

اندازه گیری در مکانیک کوانتومی

وحید کریمی پور- دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

۴ آذر ۱۳۹۱

۱ مقدمه

معمولاً در درس مکانیک کوانتومی گفته می شود که به هر مشاهده پذیر مثل A یک عملگر هرمیتی مثل $\hat{A}$ وابسته است که اندازه گیری روی یک حالت دلخواه با احتمالاتی معین یکی از مقادیر ویژه آن عملگر را بدست خواهد داد و سیستم کوانتومی بعد از اندازه گیری با همان احتمال به ویژه بردار مربوط به آن ویژه مقدار اندازه گیری شده تصویر خواهد شد. در این مقدمه نخست به طور دقیق تر به این نوع اندازه گیری نگاه می کنیم و سپس در طول این درس با اندازه گیری های عمومی تر آشنا خواهیم شد. یک دستگاه اشترن گراخ کارش این است که ذرات را به طور تصادفی و با احتمالاتی که قابل محاسبه و تست کردن است به دو حالت متمایز از هم جدا می کند.

یک پولاروید که جلوی باریکه نور قرار می گیرد نیز همین کار را انجام می دهد و بعضی از فوتون ها را جذب و بعضی دیگر را از خود عبور می دهد. هم چنین است یک آینه نیم شفاف که بعضی از فوتون ها را از خود عبور می دهد و بعضی دیگر را منعکس می کند. یک بلور کالسیت نیز که ضریب شکست آن بستگی به قطبش نور تابیده دارد، فوتون های تابیده شده به آن را بر اساس جهت قطبش عمودی V و یا افقی H آنها جدا می کند، شکل ۱.

از هم جدا می کند. تمام این آزمایش ها خصلت های زیر را به طور مشترک دارا هستند که همگی محصول مستقیم تجربه

هستند.

۱ - نتیجه این آزمایشها همواره تصادفی است و هرگز نمی توان رفتار دو ذره کاملاً یکسان را در این آزمایشها و یا اندازه گیری ها پیش بینی کرد. اما احتمالات تابع قوانین دقیق هستند.

۲ - نمی توان گفت که این آزمایشها یک خاصیت از قبل موجود ذره را «مشاهده» می کنند و می سنجند. تنهایی توان گفت که این آزمایشها یا «اندازه گیری» ها ذرات را به نحوی از هم جدا می کنند. ذراتی که بعد از آمایش جدا می شوند دارای خصلت هایی هستند که ما بنابر یک مدل نظری به آنها نسبت می دهیم. به عنوان مثال ذراتی که از خروجی بالای یک آزمایش اشترن گزلاخ بیرون می آیند در حالت $|z+\rangle$ هستند و ذراتی که از شکاف پایینی بیرون می آیند در حالت $|z-\rangle$ هستند. به هیچ وجه نمی توان گفت که مولفه اسپین این ذرات از قبل دارای این مقادیر بوده است.

۳ - ذرات خارج شده از این دستگاه حالت های کاملاً متمایز دارند به این معنا که می توان براحتی تک تک آنها را با انجام آزمایشی از همان نوع از یکدیگر و به طور قطع تمیز داد.

توجه به این موضوع بسیار مهم است که در موارد سه گانه بالا هیچ اثری از عملگری که به یک مشاهده پذیر نسبت داده می شود وجود ندارد. درواقع این عملگر در اندازه گیری نقش کاملاً فرعی و ثانوی ایفا می کند و برای تعریف اندازه گیری توجه به آن ضرورت ندارد. در باره این موضوع و چگونگی وارد شدن عملگر مربوط به یک مشاهده پذیر در ادامه بحث خواهیم کرد.

بنابراین تعریف دقیق و جامع آن است که یک دستگاه اندازه گیری با مجموعه ای از عملگرهای تصویرگر مثل $\{P_m, m = 1, \dots, K\}$ مشخص می شود. این عملگرهای مصور خاصیت های زیر را دارند:

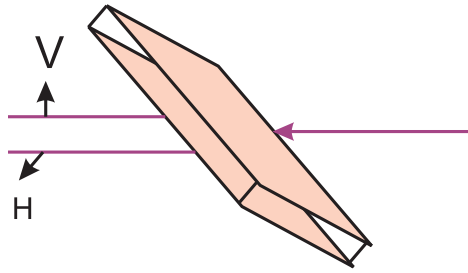
$$P_m P_n = \delta_{mn} P_m, \quad \sum_m P_m = I \quad (1)$$

هر عملگر P_m به یک نتیجه از آزمایش اندازه گیری مثل نتیجه m وابسته است. اندازه گیری روی حالت ρ با احتمال

$$P(m) = \text{tr}(P_m \rho P_m)$$

$$\rho_m = \frac{P_m \rho P_m}{\text{tr}(P_m \rho P_m)}$$

. دقت کنید که حالت های بعد از اندازه گیری برهم عمود هستند یعنی



شکل ۱: یک بلور کالسیت که ضریب شکست آن بستگی به قطبش نور دارد فوتون های تاییده شده به آن را برحسب قطبش افقی یا عمودی آنها جدا می کند.

$$\rho_m \rho_n = 0 \quad m \neq n. \quad (2)$$

به همین دلیل این نوع اندازه گیری ها اندازه گیری تصویری^۱ یا اندازه گیری متعامد^۲ خوانده می شوند. هرگاه نتیجه m را آنچنان تعبیر کنیم که خاصیتی مثل A مقدار a_m را داشته است می توانیم مقدار متوسط این خاصیت را به طریق زیر حساب کنیم:

$$\langle A \rangle_\rho = \sum_m a_m P(m) = \sum_m a_m \text{tr}(P_m \rho P_m) = \sum_m a_m \text{tr}(P_m \rho) = \text{tr}(\hat{A} \rho), \quad (3)$$

که در آن

$$\hat{A} = \sum_m a_m P_m, \quad (4)$$

عملگری هرمیتی است که به خاصیت A نسبت داده ایم. هرگاه تصویرگرهای P_m یک بعدی باشند، احتمالات $P(m)$ به شکل زیر در می آیند:

$$P(m) = \text{tr}(|m\rangle\langle m|\rho) = \langle m|\rho|m\rangle, \quad (5)$$

و حالت بعد از بدست آوردن نتیجه ی m برابر خواهد شد با

$$\rho_m = \frac{P_m \rho P_m}{\text{tr}(P_m \rho P_m)} = \frac{|m\rangle\langle m|\rho|m\rangle\langle m|}{\langle m|\rho|m\rangle} = |m\rangle\langle m|. \quad (6)$$

^۱ Projective Measurement

^۲ Orthogonal Measurement

ضمناً اگر حالت اولیه خالص باشد، یعنی $|\psi\rangle\langle\psi| : \rho$ ، این احتمالات تبدیل خواهند شد به

$$P(m) = \langle m|\psi\rangle\langle\psi|m\rangle = |\langle m|\psi\rangle|^2. \quad (7)$$

عبارات اخیر همان چیزی را بیان می کنند که در درس های مقدماتی مکانیک کوانتومی با آن آشنا شده ایم به این معنا که اندازه گیری مشاهده پذیر A ، حالت $|\psi\rangle$ را به یکی از ویژه حالت های عملگر $\hat{A}$ مثل $|m\rangle$ تصویر می کند و ویژه مقدار a_m از عملگر $\hat{A}$ با احتمال $|\langle m|\psi\rangle|^2$ بدست می آید.

هرگاه بعد از عبور از دستگاه اندازه گیری این حالت ها را از هم جدا نکنیم، حالت خروجی با یک آنزامل مخلوط از حالت ها یعنی با آنزامل زیر داده می شود:

$$\rho' = \sum_m P(m)\rho_m = \sum_m P_m\rho P_m. \quad (8)$$

آنچه که در بالا گفتیم مربوط به اندازه گیری های متعامد یا تصویری^۲ است. ولی این نوع اندازه گیری کلی ترین اندازه گیری قابل انجام در آزمایشگاه نیست. ممکن است که در یک اندازه گیری ذرات را از هم جدا کنیم ولی ذرات جدا شده کاملاً از هم قابل تمیز نباشند. درواقع اندازه گیری تصویری یک ایده آل سازی است که در آن فرض می کنیم ذراتی که در اثر آزمایش جدا شده اند (مثلاً ذرات اسپین ۱/۲ در آزمایش اشترن گرایخ) تحت تاثیر گرادیان مغناطیسی در دو جهت مختلف نیرواحساس می کنند و جدا می شوند ولی تحت تاثیر خود میدان مغناطیسی نیز قرار گرفته و اسپین آنها حول میدان متوسط می چرخد. بنابراین در یک آزمایش واقعی اشترن گرایخ که بتوان از اثرات حرکت وضعی اسپین ها صرف نظر کرد، حالت های خروجی واقعاً $|z, +\rangle$ و $|z, -\rangle$ نیستند، بلکه این حالت ها $U|z, +\rangle$ و $U|z, -\rangle$ هستند که U نشان دهنده اثر میدان مغناطیسی بر حرکت وضعی اسپین هاست. این امر به این معناست که این اندازه گیری با عملگرهای تصویری $P_+ := |z, +\rangle\langle z, +|$ و $P_- := |z, -\rangle\langle z, -|$ مشخص نمی شود بلکه با عملگرهای $M_+ = U_+P_+$ و $M_- = U_-P_-$ مشخص می شود. واضح است که این عملگرها دیگر تصویری نیستند و حالت های جدا شده از هم کاملاً متمایز نیستند.

البته تنها در اثر تحول نیست که حالت های جدا شده در یک اندازه گیری ممکن است برهم متعامد نباشند. با این موضوع در بخش های بعدی این درس و هم چنین در تمرین ها آشنا خواهیم شد. دربخش بعدی از زاویه دیگری به اندازه گیری های غیر متعامد نگاه می کنیم.

^۲Projective Measurements

۲ اندازه گیری های غیر متعامد

همان طور که در مثال بالا گفتیم، اندازه گیری تصویری یک اندازه گیری ایده آل است. معمولاً خروجی دستگاه اندازه گیری ممکن است نتواند حالت های مختلف را به طور کامل از هم جدا کند به این معنا که ممکن است حالت های خروجی با هم همپوشانی داشته باشند. این همپوشانی یا در اثر ناکامل بودن دستگاه اندازه گیری و یا در اثر تحول حالت ها درست پس از خروج از یک دستگاه ایده آل بوجود می آید. هم چنین این نوع اندازه گیری ممکن است به این وسیله تولید شود که ما روی دستگاه بزرگتری اندازه گیری تصویری انجام می دهیم ولی این اندازه گیری روی دستگاه کوچکتر دیگر یک اندازه گیری تصویری نیست. اندازه گیری غیرمتعامد^۴ نوع عمومی تری از اندازه گیری است که اینک به تعریف آن می پردازیم.

یک اندازه گیری غیرمتعامد یا تعمیم یافته با مجموعه ای از عملگرهای $\{M_m, m = 1 \dots K\}$ مشخص می شود که در شرط

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = I$$

صدق می کنند. اندازه گیری روی حالت ρ با احتمال $P(m) = \text{tr}(M_m \rho M_m^\dagger)$ نتیجه m را بدست می دهد. حالت هایی که نتیجه m را دارند عبارتند از

$$\rho_m = \frac{M_m \rho M_m^\dagger}{\text{tr}(M_m \rho M_m^\dagger)}$$

. هرگاه بعد از عبور از دستگاه اندازه گیری این حالت ها را از هم جدا نکنیم، حالت خروجی با یک آنزامل مخلوط از حالت ها یعنی با آنزامل زیر داده می شود:

$$\rho' = \sum_m P(m) \rho_m = \sum_m M_m \rho M_m^\dagger. \quad (9)$$

۳ اندازه گیری های عام یا POVM

در بسیاری از اوقات ما تنها به آمار اندازه گیری و نه به حالت های پس از اندازه گیری علاقمند هستیم. در واقع خیلی از اندازه گیری های ما از این نوع هستند به این معنا که ذره جذب این یا آن آشکارساز شده و حالت اش طبیعتاً از بین می رود ولی

^۴Non-orthogonal Measurement

ما از درصد ذراتی که جذب آشکارسازهای متفاوت شده اند اطلاعات بسیار زیادی در مورد مثلاً نیروهایی که بین ذرات وجود داشته است (مثلاً در آزمایش های پراکندگی) بدست می آوریم. یا مثلاً در موارد بسیاری تعداد بسیار زیادی ذره یکسان برای ما ارسال شده و ما می خواهیم حالت این ذرات را تعیین کنیم. در این گونه موارد با انجام تعداد محدودی آزمایش $POVM$ و به بهای رمبش حالت تعداد محدودی از ذرات می توانیم بفهمیم که حالت ذراتی که برای ما ارسال شده است چه بوده است. به نمونه هایی از این نوع اندازه گیری ها در پایان این درس خواهیم پرداخت. درچنین مواردی که تنها به احتمال رویداد علاقمند هستیم می توانیم بنویسیم

$$P(m) = \text{tr}(M_m \rho M_m^\dagger) = \text{tr}(M_m^\dagger M_m \rho) = \text{tr}(E_m \rho), \quad (10)$$

که در آن E_m ها عملگرهای مثبت هستند و در شرط

$$\sum_m E_m = I, \quad (11)$$

صدق می کنند. به این ترتیب به نوعی از اندازه گیری می رسیم که با مجموعه ای از عملگرهای مثبت $\{E_m, m = 1 \dots K\}$ که در شرط 11 صدق می کنند تعریف می شود. این نوع اندازه گیری را اصطلاحاً اندازه گیری $POVM$ می گویند که از حروف اول کلمات *Positive Operator Valued Measure* ساخته شده است. اندازه گیری $POVM$ می تواند قدرتمند تر از یک اندازه گیری تصویری باشد به این معنا که این نوع اندازه گیری می تواند قدرت تمیز بیشتری داشته باشد.

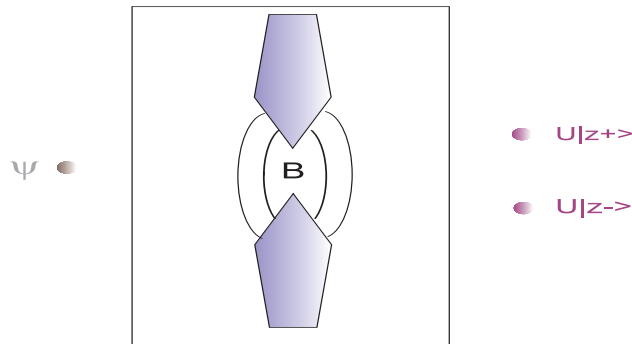
۴ مثالهایی از اندازه گیری های عام

دراین بخش از درس چندین مثال را برای روشن تر شدن مفهوم اندازه گیری عام ارایه خواهیم کرد. بعضی از این مثالها کاملاً خاص و بعضی از آنها کلی هستند.

۱.۴ تحول یکانی بعد از اندازه گیری تصویری: مدلی برای اندازه گیری های نامتعامل

همانطور که در مقدمه گفتیم یک راه برای عملی شدن اندازه گیری غیر متعامل آن است که یک اندازه گیری تصویری و ایده آل را با یک تحول زمانی خواسته یا ناخواسته دنبال کنیم. دراین صورت خواهیم داشت

$$M_m = U_m P_m \quad (12)$$



شکل ۲: در یک آزمایش اشترن گرایخ غیرایده آل، ذراتی که از دستگاه آزمایش بیرون می آیند لزوماً حالت های متعامد برهم ندارند

که در آن U عملگر یکانی تحول است. در این شرایط با توجه به تعریف اندازه گیری متعامد خواهیم داشت:

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = \sum_m P_m U_m^\dagger U_m P_m = \sum_m P_m = I, \quad (13)$$

و

$$P(m) = \text{tr}(P_m \rho P_m) = \text{tr}(U_m^\dagger M_m \rho M_m^\dagger U_m) = \text{tr}(M_m \rho M_m^\dagger). \quad (14)$$

هم چنین حالت بعد از اندازه گیری عبارت است از:

$$\rho_m = U_m \frac{P_m \rho P_m}{\text{tr}(P_m \rho P_m)} U_m^\dagger = \frac{M_m \rho M_m^\dagger}{\text{tr}(M_m \rho M_m^\dagger)}. \quad (15)$$

۲.۴ تشخیص حالت ها از یکدیگر

فرض کنید که آلایس تعداد زیادی از حالت های $|\psi_1\rangle$ و $|\psi_2\rangle$ در اختیار دارد و این حالت ها را به باب می فرستد. سوالی که باب با آن مواجه است این نیست که فلان مشاهده پذیر را از یک حالت معین اندازه گیری کند، بلکه می خواهد ببیند که آیا حالتی که اکنون آلایس برایش فرستاده است $|\psi_1\rangle$ است یا $|\psi_2\rangle$. این نمونه ای است از سوال های کلی ای که ما در اندازه گیری به آنها توجه داریم و همواره از نوع اندازه گیری یک مشاهده پذیر روی یک حالت معین نیستند.

باب می بایست با انجام بهترین اندازه گیری ها بتواند تا حد ممکن تشخیص دهد که آیا آلیس حالت $|\psi_1\rangle$ را برای وی فرستاده است یا حالت $|\psi_2\rangle$ را.

$$|\psi_1\rangle = |0\rangle \quad |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle). \quad (16)$$

واضح است که اندازه گیری تصویری در پایه $|0\rangle$ و $|1\rangle$ نمی تواند به باب کمک کند، زیرا هر وقت که وی نتیجه 0 را بدست می آورد (یعنی در ۷۵ درصد موارد) نمی داند که کدام یک از حالت های دو گانه فوق برای وی ارسال شده است. وی تنها در ۲۵ موارد که نتیجه 1 را بدست می آورد مطمئن است که حالت $|\psi_2\rangle$ برای وی ارسال شده است. بجای این نوع اندازه گیری وی یک اندازه گیری $POVM$ با عملگرهای زیر را انجام می دهد:

$$E_1 = \alpha|1\rangle\langle 1|, \quad E_2 = \beta(|0\rangle - |1\rangle)(\langle 0| - \langle 1|) \quad (17)$$

و

$$E_3 = I - E_1 - E_2 = (1 - \beta)|0\rangle\langle 0| + (1 - \alpha - \beta)|1\rangle\langle 1| + \beta(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|) = \begin{pmatrix} 1 - \beta & \beta \\ \beta & 1 - \alpha - \beta \end{pmatrix}. \quad (18)$$

که در آن ها α و β اعداد مثبتی هستند که می بایست چنان انتخاب شوند که عملگر E_3 نیز مثبت باشد. می خواهیم ببینیم که باب در چند درصد موارد می تواند با قطعیت نوع حالت ارسال شده را تشخیص دهد. برای این کار دقت می کنیم که آزمابل حالت های ارسال شده به صورت زیر است.

$$\rho = \frac{1}{2}(|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |\psi_2\rangle\langle\psi_2|) \quad (19)$$

هم چنین می دانیم که وقتی نتیجه 1 بدست آید وی با اطمینان می گوید که حالت $|\psi_2\rangle$ ارسال شده است زیرا $\langle\psi_1|E_1|\psi_1\rangle = 0$. به همین دلیل وقتی که نتیجه 2 را بدست می آورد مطمئن است که حالت $|\psi_1\rangle$ برای وی ارسال شده است. تنها در حالت بدست آوردن نتیجه 3 است که وی هم چنان مردد باقی خواهد ماند. بنابراین احتمال موفقیت برابر است با $P(1) + P(2)$ که در آن

$$\begin{aligned} P(1) &= \text{tr}(\rho E_1) = \frac{1}{2} \langle\psi_2|E_1|\psi_2\rangle = \frac{1}{2} \alpha \\ P(2) &= \text{tr}(\rho E_2) = \frac{1}{2} \langle\psi_1|E_2|\psi_1\rangle = \frac{1}{2} \beta. \end{aligned} \quad (20)$$

با پیشینه کردن این مقدار احتمالات ضمن رعایت قید مثبت بودن E_3 می بینیم که بهترین انتخاب برای پارامترهای α و β برابر است با:

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}, \quad \beta = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}. \quad (21)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$P_{correct} = \frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{4}\beta = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = 0.29. \quad (22)$$

یعنی این بار برخلاف قبل باب می تواند در ۲۹ درصد از موارد حالت ها را به دقت تشخیص دهد.

۳.۴ اندازه گیری در پایه اسپین کل برای دو ذره

فرض کنید که یک ذره اسپین $1/2$ در حالت $|\psi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle$ است که در آن $|+\rangle$ و $|-\rangle$ ویژه حالت های عملگر S_z هستند. ممکن است که بدلایلی اندازه گیری اسپین این ذره در راستای z برای ما امکان پذیر نباشد ولی بتوانیم اسپین کل یک سیستم دو ذره ای را مشخص کنیم. برای سادگی فرض می کنیم که ذره دوم در حالت $|+\rangle$ قرار داشته باشد. در این صورت سیستم مرکب در حالت

$$|\Psi\rangle = a|+, +\rangle + b|-, +\rangle \quad (23)$$

قرار دارد. برای اندازه گیری اسپین کل یعنی S^2 این دو ذره حالت فوق را به صورت زیر بسط می دهیم:

$$|\Psi\rangle = \alpha|1, 1\rangle + b \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 0\rangle - |0, 0\rangle). \quad (24)$$

در این جا از نمادهای $|l, m\rangle$ مربوط به تکانه زاویه ای استفاده کرده ایم. از آنجا که اندازه گیری اسپین کل انجام می شود، این سیستم دو ذره ای با احتمالات زیر به حالت های نوشته شده تصویر می شود:

$$\begin{aligned} P(1) &= a^2 + \frac{b^2}{2} & \longrightarrow & \frac{1}{\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{2}}} (a|1, 1\rangle + \frac{b}{\sqrt{2}}|1, 0\rangle) \\ P(0) &= \frac{b^2}{2} & \longrightarrow & |0, 0\rangle. \end{aligned} \quad (25)$$

یا با بازنویسی حالت ها

$$\begin{aligned} P(1) &= a^2 + \frac{b^2}{4} & \frac{1}{\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}} \left(a|++\rangle + \frac{b}{4}(|+,-\rangle + |- , +\rangle) \right) \\ P(0) &= \frac{b^2}{4} & \frac{1}{\sqrt{4}}(|+,-\rangle - |- , +\rangle) \end{aligned} \quad (26)$$

برای آنکه حالت های بعد از اندازه گیری را برای ذره اول تشخیص دهیم می بایست ماتریس چگالی آن را محاسبه کنیم. بدست می آوریم

$$\begin{aligned} P(1) &= a^2 + \frac{b^2}{4} & \rho_1 &= \frac{1}{a^2 + \frac{b^2}{4}} \begin{pmatrix} a^2 + \frac{b^2}{4} & \frac{ab}{4} \\ \frac{ab}{4} & \frac{b^2}{4} \end{pmatrix} \\ P(0) &= \frac{b^2}{4} & \rho_0 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (27)$$

و حالت های ρ_0 و ρ_1 برهم عمود نیستند و حال آنکه اندازه گیری اسپین کل یک اندازه گیری تصویری و متعامد است. دقت کنید که اگر نتیجه ی ۱ را بدست بیاوریم، آنگاه در اثر اندازه گیری حالت سیستم A که در ابتدا یک حالت خالص بود، به یک حالت مخلوط تبدیل شده است. به همین جهت این نوع اندازه گیری یک اندازه گیری نامتعامد نیست، زیرا اگر چنین بود، به خاطر رابطه ی $\rho \rightarrow \rho' \propto M_m \rho M_m^\dagger$ حالت بعد از اندازه گیری نیز می بایست یک حالت خالص می شد و حال آنکه چنین نیست. بنابراین این نوع اندازه گیری یک اندازه گیری کلی تر یعنی یک اندازه گیری $POVM$ است.

۴.۴ اندازه گیری تصویری روی ضرب تانسوری دو فضا

آنچه را که در مثال قبلی گفتیم می توانیم به صورت کلی نیز بیان کنیم. فرض کنید که روی سیستم AB یک اندازه گیری تصویری با عملگرهای $\{P_m, m = 1 \dots K\}$ انجام دهیم. در این صورت احتمال بدست آوردن نتیجه m برابر است با

$$P_A(m) = \text{tr}(P_m(\rho_A \otimes \rho_B)). \quad (28)$$

حال احتمال $P_A(m)$ را می بایست چنان بازنویسی کنیم که مستقیماً به ماتریس چگالی ρ_A مرتبط شود. می نویسیم

$$\begin{aligned}
P_A(m) &= \text{tr}(P_m(\rho_A \otimes \rho_B)) = \langle i, \mu | P_m | j, \nu \rangle \langle j, \nu | \rho_A \otimes \rho_B | i, \mu \rangle \\
&= \langle i, \mu | P_m | j, \nu \rangle (\rho_A)_{ji} \langle \nu | \rho_B | \mu \rangle = (E_m)_{ij} (\rho_A)_{ij} = \text{tr}_A(E_m \rho_A).
\end{aligned} \tag{۲۹}$$

که در آن E_m ماتریسی است با درایه های زیر:

$$(E_m)_{ij} = \langle i, \mu | P_m | j, \nu \rangle \langle \nu | \rho_B | \mu \rangle = (P_m)_{i\mu, j\nu} (\rho_B)_{\nu\mu}. \tag{۳۰}$$

براحتی معلوم می شود که

$$\begin{aligned}
\sum_m (E_m)_{ij} &= \langle i, \mu | \sum_m P_m | j, \nu \rangle \langle \nu | \rho_B | \mu \rangle = \langle i, \mu | I | j, \nu \rangle \langle \nu | \rho_B | \mu \rangle \\
&= \delta_{ij} \delta_{\mu, \nu} \langle \nu | \rho_B | \mu \rangle = \delta_{ij} \text{tr}(\rho_B) = \delta_{ij}.
\end{aligned} \tag{۳۱}$$

و در نتیجه شرط $\sum_m E_m = I_A$ برقرار می شود. هم چنین می توانیم ثابت کنیم که عملگرهای E_m همگی نامنفی هستند. برای این کار عنصر ماتریسی E_m روی یک بردار دلخواه $|v\rangle \in V_A$ حساب می کنیم

$$\langle v | E_m | v \rangle = v_i^* v_j (P_m)_{i\mu, j\nu} (\rho_B)_{\nu\mu} = (e_m)_{i\mu} (e_m)_{j\nu}^* v_i^* v_j (\rho_B)_{\nu\mu} \tag{۳۲}$$

حال $|\omega\rangle$ را با درایه های زیر تعریف می کنیم

$$\omega_\mu := (e_m)_{i\mu} v_i^* \tag{۳۳}$$

که با توجه به آن می توان نوشت

$$\langle v | E_m | v \rangle = \omega_\nu^* (\rho_B)_{\nu\mu} \omega_\mu = \langle \omega | \rho_B | \omega \rangle \geq 0. \tag{۳۴}$$

بنابراین عملگرهای E_m مثبت هستند. به این ترتیب ثابت کرده ایم که یک اندازه گیری تصویری روی فضای $V_A \otimes V_B$ یک اندازه گیری $POVM$ روی فضای V_A است.

۵.۴ اندازه گیری تصویری روی جمع مستقیم دو فضا: یک مثال

آیا اندازه گیری های $POVM$ تنها یک امکان خیالی و نظری است یا اینکه واقعاً می توان چنین اندازه گیری هایی را انجام داد. برای فهم اندازه گیری $POVM$ به شکل 5.4 مراجعه می کنیم. در این شکل حالت اولیه در زیرفضایی که توسط بردارهای $|1\rangle$ و $|2\rangle$ جاروب می شود قرار گرفته است. ممکن است که به دلایل تجربی اندازه گیری را در فضای بزرگتری که با بردارهای $|e_1\rangle, |e_2\rangle$ و $|e_3\rangle$ جاروب می شود انجام دهیم. این اندازه گیری از دید ناظری که در همان زیر فضای کوچک زندگی می کند یک اندازه گیری تصویری نیست. نخست به یک مثال توجه می کنیم. فرض کنید که برداری های نشان داده شده در شکل به صورت زیر باشند:

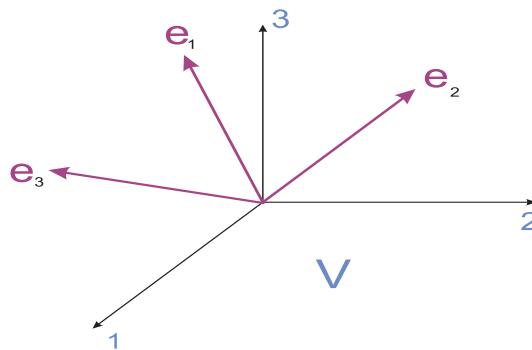
$$\begin{aligned} |e_1\rangle &= \frac{1}{2}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle + \frac{1}{2}|3\rangle \\ |e_2\rangle &= \frac{1}{2}|1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle + \frac{1}{2}|3\rangle \\ |e_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|3\rangle. \end{aligned} \quad (35)$$

حال یک اندازه گیری تصویری در امتداد بردارهای فوق روی حالت زیر انجام می دهیم. این بردار در زیر فضای V قرار گرفته است ولی اندازه گیری ما در فضای بزرگ W انجام می شود.

$$|\psi\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle. \quad (36)$$

برای اینکه نتیجه اندازه گیری را بفهمیم می بایست بردار $|\psi\rangle$ را برحسب بردارهای سه گانه فضای بزرگ بسط دهیم. بنابراین از روابط زیر استفاده می کنیم

$$\begin{aligned} |1\rangle &= \frac{1}{2}|e_1\rangle + \frac{1}{2}|e_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|e_3\rangle \\ |2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|e_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|e_2\rangle \end{aligned}$$



شکل ۳: اندازه گیری تصویری در امتداد بردارهای فضای بزرگ از دید ناظری که در یک زیر فضا قرار دارد یک اندازه گیری تعمیم یافته است

$$|3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|e_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|e_2\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|e_3\rangle. \quad (37)$$

و بسط بردار $|\psi\rangle$ را پیدا می کنیم:

$$|\psi\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle = \left(\frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{b}{\sqrt{3}}\right)|e_1\rangle + \left(\frac{a}{\sqrt{3}} - \frac{b}{\sqrt{3}}\right)|e_2\rangle + \frac{a}{\sqrt{3}}|e_3\rangle \quad (38)$$

در این صورت اندازه گیری تصویری روی این بردار حالت در امتداد های $|e_1\rangle$ ، $|e_2\rangle$ و $|e_3\rangle$ با احتمالات زیر مرتبط است:

$$\begin{aligned} P(e_1) &= \left(\frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{b}{\sqrt{3}}\right)^2 \\ P(e_2) &= \left(\frac{a}{\sqrt{3}} - \frac{b}{\sqrt{3}}\right)^2 \\ P(e_3) &= \frac{a^2}{3}. \end{aligned} \quad (39)$$

به این معنا که با احتمالات فوق حالت ذره به یکی از حالت های $|e_1\rangle$ ، $|e_2\rangle$ و یا $|e_3\rangle$ تصویر خواهد شد. اما نتیجه اندازه گیری را می بایست از دید ناظر درون زیرفضای V نگاه کنیم. در نتیجه می بایست بردارهای فوق را به زیرفضای V تصویر کنیم. بنابراین نتیجه آن خواهد شد که اندازه گیری انجام شده از دید این ناظر، بردار حالت را با احتمالات بالا به یکی از حالت های غیر متعامد زیر تصویر می کند.

$$|v_1\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|2\rangle$$

$$\begin{aligned} |v_2\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}}|1\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|2\rangle \\ |v_3\rangle &= |1\rangle. \end{aligned} \quad (40)$$

این مثال نشان می دهد که چگونه یک اندازه گیری غیر متعامد از یک اندازه گیری تصویری یا متعامد در یک فضای بزرگ تر بوجود می آید.

۶.۴ اندازه گیری تصویری روی جمع مستقیم دو فضا: حالت کلی

آنچه را که در مثال قبلی گفتیم می توانیم به شکل کلی مورد مطالعه قرار دهیم. فرض کنید که حالتی که می خواهیم اندازه گیری کنیم در فضای H_A قرار دارد ولی ما روی فضای هیلبرت $H = H_A \oplus H_A^\perp$ یک اندازه گیری تصویری در پایه ی $\{|e_k\rangle\}$ انجام می دهیم. فضای $H_A^\perp$ بر H_A عمود است. هر حالت $|e_k\rangle$ به شکل یکتایی به صورت زیر تجزیه می شود:

$$|e_k\rangle = |v_k\rangle + |v_k\rangle^\perp \quad (41)$$

از آنجا که حالت سیستم ما یعنی ρ_A در فضای هیلبرت H_A است، می دانیم که

$$\langle v_k^\perp | \rho_A = \rho_A | v_k^\perp \rangle = 0.$$

در اندازه گیری تصویری ای که در فضای H انجام می دهیم نتیجه ی m با احتمال

$$P(m) = \langle \phi | e_m \rangle \langle e_m | \phi \rangle = \langle e_m | \rho_A | e_m \rangle$$

بدست می آید. اما با توجه به تجزیه ی 41 و رابطه فوق نتیجه می گیریم که

$$P(m) = \langle v_m | \rho_A | v_m \rangle = \text{tr}(|v_m\rangle \langle v_m| \rho_A) = \text{tr}(E_m \rho_A), \quad (42)$$

که در آن $E_m = |v_m\rangle \langle v_m|$. بنابراین از نظر ناظر فضای H_A اندازه گیری تصویری یک اندازه گیری $POVM$ با عملگرهای E_m است. واضح است که این عملگرها مثبت و هرمیتی هستند. تنها چیزی که باید بررسی کنیم این است که آیا مجموع آنها برابر با عملگر واحد برای فضای H_A هست یا نه؟ برای این کار دقت می کنیم که $|v_m\rangle = P_A |e_m\rangle$ که در آن P_A عملگر تصویر روی فضای H_A است. بنابراین خواهیم داشت

$$\sum_m = \sum_m |v_m\rangle \langle v_m| = \sum_m P_A |e_m\rangle \langle e_m| P_A = P_A I_{A \oplus A^\perp} P_A = P_A \equiv I_A. \quad (43)$$

بنابراین عملگرهای E_m واقعاً یک $POVM$ را تشکیل می دهند.

۷.۴ استفاده از یک سیستم دیگر برای اندازه گیری

یکی از راه های مرسوم اندازه گیری آن است که حالت سیستم مورد نظری یعنی A را با یک حالت مرجع از سیستم دیگر مثل B جفت کرده و بعد از یک عمل یکانی روی کل سیستم AB ، در پایه های B اندازه گیری انجام می دهیم. اگر حالت اولیه ی سیستم A را با $|\phi\rangle$ ، حالت مرجع سیستم B را با $|\circ\rangle$ و بردارهای پایه سیستم B را با $\{|\mu\rangle\}_{\mu=1}^K$ نمایش دهیم، آنگاه عمل یکانی U روی سیستم AB حالت $|\phi\rangle_A \otimes |\circ\rangle_B$ چنین خواهد بود:

$$U : |\phi\rangle_A \otimes |\circ\rangle_B \longrightarrow \sum_{\mu=1}^K |\phi_\mu\rangle_A \otimes |\mu\rangle. \quad (44)$$

لازمه ی خطی بودن این عملگر نسبت به $|\phi\rangle$ آن است که بردارهای $|\phi_\mu\rangle$ به صورت $M_\mu|\phi\rangle$ باشند که در آن ها M_μ ها عملگرهایی در فضای A هستند، بنابراین

$$|\phi\rangle_A \otimes |\circ\rangle_B \longrightarrow \sum_{\mu=1}^K M_\mu|\phi\rangle_A \otimes |\mu\rangle. \quad (45)$$

حال اندازه گیری تصویری سیستم B در پایه ی $\{|\mu\rangle\}$ باعث می شود که سیستم A در یکی از حالت های نامتعامل $M_\mu|\phi\rangle$ قرار گیرد. این کار با احتمال $P(m) = \langle\phi|M_\mu^\dagger M_m|\phi\rangle$ صورت می گیرد. در این جا چند نکته ی جالب توجه وجود دارد. اول اینکه تعداد حالت های K می تواند بیشتر از بعد فضای هیلبرت باشد. مثلاً می توانیم به این ترتیب یک ذره اسپین $1/2$ را روی بیش از دو حالت نامتعامل تصویر کنیم. دوم اینکه احتمالات را می توانیم به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$P(m) = \langle\phi|M_\mu^\dagger M_m|\phi\rangle = \text{tr}(M_\mu \rho M_m^\dagger) = \text{tr}(M_m^\dagger M_m \rho) = \text{tr}(E_m \rho). \quad (46)$$

بنابراین، این نوع اندازه گیری یک اندازه گیری $POVM$ با المان های $\{E_m\}$ است. واضح است که المان های E_m نیز مثبت هستند.

ضمناً شرط یکانی بودن عملگر U الزام می کند که به ازای هر حالت اولیه ی $|\phi\rangle$ داشته باشیم

$$\langle\phi| \otimes \langle\circ| U^\dagger U |\phi\rangle \otimes |\circ\rangle = \langle\phi|\phi\rangle, \quad (47)$$

که پس از جایگزاری و ساده کردن می فهمیم به این معناست که عملگرهای M_m می بایست در شرط زیر صدق کنند:

$$\sum_{\mu} M_{\mu}^{\dagger} M_{\mu} = \sum_{\mu} E_{\mu} = I_A. \quad (48)$$

۸.۴ $POVM$ روی کره بلوخ

برای اندازه گیری $POVM$ روی کره بلوخ نیز می توانیم یک مجموعه عملگرهای $POVM$ به ترتیب زیر معرفی کنیم. فرض کنید که $\mathbf{n}_k$ ها مجموعه ای از بردارهای یکه باشند به نحوی که در رابطه ی زیر صدق کنند:

$$\sum_k \lambda_k \mathbf{n}_k = \mathbf{0}, \quad \sum_k \lambda_k = 1 \quad (49)$$

دراین صورت قرار می دهیم

$$E_k := \lambda_k (I + \mathbf{n}_k \cdot \sigma) = 2\lambda_k |\mathbf{n}_k\rangle\langle\mathbf{n}_k|, \quad (50)$$

که در آن $|\mathbf{n}_k\rangle$ حالتی است که اسپین ذره در راستای بردار $\mathbf{n}_k$ است. واضح است که این عملگرها هرمیتی و مثبت هستند. کافی است که جمع آنها برابر با یک شود تا تشکیل یک $POVM$ بدهند:

$$\sum_k E_k = \sum_k \lambda_k (I + \mathbf{n}_k \cdot \sigma) = \left(\sum_k \lambda_k\right) I + \left(\sum_k \lambda_k \mathbf{n}_k\right) \cdot \sigma = I. \quad (51)$$

بنابراین براحتی می توان برای یک کیوبیت مجموعه های متفاوتی از $POVM$ ها انتخاب کرد.

بعد از تمامی این مثال ها با یک سوال اساسی مواجه می شویم. آیا هر اندازه گیری $POVM$ را می توان از یک اندازه گیری تصویری بدست آورد؟ این سوال از آن جهت حائز اهمیت است که به هر حال اصل موضوع مکانیک کوانتومی آن است که اندازه گیری های ایده آل روی یک سیستم بسته اندازه گیری های تصویری هستند. دربخش بعدی خواهیم دید که پاسخ این سوال مثبت است.

۵ قضیه نویمارک

قضیه نویمارک بیان می کند که هر اندازه گیری $POVM$ را می توان از یک اندازه گیری تصویری در یک فضای بزرگ تر بازسازی کرد. برای این کار نخست به یک مقدمه کوتاه احتیاج داریم. فرض کنید که در یک فضای d بعدی V یک اندازه

گیری $POVM$ با عملگرهای $\{E_1, E_2, \dots, E_k\}$ انجام دهیم. این عملگرها می بایست نامنفی بوده و جمع همه آنها برابر با عملگر واحد باشد. این عملگرها را می توان بدون نقض کلیت عملگرهایی با رتبه یک (یعنی با حداکثر یک ویژه مقدار غیر صفر) در نظر گرفت. برای فهم این نکته فرض کنید که عملگری مثل E_1 دارای رتبه ۲ باشد. در این صورت می توان نوشت

$$E_1 = E'_1 + E''_1 \quad (52)$$

که در آن E' و E'' عملگرهای رتبه یک هستند. در این صورت داریم

$$P(1) = \text{tr}(E_1 \rho) = \text{tr}(E'_1 \rho) + \text{tr}(E''_1 \rho) =: P(1') + P(1''). \quad (53)$$

که احتمالات $P(1')$ و $P(1'')$ را در طرف راست تعریف کرده ایم. بنابراین هرگاه اندازه گیری $\{E'_1, E''_1, E_2, \dots, E_k\}$ را انجام دهیم و احتمالات $P(1')$ و $P(1'')$ را باهم جمع کنیم و آن را مساوی $P(1)$ قرار دهیم مثل این است که اندازه گیری $\{E_1, E_2, \dots, E_k\}$ را انجام داده ایم. با این مقدمه می توانیم تمام عملگرهای $POVM$ را عملگرهایی با رتبه یک در نظر بگیریم. هم چنین می توانیم تعداد این عملگرها را از بعد فضای V بیشتر بگیریم زیرا با افزودن عملگرهای نامنفی $E = 0$ می توانیم این کار را انجام دهیم. با این مقدمه به سراغ اثبات قضیه نویمارک می رویم. ایده اثبات را می توان با یک مثال در بعد کم نشان داد. این اثبات مطلقاً هیچ چیزی از اثبات کلی کم ندارد.

فضای V را دو بعدی در نظر می گیریم و یک اندازه گیری $POVM$ با عملگرهای $\{E_1, E_2, E_3\}$ که در این فضا انجام می شود. از آنجا که این عملگرها مثبت بوده و رتبه یک دارند می توان آنها را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} E_1 &:= \lambda_1 |\psi_1\rangle\langle\psi_1| \equiv |\tilde{\psi}_1\rangle\langle\tilde{\psi}_1|, \\ E_2 &:= \lambda_2 |\psi_2\rangle\langle\psi_2| \equiv |\tilde{\psi}_2\rangle\langle\tilde{\psi}_2|, \\ E_3 &:= \lambda_3 |\psi_3\rangle\langle\psi_3| \equiv |\tilde{\psi}_3\rangle\langle\tilde{\psi}_3|. \end{aligned} \quad (54)$$

این عملگرها در شرط زیر صدق می کنند:

$$E_1 + E_2 + E_3 = |\tilde{\psi}_1\rangle\langle\tilde{\psi}_1| + |\tilde{\psi}_2\rangle\langle\tilde{\psi}_2| + |\tilde{\psi}_3\rangle\langle\tilde{\psi}_3| = I. \quad (55)$$

فرم صریح برداری $|\tilde{\psi}_1\rangle$ ، $|\tilde{\psi}_2\rangle$ و $|\tilde{\psi}_3\rangle$ به شکل زیر هستند:

$$|\tilde{\psi}_1\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \quad |\tilde{\psi}_2\rangle = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad |\tilde{\psi}_3\rangle = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix}. \quad (56)$$

در نتیجه فرم صریح عملگرهای $POVM$ به ترتیب زیر است:

$$E_1 = \begin{pmatrix} a_1 \bar{a}_1 & a_1 \bar{b}_1 \\ b_1 \bar{a}_1 & b_1 \bar{b}_1 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} a_2 \bar{a}_2 & a_2 \bar{b}_2 \\ b_2 \bar{a}_2 & b_2 \bar{b}_2 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} a_3 \bar{a}_3 & a_3 \bar{b}_3 \\ b_3 \bar{a}_3 & b_3 \bar{b}_3 \end{pmatrix}. \quad (57)$$

فرم صریح شرط 55 می شود

$$E_1 + E_2 + E_3 = \begin{pmatrix} a_1 \bar{a}_1 + a_2 \bar{a}_2 + a_3 \bar{a}_3 & a_1 \bar{b}_1 + a_2 \bar{b}_2 + a_3 \bar{b}_3 \\ b_1 \bar{a}_1 + b_2 \bar{a}_2 + b_3 \bar{a}_3 & b_1 \bar{b}_1 + b_2 \bar{b}_2 + b_3 \bar{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (58)$$

که به معنای آن است که ستون های ماتریس زیر تشکیل دو بردار متعامد و یک در فضای سه بعدی می دهند:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \quad (59)$$

براحتی می توان بردار سومی به این دو بردار اضافه کرد که مجموعاً تشکیل سه بردار متعامد و یک در فضای سه بعدی

بدهند. از این سه بردار ماتریس زیر را تشکیل می دهیم

$$U := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad (60)$$

در نتیجه شرط زیر برآورده می شود

$$U_{ij}U_{ik}^* = \delta_{ik} \quad (61)$$

که به معنای رابطه $U^\dagger U = I$ است. اما رابطه $UU^\dagger = I$ نیز برقرار می شود. زیرا با توجه به اینکه دترمینان U مخالف صفر است،

عمل U روی فضای سه بعدی وارون پذیر است و برای هر بردار دلخواه مثل $|\alpha\rangle$ می توان برداری مثل $|\beta\rangle$ چنان یافت که

$$|\alpha\rangle = U|\beta\rangle \quad \text{در نتیجه}$$

$$UU^\dagger|\alpha\rangle = UU^\dagger(U|\beta\rangle) = U(U^\dagger U)|\beta\rangle = U|\beta\rangle = |\alpha\rangle. \quad (62)$$

که به معنای آن است که $UU^\dagger = I$ ، یعنی اینکه ماتریس U یکانی است. یکانی بودن U به ما اجازه می دهد که سطرهای

ماتریس U را نیز به عنوان سه بردار متعامد و یکدیگر در نظر بگیریم. این سه بردار را با $|u_1\rangle$ ، $|u_2\rangle$ و $|u_3\rangle$ نشان می دهیم:

$$|u_1\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \quad |u_2\rangle = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad |u_3\rangle = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} \quad (63)$$

این سه بردار به ترتیب زیر تجزیه می شوند:

$$\begin{aligned} |u_1\rangle &= |\tilde{\psi}_1\rangle + |\tilde{\psi}_1^\perp\rangle \\ |u_2\rangle &= |\tilde{\psi}_2\rangle + |\tilde{\psi}_2^\perp\rangle \\ |u_3\rangle &= |\tilde{\psi}_3\rangle + |\tilde{\psi}_3^\perp\rangle. \end{aligned} \quad (64)$$

به این ترتیب سه برداری را بدست آورده ایم که اولاً متعامد یکدیگر هستند و ثانیاً تصویر آنها در فضای دو بعدی همان بردارهای غیر متعامدی است که اندازه گیری $POVM$ را تعریف می کنند. اندازه گیری تصویری در امتداد این بردارها با عملگرهای تصویر گر زیر تعریف می شود:

$$P_1 = |u_1\rangle\langle u_1|, \quad P_2 = |u_2\rangle\langle u_2|, \quad P_3 = |u_3\rangle\langle u_3|. \quad (65)$$

احتمال بدست آمدن نتیجه m برابر است با

$$P(m) = \text{tr}(P_m \rho P_m) = \langle u_m | \rho | u_m \rangle = \langle \tilde{\psi}_m | \rho | \tilde{\psi}_m \rangle = \text{tr}(E_m \rho). \quad (66)$$

که در آن از این مطلب استفاده کرده ایم که حالت مورد اندازه گیری یعنی ρ برحالت های $|\tilde{\psi}_m^\perp\rangle$ عمود است. به این ترتیب نشان داده ایم اندازه گیری $POVM$ را می توان ناشی از یک اندازه گیری تصویری در فضای بزرگ تر دانست. این محاسبه نشان می دهد که چگونه عملگرهای $POVM$ در فضای V با عملگرهای تصویر گر در فضای بزرگ تر رابطه دارند. هرگاه عملگر تصویر روی فضای V را با P_V نشان دهیم خواهیم داشت:

$$E_m = |\tilde{\psi}\rangle\langle\tilde{\psi}| = P_V |u_m\rangle\langle u_m| P_V = P_V P_m P_V. \quad (67)$$

با استفاده از این رابطه می توان حالت نهایی را نیز به شکل زیر بدست آورد.

$$\rho \longrightarrow P_V \rho' P_V \longrightarrow P_V \sum_m P_m \rho P_m P_V = \sum_m E_m \rho E_m^\dagger. \quad (68)$$

اثبات قضیه نویمارک در اینجا کامل می شود.

تمرین: آلیس دو حالت $|\psi_1\rangle := \cos\theta|0\rangle + \sin\theta|1\rangle$ و $|\psi_2\rangle := \sin\theta|0\rangle + \cos\theta|1\rangle$ را به صورت تصادفی و با احتمالات مساوی برای باب می فرستد. آلیس یک اندازه گیری متعامد در پایه $|u_1\rangle := \cos\alpha|0\rangle + \sin\alpha|1\rangle$ و $|u_2\rangle := -\sin\alpha|0\rangle + \cos\alpha|1\rangle$ انجام می دهد. هرگاه نتیجه u_i را بدست آورد حدس می زند که آلیس حالت $|\psi_i\rangle$ را برای او فرستاده است. برای آنکه به طور متوسط حدس باب بیشترین تطابق را با واقعیت داشته باشد α چه مقداری را باید اختیار کند. با یک تعریف مناسب مقدار موفقیت باب را تعیین کنید.

تمرین: یک $POVM$ به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{4}|z, +\rangle\langle z, +|, & E_2 &= \frac{1}{4}|z, -\rangle\langle z, -|, \\ E_3 &= \frac{1}{4}|x, +\rangle\langle x, +|, & E_4 &= \frac{1}{4}|x, -\rangle\langle x, -| \end{aligned} \quad (69)$$

نشان دهید که این $POVM$ را می توان به عنوان یک اندازه گیری متعامد در یک فضای دوکیوبیتی در نظر گرفت.

تمرین: می خواهیم حالت های $|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}}(|0\rangle + |1\rangle)$ و $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}}(|0\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}|1\rangle)$ را با اندازه گیری از هم تمیز دهیم. یک اندازه گیری $POVM$ که به کمک آن می توان این دو حالت را از هم تمیز داد بدست آورید. هم چنین تعیین کنید که در چند درصد موارد قضاوت شما در مورد نوع حالت بطور قطع درست است.

تمرین: فرض کنید که یک حالت خالص $|\psi\rangle$ با احتمال یکنواخت از روی کره بلوخ به شما داده می شود. شما حدس می زنید که حالت $|\phi\rangle$ به شما داده شده است. به طور متوسط، تشابه یا به اصطلاح *Fidelity* مربوط به این حدس شما که با عبارت زیر داده می شود چقدر است؟

$$F := |\langle\phi|\psi\rangle|^2. \quad (70)$$

تمرین: فیدلیته یا تشابه دو حالت ρ و σ به صورت زیر تعریف می شود:

$$F := \text{tr} \sqrt{\sigma^{\frac{1}{2}} \rho \sigma^{\frac{1}{2}}}. \quad (71)$$

برای دو حالت $\rho = \frac{1}{4}(I + \vec{r} \cdot \vec{\sigma})$ و $\rho = \frac{1}{4}(I + \vec{s} \cdot \vec{\sigma})$ در کره بلوخ، فیدلیته را حساب کنید. پاسخ شما می بایست تابعی از فاصله بردارهای r و s باشد. اگر درست محاسبه کرده باشید، نتیجه نهایی می بایست علیرغم فرم تعریف F نسبت به ρ و σ متقارن باشد. در حالتیکه هر دو حالت خالص هستند نشان دهید که این تابع تشابه به همان رابطه ای منجر می شود که در درس مکانیک کوانتومی دیده اید.

تمرین: یک حالت دلخواه و خالص مثل $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ را در نظر بگیرید. روی این حالت یک اندازه گیری تصویری در پایه $|0\rangle$ و $|1\rangle$ انجام می دهیم، بدون اینکه از نتیجه اندازه گیری آگاه شویم. فیدلیته حالت بعد از اندازه گیری را با حالت قبل از اندازه گیری بدست آورید. به ازای چه مقدارهایی از a و b این فیدلیته بیشترین مقدار را دارد؟

تمرین: حالت خالص زیر را در نظر بگیرید:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}}|0\rangle \left(\frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle \right) + \frac{1}{\sqrt{4}}|1\rangle \left(\frac{1}{2}|1\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle \right). \quad (72)$$

تجزیه اشمیت این حالت را بدست آورید.

تمرین: یک ذره اسپین $2/1$ در حالت $|\psi\rangle = a|z, +\rangle + b|z, -\rangle$ قرار دارد. این ذره را در کنار ذره دومی که در حالت $|z, -\rangle$ قرار دارد، گذاشته و یک اندازه گیری روی هر دودره در پایه $|l, m\rangle$ که پایه های تکانه زاویه ای کل است انجام می دهیم. از نتایج اندازه گیری نیز مطلع نیستیم.

الف: ماتریس چگالی ذره اول را قبل و بعد از اندازه گیری مشخص کنید.

ب: از دید ذره اول اندازه گیری که انجام شده است با چه عملگرهایی مشخص می شود؟

۶ تخمین حالت ها

۱.۶ وقتی که تعداد محدودی آزمایش روی تعداد نامحدودی از حالت ها می توانیم انجام دهیم.

حالت یک کیوبیت به صورت زیر نوشته می شود:

$$\rho = \frac{1}{4}(I + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}). \quad (۷۳)$$

برای مشخص کردن این حالت می بایست بردار $\mathbf{r}$ را تعیین کنیم. مولفه های بردار $\mathbf{r}$ برابرند با

$$x := \langle \sigma_x \rangle = \text{tr}(\sigma_x \rho), \quad y := \langle \sigma_y \rangle = \text{tr}(\sigma_y \rho), \quad z := \langle \sigma_z \rangle = \text{tr}(\sigma_z \rho). \quad (۷۴)$$

بنابراین کافی است که سه آزمایش جداگانه انجام دهیم تا مقادیر متوسط های بالا را بدست آوریم. (فعلا فرض می کنیم که تعداد بسیار زیادی از این حالت های یکسان در اختیار داریم و در محاسبه متوسط های بالا هیچ نوع محدودیتی نداریم. بعدا این محدودیت را به تفصیل بررسی خواهیم کرد.)

اما فرض کنید که در آزمایشگاه امکان انجام سه نوع اندازه گیری بالا را نداریم. مثلا می توانیم فقط متوسط مشاهده پذیرهای σ_x و $\sigma \cdot \mathbf{n}$ را که در آن $\mathbf{n}$ یک جهت مشخص است تعیین کنیم. در این صورت می پرسیم که بهترین تخمینی که برای حالت کوانتومی می توانیم بدست بدهیم چیست؟ این مسئله را به طور کلی مطالعه می کنیم. بنابر این فرض کنید که حالت سیستم کوانتومی، که می تواند یک ذره یا چند ذره باشد، با ρ نشان داده می شود و در آزمایشگاه امکان اندازه گیری متوسط مشاهده پذیرهای G_1 تا G_K را داریم. یعنی کمیت های زیر را می توانیم در آزمایشگاه تعیین کنیم:

$$g_i := \langle G_i \rangle = \text{tr}(G_i \rho), \quad i = 1, \dots, K. \quad (۷۵)$$

سوال این است که با دانشی که از روابط بالا در مورد ρ داریم بهترین تخمین برای ρ چیست؟ اگر هیچ اطلاعی در مورد حالت نداشته باشیم، این حالت می تواند در فضای ماتریس های چگالی هر جایی باشد. و هیچ نوع ماتریس چگالی بر دیگری برتری ندارد. بنابراین بهترین تخمین آن است که ρ را متناسب با واحد اختیار کنیم. این ماتریس بیشترین مقدار عدم یقین را منعکس می کند. این بیشینه عدم یقین نیز ناشی از این است که ما هیچ گونه اطلاع خاصی در باره حالت نداریم. در واقع حالت $\rho = \frac{1}{d}I$ که در آن d بعد فضای هیلبرت مربوط به سیستم است حالتی است که عدم یقین یا آنتروپی S را که به صورت

زیر تعریف می شود، پیشنهاد می کند:

$$S(\rho) = -tr(\rho \ln \rho). \quad (76)$$

حال که می دانیم حالت ρ چنان است که مقید به روابط ۷۵ است می بایست آنتروپی را با توجه به قید های بالا و هم چنین با توجه به این که $tr(\rho) = 1$ است در فضای ماتریس های هرمیتی پیشنهاد کنیم. این کار را با استفاده از ضرایب لاگرانژ انجام می دهیم: بنابراین قرار می دهیم:

$$F(\rho) = -tr(\rho \log \rho) - \sum_i \lambda_i tr(\hat{G}_i \rho) - \lambda tr(\rho), \quad (77)$$

و تقاضا می کنیم که تغییرات مرتبه اول این تابع نسبت به تغییرات ρ برابر با صفر باشد. وردش F نسبت به ρ منجر می شود به:

$$\delta F(\rho) = -tr(\delta \rho \ln \rho + \delta \rho) - \sum_i \lambda_i tr(\hat{G}_i \delta \rho) - \lambda tr(\delta \rho), \quad (78)$$

از آنجا که این وردش می بایست برای هر $\delta \rho$ برابر با صفر باشد با قرار دادن ضریب $\delta \rho$ مساوی با صفر در رابطه بالا به نتیجه زیر می رسم:

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\sum_i \lambda_i \hat{G}_i} \quad (79)$$

به این ترتیب بهترین تخمین برای ρ با استفاده از آزمایش هایی که انجام داده ایم بدست می آید.

تمرین: فرض کنید که روی حالت یک کیوبیت آزمایش انجام شده است و مقدار زیر در دست است:

$$\langle \sigma_x \rangle = a. \quad (80)$$

بهترین تخمین برای حالت کیوبیت چیست؟

تمرین: در تمرین قبلی فرض کنید که دو آزمایش انجام شده و مقادیر زیر را در اختیار داریم:

$$\langle \sigma_x \rangle = a, \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \langle (\sigma_y + \sigma_z) \rangle = b. \quad (81)$$

بهترین تخمین حالت کیوبیت چیست؟

تمرین: : در یک کاواک الکترومغناطیسی که شامل فوتون های با یک فرکانس معین است، مقدار متوسط فوتون ها را تعیین کرده ایم. با استفاده از روش بالا بهترین تخمینی که برای حالت ρ را تعیین کنید.

۲.۶ وقتی که روی تعداد محدودی از حالت ها می توانیم آزمایش انجام دهیم.

در بخش قبلی فرض ما این بود که می توانیم متوسط مشاهده پذیر را به طور دقیق تعیین کنیم. محاسبه درست و دقیق متوسط یک مشاهده پذیر نیازمند داشتن بی نهایت کپی از یک حالت است که در عمل ممکن نیست. در واقع مسئله اصلی ما این است که حتی اگر آلیس تعداد خیلی زیادی حالت یکسان به آزمایشگاه ما ارسال کرده باشد ما نمی خواهیم روی تمام آنها آزمایش انجام دهیم زیرا این کار باعث رمبش و وادوسی این حالت ها می شود. آنچه که ما می خواهیم این است که روی تعداد کمی از حالت ها آزمایش کنیم و به این ترتیب حالت تمام ذرات را تعیین کنیم. بنابراین می بایست از حالت ایده آلی که در بخش قبل به آن پرداختیم فاصله بگیریم و حالت واقعی تری را بررسی کنیم که در آن تنها تعداد محدودی حالت در دسترس داریم و می خواهیم با انجام آزمایش روی آنها حالت کوانتومی را تخمین بزنیم. برای آشنا شدن با این موضوع نخست یک مثال از دنیای کلاسیک را بررسی می کنیم.

۱.۲.۶ استنتاج آماری کلاسیک

فرض کنید که چندین سکه نامتوازن در اختیار داریم که با شماره های ۱ تا m شماره گذاری شده اند. سکه k ام دارای احتمالات p_k برای شیر آمدن و q_k برای خط آمدن است. یکی از این سکه ها را به ما می دهند و ما حق داریم که آن را N بار بیندازیم. در این N بار آزمایش N_+ بار سکه شیر آمده است. می خواهیم از نتیجه آزمایش حدس بزنیم که کدام سکه را به ما داده اند. می دانیم که روابط زیر برقرارند:

حال با استفاده از رابطه بین احتمالات شرطی برای دو متغیر تصادفی که به صورت زیر است:

می توانیم مجهول مسئله یعنی $P(k|N_+)$ را بدست بیاوریم. در واقع خواهیم داشت:

$$P(k|N_+) = \frac{P(i|N_+)P(k)}{P(N_+)} = \frac{P(N_+|k)P(k)}{\sum_{k=1}^m P(N_+|k)P(k)}. \quad (82)$$

می توان یک متغیر تصادفی K تعریف کرد که همان شماره سکه مربوطه باشد. در این صورت بعد از انجام آزمایش و محاسبه احتمالات بالا می توانیم بهترین مقدار K را تخمین بزنیم. این مقدار را با K_{est} نشان می دهیم و مقدار آن را برابر با متوسط متغیر تصادفی K می گیریم. بنابراین خواهیم داشت:

$$K_{est} = \sum_{k=1}^m P(k|N_+)k = \frac{\sum_{k=1}^K P(N_+|k)P(k)}{\sum_k P(N_+|k)P(k)} \quad (83)$$

در صورتی که سکه ها را با احتمال یکنواخت به ما داده باشند قرار می دهیم $P(k) = const$ و در نتیجه رابطه بالا به شکل ساده زیر درمی آید:

$$K_{est} = \frac{\sum_{k=1}^K p_k^{N_+} q_k^{N-N_+} k}{\sum_{k=1}^K p_k^{N_+} q_k^{N-N_+}}. \quad (84)$$

به این ترتیب از روی نتیجه ای که از آزمایش بدست آمده است می توانیم محتمل ترین سکه ای را که به ما داده شده است استنتاج کنیم.

بعد از این مثال کلاسیک می خواهیم این نحوه استنتاج را به دنیای کوانتومی و مسئله تخمین حالت تعمیم دهیم. نخست برای سادگی فرض می کنیم که تنها یک نسخه از یک حالت کوانتومی مثل ρ به ما داده شده است. روی این حالت ما یک اندازه گیری $POVM = \{E_i\}$ انجام می دهیم. می خواهیم از روی نتیجه این آزمایش محتمل ترین حالت ρ را تخمین بزنیم. برای این کار مثل حالت کلاسیک عمل می کنیم. می دانیم که اگر حالت ρ را به ما داده باشند احتمال بدست آوردن نتیجه k برابر است با

$$P(k|\rho) = tr(E_k \rho). \quad (85)$$

هدف ما بدست آوردن $P(\rho|k)$ است. بنابراین می نویسیم:

$$P(\rho|k) = \frac{P(k|\rho)P(\rho)}{P(k)} = \frac{P(k|\rho)}{\int P(k|\rho)P(\rho)d\rho} \quad (86)$$

که در آن $P(\rho)$ چگالی احتمال این است که حالتی که به ماده شده است ρ باشد و $d\rho$ یک اندازه معین روی فضای ماتریس های چگالی است. درست مثل حالت کلاسیک و رابطه ۸۴ می توانیم با استفاده از روابط بالا بهترین تخمین برای حالت را به ترتیب زیر بدست آوریم:

$$\rho_{est} = \int P(\rho|k)\rho d\rho = \frac{\int \text{tr}(E_k\rho)P(\rho)\rho d\rho}{\int \text{tr}(E_k\rho)P(\rho)d\rho} \quad (۸۷)$$

در مسئله بالا فرض کردیم که فقط روی یک نسخه از کیوبیت آزمایش و اندازه گیری انجام داده ایم. حال فرض کنید که روی N نسخه از کیوبیت یک اندازه گیری $POVM = \{E_1, E_2, \dots, E_K\}$ انجام می دهید. این اندازه گیری می تواند کاملاً کلی باشد به این معنا که یک اندازه گیری جدایی پذیر روی تک تک کیوبیت ها باشد یا این که یک اندازه گیری جمعی روی تمام کیوبیت ها یا چیزی بین این دو حالت باشد. در این صورت روابط بالا به شکل ساده ای تعمیم پیدا می کنند. به این معنا که احتمال این که اندازه گیری $POVM$ نتیجه i تولید کند برابر است با $P(i|\rho^{\otimes N}) = \text{tr}(E_i\rho^{\otimes N})$. در این صورت خواهیم داشت:

$$P(\rho^{\otimes N}|i) = \frac{P(i|\rho^{\otimes N})}{P(i)} = \frac{P(i|\rho^{\otimes N})}{\int P(i|\rho^{\otimes N})P(\rho^{\otimes N})d\rho^{\otimes N}}. \quad (۸۸)$$

حال به این مسئله توجه می کنیم که چون می دانیم همه نسخه ها یکسان هستند. بنابراین

$$P(\rho^{\otimes N}) = P(\rho), \quad P(\rho^{\otimes N}|i) = P(\rho|i), \quad (۸۹)$$

بنابراین با کنار هم قرار دادن همه اجزا به این نتیجه می رسیم:

$$\rho_{est} = \frac{\int \text{tr}(E_k\rho^{\otimes N})P(\rho)\rho d\rho}{\int \text{tr}(E_k\rho^{\otimes N})P(\rho)d\rho}. \quad (۹۰)$$

در تمرین های زیر فرض کنید که تابع توزیع کیوبیتی که به شما داده می شود روی کره بلوخ یکنواخت است.

تمرین: فرض کنید که یک کیوبیت به شما داده شده و شما روی این کیوبیت یک اندازه گیری $POVM = (E_0, E_1)$ با $E_0 = |0\rangle\langle 0|$ و $E_1 = |1\rangle\langle 1|$ انجام می دهید و نتیجه ۱ بدست می آورید. بهترین تخمینی که برای حالت این کیوبیت می زند چیست؟

تمرین: فرض کنید که دو کیوبیت به شما داده می شود و شما روی این دو کیوبیت یک اندازه گیری $POVM = (E_0, E_1)$ انجام می دهید که در آن

$$E_0 = |0, 0\rangle\langle 0, 0| + |1, 1\rangle\langle 1, 1|, \quad E_1 = |0, 1\rangle\langle 0, 1| + |1, 0\rangle\langle 1, 0|, \quad (۹۱)$$

و نتیجه ° بدست می آورید. فرض کنید که هر کدام از دو کیوبیت ها با احتمال یکسان روی کره بلوخ داده شده اند. بهترین تخمینی که برای حالت این دو کیوبیت می زنید چیست؟

تمرین: : فرض کنید که دو نسخه یکسان از یک کیوبیت به شما داده می شود و شما روی اولی عملگر σ_x و روی دومی عملگر σ_z را اندازه می گیرید و به ترتیب ویژه مقدارهای ۱ و -۱ را بدست می آورید. بهترین تخمینی که برای حالت کیوبیت می زنید چیست؟

تمرین: فرض کنید که N نسخه یکسان از یک کیوبیت به شما داده می شود و روی هر کدام از نسخه ها یک آزمایش σ_z انجام می دهید و در هر مورد مقدار ۱ را بدست می آورید. بهترین تخمینی که برای این حالت می زنید چیست؟

تمرین: : از یک کیوبیت N نسخه یکسان به شما داده می شود و روی همه آنها اندازه گیری در راستای σ_z انجام می دهید. در N_1 مورد نتیجه برابر با ۱ و در بقیه موارد نتیجه برابر با -۱ است. بهترین تخمینی که برای حالت کیوبیت می زنید چیست.

تمرین: : از یک کیوبیت N نسخه یکسان به شما داده می شود و روی نیمی از آنها آزمایش σ_x و روی نیم دیگر آزمایش σ_z انجام می دهید و در همه موارد نتیجه ۱+ بدست می آورید. بهترین تخمینی که برای حالت کیوبیت می زنید چیست؟

تمرین: : آلیس $3N$ نسخه از یک حالت را برای باب می فرستد. باب روی N نسخه از آن ها آزمایش σ_z انجام می دهد و روی N نسخه از آنها آزمایش σ_x و روی N نسخه از آنها آزمایش σ_y انجام می دهد. در این آزمایش ها به ترتیب N_z^+ ، N_x^+ و N_y^+ تا نتیجه مثبت بدست می آید. بهترین تخمینی که باب می تواند برای حالت ارسال شده توسط آلیس بزند چیست؟

۷ اندازه گیری بهینه

در بخش گذشته یاد گرفتیم که اگر یک یا چند نسخه یکسان از یک حالت کوانتومی را به ما بدهند و ما یک اندازه گیری معین روی این حالت ها انجام دهیم چگونه بهترین تخمین را برای حالت کوانتومی بدست آوریم. در این بخش با سوال آخر مواجهیم. بهترین اندازه گیری چیست؟ چه نوع $POVM$ یا چه نوع مشاهده پذیرهایی را برای اندازه گیری انتخاب کنیم که بهترین تخمین برای حالت را به ما بدهند. بحث خود را با یک مثال شروع می کنیم. فرض کنید که آلایس تعداد زیادی کیوبیت را در حالت های یکسان $|n\rangle$ در اختیار دارد و یک نمونه از آن را برای باب می فرستد. باب قرار است که حالت ذره را شناسایی کند. اگر باب هیچ نوع اندازه گیری انجام ندهد می تواند تنها حالت فرستاده شده را حدس بزند و بگوید که حالت فرستاده شده $|m\rangle$ است. در این حالت تشابه حالت حدس زده شده با حالت واقعی برابر است با $F = |\langle m|n\rangle|^2$. در این صورت متوسط تشابه برابر است با :

$$\bar{F} := \int d\mathbf{n} |\langle m|\mathbf{n}\rangle|^2 \quad (92)$$

به دلیل تقارن دوارنی عبارت بالا می توان محور z را در راستای m گرفت که در این صورت انتگرال بالا به راحتی محاسبه می شود:

$$\bar{F} := \frac{1}{4\pi} \int d\cos\theta d\phi \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{4}. \quad (93)$$

این کمترین کاری بود که باب می توانست انجام بدهد. حال فرض کنید که باب بهتر از این عمل کند و در یک راستای دلخواه مثل m اندازه گیری کند و اگر نتیجه $+1$ را بدست آورد، اعلام کند که حالت آلایس همان حالت $|m\rangle$ بوده و اگر نتیجه -1 را بدست آورد اعلام کند که حالت ارسال شده توسط آلایس نیز $| -m\rangle$ بوده است. می خواهیم ببینیم در این صورت تشابه حالت اعلام شده توسط باب و حالت ارسال شده توسط آلایس به طور متوسط چقدر است؟ برای این کار دقت می کنیم که احتمال این که باب مقدار $+1$ را بدست بیاورد برابر است با $|\langle m|\mathbf{n}\rangle|^2$. بنابراین حالتی که باب حدس می زند یک حالت به صورت زیر است:

$$\rho_{Bob} = |m\rangle\langle m| |\langle m|\mathbf{n}\rangle|^2 + |-m\rangle\langle -m| |\langle -m|\mathbf{n}\rangle|^2. \quad (94)$$

تشابه این حالت با حالت $|n\rangle$ برابر است با:

$$F(|n\rangle, \rho_{Bob}) = \langle n|\rho_{Bob}|n\rangle = |\langle m|\mathbf{n}\rangle|^4 + |\langle -m|\mathbf{n}\rangle|^4, \quad (95)$$

و تشابه متوسط برابر خواهد بود با انتگرال این روی تمام حالت های ورودی. بازهم به دلیل تقارن دورانی می توان محور z را روی m گرفت که در این صورت انتگرال تبدیل خواهد شد به :

$$\overline{F} = \frac{1}{4\pi} \int d\cos\theta d\phi \left[\cos^4 \frac{\theta}{2} + \sin^4 \frac{\theta}{2} \right] = \frac{2}{3}. \quad (96)$$

ثابت شده است که اگر باب حالت درهم تنیده ای بین خودش و باب نداشته باشد، بهتر از این نمی تواند عمل کند.

حال فرض کنید که آلیس دو نسخه از کیوبی خودش را به باب می فرستد. باب می تواند اندازه گیری های مختلفی را روی این دو کیوبیت انجام دهد. این اندازه گیری ها در سه دسته کلی قرار می گیرند و این دسته بندی برای وقتی که تعداد نسخه های کوانتومی ارسال شده بیشتر از دو تا باشد نیز صحیح است. این سه دسته اندازه گیری عبارتند از:

یک - اندازه گیری های مجزا و مستقل روی هر کدام از کیوبیت ها. مثلاً باب می تواند کیوبیت اول را در راستای m_1 و کیوبیت دوم را در راستای m_2 اندازه بگیرد.

تمرین: : آلیس دو کیوبیت یکسان از نوع $|n\rangle$ برای باب می فرستد. باب روی هر دوی آنها در جهت $|m\rangle$ اندازه گیری می کند. اگر نتیجه $++$ بود اعلام می کند که حالت فرستاده شده $|m\rangle$ بوده و اگر نتیجه $--$ بود اعلام می کند که حالت فرستاده شده $|m\rangle$ بوده است. و اگر نتیجه $+-$ یا $-+$ بود اعلام می کند که حالت فرستاده شده یک حالت کاملاً مخلوط $\frac{I}{2}$ بوده است. تشابه حالت اعلام شده توسط باب و آلیس به طور متوسط چقدر است؟

تمرین: : آلیس $2N+1$ کیوبیت یکسان در حالت $|n\rangle$ را برای باب می فرستد و باب روی همه این ها در جهت m اندازه گیری می کند. اگر جواب $+$ اکثریت داشت اعلام می کند که حالت فرستاده شده $|m\rangle$ بوده است و اگر جواب $-$ اکثریت داشت اعلام می کند که حالت فرستاده شده $|m\rangle$ بوده است. تشابه حالت اعلام شده توسط باب با حالتی که آلیس فرستاده است به طور متوسط چقدر است؟

دو - اندازه گیری های تطبیقی. به این معنا که اندازه گیری روی کیوبیت دوم بستگی به نتیجه اندازه گیری روی کیوبیت

اول دارد. به عنوان مثال باب می تواند روی کیویت اول در جهت z اندازه گیری کند و اگر نتیجه مثبت بود، روی کیویت دوم بازهم در راستای z اندازه گیری کند و اگر نتیجه منفی بود روی کیویت دوم در راستای x اندازه گیری کند.

پ - اندازه گیری های جمعی به این معنا که باب روی هر دو کیویت باهم اندازه گیری انجام می دهد و این اندازه گیری قابل تجزیه به اندازه گیری های مجزا روی کیویت ها نیست.

تمرین: : آلیس دو نسخه از یک حالت را برای باب می فرستد. باب یک اندازه گیری $POVM$ روی این دو حالت انجام می دهد که عناصر $POVM$ عبارتند از:

$$E_i = \alpha |\Phi_i\rangle\langle\Phi_i| + \beta |\Psi_s\rangle\langle\Psi_s|, \quad (97)$$

که در آن $|\Phi_i\rangle = |m_i\rangle|m_i\rangle$. در اینجا m_i ها بردارهای متناظر با راس های یک چهاروجهی به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} m_0 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) & m_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1) \\ m_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, -1) & m_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 1) \end{aligned} \quad (98)$$

و $|\Psi_s\rangle$ یک حالت با اسپین کل صفر است یعنی $|\Psi_s\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|0, 1\rangle - |1, 0\rangle)$.

الف: مقادیر α و β را چنان پیدا کنید که اندازه گیری انجام شده واقعا یک $POVM$ باشد.

ب: استراتژی باب این است که هرگاه نتیجه i بدست آید وی اعلام می کند که حالت ارسال شده حالت m_i بوده است. به طور متوسط این استراتژی چه اندازه موفق است. موفقیت این استراتژی را با متوسط تشابه حالت اعلام شده توسط باب و حالت ارسال شده توسط آلیس بسنجید.