ۱ تا ۲ است. دلیل این امر هم این است که سیستم بسته است و در طول زمان از ساعت ۱ تا ۲ هیچ چیز تغییر نکرده است و تحول سیستم را می توانیم درست مثل موقعی توصیف کنیم که ساعت ۰ بود و زمان به اندازه ۱ ساعت سپری می شد. هم چنین این رابطه به ما اجازه می دهد که یک مولد برای این تحول پیدا کنیم به این معنا که از رابطه ۸۷ بدست می آوریم:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \left[\frac{dU(t)}{dt} U^{-1}(t), \rho(t) \right] =: [-iH(t), \rho(t)] \quad (89)$$

اما رابطه ۸۸ نشان می دهد که این مولد یعنی $H(t)$ با زمان ثابت است. یک راه برای فهم این مطلب این است که توجه کنیم

$$\frac{dU(t)}{dt} U^{-1}(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{U(t+\delta) - U(t)}{\delta} U^{-1}(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{U(\delta)U(t) - U(t)}{\delta} U^{-1}(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{U(\delta) - I}{\delta} \quad (90)$$

اگر این شرط برقرار شود آنگاه می توان نوشت $U(t) = e^{-iHt}$ و H را مولد تحول زمانی خواند. به این ترتیب می توانیم تحول حالت کوانتومی را در طول زمان تعیین کنیم.

تمرین: اگر $H = B\sigma_z$ که در آن B یک ثابت است، تحول ماتریس چگالی یک کیوبیت را بر حسب زمان حساب کنید.

تمرین: اگر $H = -\alpha I + B\sigma_x$ باشد که در آن α یک ثابت است تحول ماتریس چگالی یک کیوبیت را حساب کنید.

تمرین: با استفاده از معادله ۸۹ نشان دهید که تحت این نوع تحول یک حالت خالص هیچ وقت تبدیل به یک حالت آمیخته نمی شود.

حالا ببینیم وضعیت برای یک سیستم باز چگونه است. برای یک سیستم S که در تماس با محیط E است داریم

$$\rho_s(t) = \text{tr}_E(U(t)(\rho_S(\cdot) \otimes \rho_E(\cdot))(\cdot)U^{-1}(t)) = \mathcal{E}(t)(\rho_s(\cdot)), \quad (91)$$

که در آن $U(t)$ تحول کل سیستم و محیط در فاصله زمانی ۰ تا t است. در این جا فرض کرده ایم که سیستم بعلاوه محیط را می توان بسته در نظر گرفت، فرضی که با بزرگ گرفتن محیط به اندازه کافی می تواند صحیح باشد. حال دقت می کنیم که اگر چه برای این عملگریکانی $U(t)$ رابطه ۸۸ صحیح است، بدلیل ردی که روی محیط گرفته ایم همگنی زمان به هم خورده است. به این معنا که

$$\mathcal{E}(t_2 + t_1) \neq \mathcal{E}(t_2)\mathcal{E}(t_1). \quad (92)$$

در واقع معمولاً انتظار نداریم که این رابطه برای تحول سیستم های باز برقرار باشد. به عبارت دیگر نمی توان گفت که یک کانال کوانتومی همواره به کانال های کوچکتر تقسیم پذیر است.

تمرین: یک کانال کوانتومی به صورت

$$\mathcal{E}(t)(\rho) = \sum_{\mu} A_{\mu}(t)\rho(\cdot)A_{\mu}^{\dagger}(t) \quad (93)$$

در نظر بگیرید. نشان دهید که $\mathcal{E}(t_2) \circ \mathcal{E}(t_1)$ اگر چه به صورت تجزیه کراوس قابل نوشتن است اما عملگرهای کراوس آن لزوماً به صورت $A_{\mu}(t_2 + t_1)$ نیستند.

تمرین: کانال بیت-برگردان را در نظر بگیرید. فرض کنید که در لحظه $\circ$ به این کانال حالت وارد و در لحظه t از آن خارج می شود و عمل کانال به شکل زیر است:

$$\mathcal{E}(t)(\rho) = (1 - p(t))\rho + p(t)X\rho X. \quad (94)$$

الف- آیا اگر $p(t)$ هر نوع تابعیتی از زمان داشته باشد شرط $\mathcal{E}(t_2 + t_1) = \mathcal{E}(t_2) \circ \mathcal{E}(t_1)$ برقرار است. از این به بعد این شرط را شرط همگنی می نامیم.

ب- $p(t)$ چه نوع تابعیتی از t داشته باشد تا شرط بالا برقرار شود؟

تمرین: تمرین قبلی را برای کانال واقطبش به طور کامل تکرار کنید.

اگر شرط همگنی برقرار باشد، می توانیم آن را برای فواصل زمانی کوچک به کار ببریم به این معنا که بنویسیم:

$$\mathcal{E}(t) = [\mathcal{E}(\frac{t}{N})]^N \quad (95)$$

که در آن توان N به این معناست که یک کانال N بار پشت سر هم عمل کند. از آنجا که برای ϵ های کوچک انتظار داریم که شرط زیر برقرار باشد:

$$\mathcal{E}(\epsilon) \approx I + \epsilon \mathcal{L}, \quad (96)$$

نتیجه می گیریم که اگر شرط همگنی برقرار باشد می توان نوشت

$$\mathcal{E}(t) = e^{t\mathcal{L}}, \quad (97)$$

که در آن $\mathcal{L}$ نگاشتی است که روی ماتریس چگالی عمل می کند. با توجه به رابطه ۹۶ نتیجه می گیریم که نگاشت $\mathcal{L}$ نگاشتی است که هرمیتی بودن را حفظ می کند ولی رد ماتریس را تبدیل به صفر می کند. تحت این شرایط می گوئیم که $\mathcal{L}$

مولد این کانال کوانتومی در طول زمان است.

تمرین: به تمرین های قبلی بازمی گردیم. تحت شرایطی که رابطه همگنی در طول زمان وجود دارد مولد کانال های بیت - برگردان و واقطبش را محاسبه کنید.

چرا یک کانال کوانتومی $\mathcal{E}(t)$ نباید بتواند همواره یک مولد داشته باشد؟ چه چیزی مانع می شود که بتوانیم $\mathcal{E}(t)$ را به صورت $e^{\mathcal{L}t}$ بنویسیم؟ این موضوع را من هنوز به درستی نمی فهمم.

۱.۱۳ معادله مادر MasterEquation

می دانیم که یک کانال کوانتومی با عملگرهای کراوس اش به صورت زیر قابل نمایش است.

$$\rho(t) = \sum_{\mu} A_{\mu}(t) \rho(\cdot) A_{\mu}(t)^{\dagger}, \quad (98)$$

که در آن عملگرهای کراوس برابرند با $A_{\mu}(t) = \langle \mu | U_{SE}(t) | e \rangle$ که در آن $|\mu\rangle$ یک پایه برای محیط و $|e\rangle$ حالت اولیه محیط است. می توانیم همین رابطه را برای تحول ماتریس چگالی از لحظه t تا لحظه $t + dt$ نیز بنویسیم، یعنی

$$\rho(t + dt) = \sum_{\mu} A_{\mu}(t + dt) \rho(\cdot) A_{\mu}(t + dt)^{\dagger}. \quad (99)$$

در این رابطه دوم عملگرهای کراوس برابرند با $A_{\mu}(t + dt) = \langle \mu | U_{SE}(t + dt) | e \rangle$. اما از این دو رابطه نمی توان رابطه ای بین $\rho(t)$ و $\rho(t + dt)$ بدست آورد زیرا این رابطه ها معکوس پذیر نیستند و نمی توان مثلا از رابطه اول $\rho(\cdot)$ را بر حسب $\rho(t)$ بدست آورده و در رابطه دوم قرار داد. بنابراین بدست آوردن تحول لحظه به لحظه یک ماتریس چگالی از تحول زمان محدود (از t تا $t + dt$) کانال ممکن نیست. شاید بتوانیم بجای این کارها رابطه کراوس را طوری بنویسیم که ماتریس چگالی زمان $t + dt$ را مستقیما به ماتریس چگالی زمان t ربط بدهد. ممکن است فکر کنیم که اگر این کار را بکنیم مشکلی که در بالا به آن اشاره کردیم بر طرف شود. مثلا می توانیم بنویسیم:

$$\rho(t + dt) = \sum_{\mu} A_{\mu}(dt) \rho(t) A_{\mu}(dt)^{\dagger}. \quad (100)$$

اما نوشتن این رابطه دو اشکال اساسی دارد. نخست آنکه اگر به استخراج رابطه ماتریس های چگالی در زمان t و زمان $t + dt$ نگاه کنیم متوجه می شویم که آن استخراج مبتنی بر یک فرض اساسی بود و آن اینکه در زمان t حالت سیستم و حالت محیط به صورت ضربی باشد و حال آنکه در طول زمان حالت سیستم و محیط درهم تنیده می شوند و بنابراین نمی توان

فرض کرد که در زمان t این حالت به صورت ضربی است. قضیه دقیق تر این است حالت سیستم و محیط لزوما نمی بایست ضربی باشد بلکه می بایست چنان باشد که هیچ نوع همبستگی کوانتومی یا دیسکورد *Discord* نباید داشته باشد. این در حالی است که در نوشتن رابطه بالا چنین فرضی پنهان شده است. در واقع اگر چه $\rho(t)$ و $\rho(t+dt)$ هر دو تابعی از $\rho(0)$ هستند ولی $\rho(t+dt)$ تابعی از $\rho(t)$ نیست. معنای این حرف این است که با داشتن $\rho(0)$ می توانیم بگوییم $\rho(t)$ چیست ولی با دانستن $\rho(t)$ تنها در صورتی می توانیم بگوییم حالت $\rho(t+dt)$ چیست که مطمئن باشیم حالت سیستم و محیط در لحظه t به صورت ضربی است و حال آنکه چنین نیست. به عبارت دیگر برای تعیین $\rho(t+dt)$ تنها دانستن $\rho(t)$ کافی نیست بلکه می بایست کل حالت سیستم و محیط در آن لحظه داده شود. این موضوع را در یکی از تمرین های ابتدای این درس توضیح داده ایم.

اشکال دوم این است که حتی اگر این رابطه برقرار باشد مطابق با یکی از تمرین هایی که در این فصل داشتیم وقتی که کانال ها را ترکیب می کنیم عملگرهای کراوس آنها به شکل ساده ای ترکیب نمی شوند. به طور مشخص نمی شود فرض کرد که اگر کانال $\rho(0) \rightarrow \rho(t) : \mathcal{E}(t)$ با عملگرهای کراوس $A_\mu(t)$ داده می شود و کانال $\rho(0) \rightarrow \rho(t+dt) : \mathcal{E}(t+dt)$ با عملگرهای کراوس $A_\mu(t+dt)$ داده شود آنگاه کانال $\rho(t) \rightarrow \rho(t+dt) : \mathcal{E}(dt)$ با عملگرهای کراوس $A_\mu(dt)$ داده شود.

برای آنکه پیش برویم و متوقف نشویم فرض می کنیم که حالت سیستم و محیط در طول زمان چنان خواهد بود که شرط اول محقق شود. یعنی $\rho(t+dt)$ از یک کانال بی نهایت کوچک زمانی از حالت $\rho(t)$ بدست آمده باشد. طبیعی است که در این حالت عملگرهای کراوس را نمی توان به شکل $A(dt)$ نوشت. بنابراین می نویسیم:

$$\rho(t+dt) = \sum_{\mu} B_{\mu}(t, dt) \rho(t) B_{\mu}^{\dagger}(t, dt). \quad (101)$$

که در آن

$$\sum_{\mu} B_{\mu}(t, dt)^{\dagger} B_{\mu}(t, dt) = I, \quad (102)$$

اگر قرار باشد که در زمان $dt \rightarrow 0$ ماتریس چگالی هیچ گونه تغییری نکند می بایست همه عملگرهای کراوس در این حد به سمت صفر میل کنند بجز یکی که به سمت عملگر واحد میل می کند. بنابراین قرار می دهیم

$$B_{\mu}(t, dt) = M_{\mu}(t) \sqrt{dt}, \quad \mu \neq 0, \quad (103)$$

و در نتیجه خواهیم داشت

$$B^{\dagger}(t, dt) B(t, dt) = I - \sum_{\mu \neq 0} M_{\mu}(t)^{\dagger} M_{\mu}(t) dt \quad (104)$$

کمی محاسبه نشان می دهد که

$$B_{\cdot} = I - Rdt, \quad B_{\cdot}^{\dagger} = I - R^{\dagger}dt, \quad (105)$$

که در آن

$$R + R^{\dagger} \equiv Q = \sum_{\mu \neq \cdot} M_{\mu}^{\dagger} M_{\mu}, \quad (106)$$

حال قرار می دهیم

$$R = M_{\cdot} + iH, \quad R^{\dagger} = M_{\cdot} - iH, \quad (107)$$

که در آن $M_{\cdot}$ و H ماتریس های هرمیتی هستند. با ترکیب این روابط می توانیم بنویسیم

$$\rho(t+dt) = (I - (M_{\cdot} + iH)dt)\rho(t)(I - (M_{\cdot} - iH)dt) + \sum_{\mu \neq \cdot} M_{\mu}\rho M_{\mu}^{\dagger}dt \quad (108)$$

و یا پس از کمی جابجا کردن جملات

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -i[H, \rho] + \sum_{\mu \neq \cdot} M_{\mu}\rho M_{\mu}^{\dagger} - \frac{1}{4}M_{\mu}^{\dagger}M_{\mu}\rho - \frac{1}{4}\rho M_{\mu}^{\dagger}M_{\mu}. \quad (109)$$

این رابطه جایگزین معادله کانال برای زمان های پیوسته می شود. ولی باید همواره به یاد داشته باشیم که در استخراج این رابطه فرض های خیلی زیادی پنهان شده است که ممکن است در شرایط واقعی یکی یا بیشتر از این شرط ها برقرار نباشند. بنابراین این رابطه تنها می تواند در بعضی شرایط رفتار صحیح یک سیستم کوانتومی را بدست بدهد.

۱۴ تمرین های بیشتر

۲ - در بعد دلخواه d کانال واقتبش به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathcal{E}(\rho) = p\rho + (1-p)\frac{I}{d} \quad (110)$$

الف: فرض کنید که یک خالص $|\psi\rangle$ را به این کانال وارد می کنیم. ویژه حالت های ماتریس چگالی خروجی را پیدا کنید.

ب: ماتریس های تعمیم یافته پاوولی را به شکل زیر تعریف کنید

$$X = \sum_{j=1}^d |j+1\rangle\langle j|, \quad Z = \sum_{j=1}^d \omega^j |j\rangle\langle j|, \quad (111)$$

که در آن همه جمع ها به سنج d انجام می شود ($d+k \equiv k$) و $\omega^d = 1$. این ماتریس ها تعمیم σ_x و σ_z هستند. نشان دهید که

$$ZX = \omega XZ, \quad (112)$$

نشان دهید که ماتریس های $X^m Z^n$ برای $m, n = 0, \dots, d-1$ یک پایه برای ماتریس های d بعدی تشکیل می دهند.

ج: با استفاده از این ماتریس ها یک نمایش کراوس برای کانال واقتبش بدست آورید.

۳ - H یک فضای برداری n بعدی و $\mathcal{D}(H)$ فضای برداری ماتریس های چگالی روی آن است. چه تعداد پارامتر حقیقی لازم است که یک ابرعملگر $\mathcal{E}: \rho \rightarrow \mathcal{E}(\rho)$ را که در فضای $\mathcal{D}(H)$ اثر می کند، به طور کامل تعیین کند؟ (راهنمایی: برای پاسخ می بایست تعیین کنید که چه تعداد پارامتر لازم است که یک ماتریس هرمیتی را مشخص کند و سپس چه تعداد پارامتر لازم است که یک نگاشت خطی ردّ نگهدار را بین این ماتریس ها تعیین کند.)

۴ - هرگاه حالت اولیه سیستم و محیط به صورت $|\phi\rangle \otimes |e\rangle$ باشد که در آن $|e\rangle$ یک حالت مشخص از محیط باشد، و عملگر یکانی U روی سیستم و محیط اثر کند، می توان عملگرهای کراوس را برای ابرعملگری که تحول سیستم را مشخص می کند، بدست آورد. این کار را در کلاس انجام دادیم.

الف: فرض کنید که حالت اولیه سیستم به صورت $|e\rangle\langle e| \otimes \rho_s$ است. نشان دهید که عملگرهای کراوس بازهم به همان صورت قبلی باقی خواهند ماند.

ب: فرض کنید که حالت اولیه سیستم به صورت $\rho_s \otimes \rho_e$ است. عملگرهای کراوس را با استفاده از تجزیه طیفی ρ_e بدست آورید.

۵ - عملگر زیر روی دو کیوبیت اثر می کند. کیوبیت اول به منزله سیستم و کیوبیت دوم به منزله محیط است:

$$U = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes X, \quad (113)$$

الف: هرگاه که حالت اولیه محیط $|0\rangle$ باشد، عملگرهای کراوس را برای تحول سیستم پیدا کنید.

ب: هرگاه که حالت اولیه محیط یک حالت گرمایی باشد یعنی حالت $\rho_e = \frac{1}{Z}(e^{-\beta E_0}|0\rangle\langle 0| + e^{-\beta E_1}|1\rangle\langle 1|)$ که در آن $Z = e^{-\beta E_0} + e^{-\beta E_1}$ ، عملگرهای کراوس را پیدا کنید.

۶ - عملگر زیر روی دو کیودیت^۳ اثر می کند. کیودیت تعمیمی از کیویت است که فضای برداری مربوطه اش به جای دو بعد، d بعد دارد. کیودیت اول به منزله سیستم و کیودیت دوم به منزله محیط است:

$$U = \sum_{k=0}^{d-1} |k\rangle\langle k| \otimes X^k, \quad (114)$$

که X همان عملگری است که در تمرین ۲ تعریف شد.

الف: هرگاه که حالت اولیه ی محیط $|0\rangle$ باشد، عملگرهای کراوس را برای تحول سیستم پیدا کنید.

ب: هرگاه عملگریکانی به صورت زیر باشد، عملگرهای کراوس را بدست آورید:

$$U = \sum_{k,l=0}^{d-1} |k\rangle\langle l| \otimes Z^k, \quad (115)$$

Z نیز در تمرین ۲ تعریف شده است.

۷ - یک کانال واقطبش برای کیویت ها در نظر بگیرید. نشان دهید که $tr(\rho^k)$ برای تمام k های بزرگتر از ۱، هیچگاه توسط این کانال افزایش نخواهد یافت.

۸ - یک کانال در دست داریم که ماتریس های چگالی $\rho = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & c \end{pmatrix}$ را به ماتریس های زیر تبدیل می کند:

$$\mathcal{E}(\rho) = \begin{pmatrix} 1 - (1 - \gamma)(1 - a) & b\sqrt{1 - \gamma} \\ b^*\sqrt{1 - \gamma} & c(1 - \gamma) \end{pmatrix}. \quad (116)$$

عملگرهای کراوس را برای این کانال بدست آورید. (راهنمایی: در بسیاری از موارد می توان با سعی و خطا عملگرهای کراوس را بدست آورد.)

۹ - یک کانال به شکل زیر تعریف شده است:

$$\rho \longrightarrow \mathcal{E}(\rho) = A_0 \rho A_0^\dagger + A_1 \rho A_1^\dagger, \quad (117)$$

که در آن

$$A_0 = \sqrt{p}X, \quad A_1 = \sqrt{1 - p}Y, \quad (118)$$

^۳Qudit

و X و Y هم ماتریس های پاوولی هستند. فرض کنید که این سیستم در تماس با محیطی بوده است که تنها از یک کیوبیت تشکیل شده است. یک عملگریکانی مثل U بدست آورید که این ابرعملگر ناشی از تحول سیستم و محیط تحت آن عملگر باشد. (راهنمایی: دقت کنید که تنها شرط روی U می بایست این باشد که $A_m = \langle m|U|e \rangle$).

۱۰ - یک کانال با عملگرهای کراوس زیر داده شده است:

$$M_0 = \sqrt{1-p}I, \quad M_1 = \sqrt{p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \sqrt{p} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (119)$$

الف: نشان دهید که این کانال را با دو عملگر کراوس N_1 و N_2 نیز می توان نمایش داد.

ب: با اضافه کردن یک عملگر $N_0 = 0$ ، نشان دهید که M_i ها با N_μ ها توسط یک ماتریس یکانی U مرتبط هستند، یعنی

$$M_i = \sum_{\mu} U_{i\mu} N_{\mu}.$$

۱۱ - فرض کنید که یک کانال بیت - برگردان با پارامتر p ، n بار روی یک کیوبیت اثر کند. نشان دهید که کانال حاصل بازهم یک کانال بیت برگردان است. پارامتر این کانال را برحسب p و n بدست آورید.

۱۲ - تمرین قبلی را برای کانال ، واقطبش حل کنید. آیا می توانید یک کانال واقطبش با پارامتر p را به حاصلضرب دو کانال با پارامترهای p_1 تقسیم کنید؟ آیا می توانید این تقسیم را ادامه دهید؟ آیا می توانید که با بی نهایت بار تقسیم کردن کانال واقطبش به رابطه ای مثل رابطه زیر برسید؟

$$\mathcal{E}(\rho) = e^{\mathcal{L}}(\rho), \quad (120)$$

که در آن $\mathcal{L}$ یک نگاشت است که مولد کانال واقطبش نامیده می شود؟

۱۳ - مثالی از یک کانال ارائه دهید که اگر دو بار روی یک کیوبیت اثر کند، کانال حاصل تبدیل به یک کانال از نوع متفاوت می شود.