

توصیف حالت در مکانیک کوانتومی

وحیدکریمی پور- دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

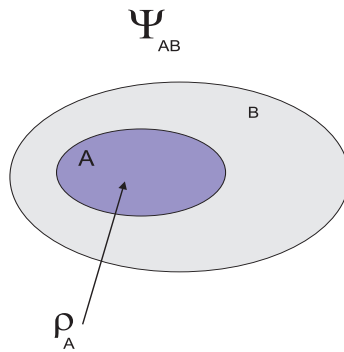
۳ آذر ۱۳۹۱

۱ مقدمه

بنابراین موضوع کوانتومی حالت یک سیستم بسته با یک بردار در یک فضای هیلبرت تعیین می شود. این بردار توسط یک عملگر یکانی در طول زمان تحول می یابد و اندازه گیری هر مشاهده پذیر این بردار را به ویژه بردارهای آن عملگر متناظر با آن مشاهده پذیر تصویر می کند. در عمل یک سیستم کوانتومی بندرت می تواند از محیط اطراف خود مستقل باشد. در بسیاری اوقات نیز ما نه به کلیت یک سیستم کوانتومی بلکه به اجزای آن علاقمندیم. به عنوان مثال در یک تله یونی یا تله اتمی که چندین اتم را در یک حالت کوانتومی نگاه داشته است علاقمندیم که حالت یکی از یون ها را تعیین کنیم، و روی آن اندازه گیری کنیم و تحول زمانی آن را بدست آوریم. هم چنین امروزه در آزمایشگاه می توان حالت هایی از یک زوج فوتون درست کرد مثل حالت زیر

$$|\psi\rangle = \alpha|H, V\rangle + \beta|V, H\rangle \quad (1)$$

که در آن H و V نشان دهنده قطبش فوتون ها در راستای افقی و عمودی است. می توان چنین فوتون هایی را ده ها کیلومتر از یک دیگر جدا کرد و هنوز حالت آنها به شکل بالا باقی مانده باشد. در چنین حالتی وقتی که روی یکی از فوتون ها آزمایش می کنیم می خواهیم نتایج آزمایش های خود را در چارچوب مکانیک کوانتومی با حالتی که به آن فوتون نسبت می دهیم توصیف کنیم. بنابراین سوال اساسی ای که با آن روبرو هستیم آن است که هرگاه یک سیستم کوانتومی بسته با یک بردار حالت توصیف شود، اجزای آن سیستم در چه حالتی هستند و چگونه می بایست آنها را توصیف کرد. در این درس پاسخ این سوال را خواهیم آموخت.



شکل ۱: یک سیستم بسته با یک بردار حالت توصیف می شود، ولی اجزای آن با یک ماتریس چگالی مشخص خواهند شد.

۲ ماتریس چگالی

فرض کنید که دوزره اسپین یک دوم داریم و این دوزره درحالتی مثل حالت زیر قراردارند:

$$|\psi\rangle_{AB} = a|+, +\rangle + b|+, -\rangle + c|-, +\rangle + d|-, -\rangle \quad (۲)$$

می پرسیم که حالت ذره A چیست. در اینجا درست است که هر دو ذره در یک حالت مشخص قراردارند ولی نمی توان به ذره A بردارحالت مشخصی نسبت داد. در این مورد و در تمامی موارد مشابه که دستگاه کوانتومی مورد نظر ما جزئی از یک دستگاه بزرگتر است حالت آن با یک ماتریس چگالی مشخص می شود. به طور کلی فرض کنید که یک سیستم از دو بخش A و B تشکیل شده باشد. بنا بر اصول مکانیک کوانتومی به این سیستم فضای هیلبرت $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ نسبت داده می شود. فرض کنید که $\{|i\rangle\}_{i=1}^M$ یک پایه برای $\mathcal{H}_A$ و $\{|\mu\rangle\}_{\mu=1}^N$ یک پایه برای $\mathcal{H}_B$ باشد. در این صورت یک حالت کلی از سیستم AB توسط بردار حالت زیر داده می شود، شکل ۲:

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i,\mu} \psi_{i\mu} |i, \mu\rangle. \quad (۳)$$

حال هر عملگر M_A روی دستگاه A چیزی نیست جز عملگری به شکل $M \otimes I$. در نتیجه خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} \langle M \rangle_A &= \langle \psi | M \otimes I | \psi \rangle = \text{tr}_{AB}((M \otimes I) |\psi\rangle \langle \psi|) = \text{tr}_A(\text{tr}_B((M \otimes I) |\psi\rangle \langle \psi|)) \\ &= \text{tr}_A(M \rho_A) \end{aligned} \quad (۴)$$

که در آن

$$\rho_A = \text{tr}_B(|\psi\rangle\langle\psi|) \quad (5)$$

ماتریس چگالی دستگاه A نامیده می شود. به این ترتیب هر عنصر ماتریسی روی دستگاه A را می توان به صورت $\text{tr}(M\rho)$ نوشت که در آن ρ از رابطه بالا تعیین می شود و جانشین حالت کوانتومی دستگاه A است. به طریق مشابه ماتریس چگالی دستگاه B با رابطه $\rho_B = \text{tr}_A(|\psi\rangle\langle\psi|)$ داده می شود. می توان فرم صریح تر ماتریس چگالی را نیز بدست آورد. با توجه به رابطه (3) خواهیم داشت:

$$\rho_A = \sum_{i,j} \rho_{ij} |i\rangle\langle j| \quad (6)$$

که در آن

$$(\rho_A)_{ij} = \sum_{\mu} \psi_{i\mu} \psi_{j\mu}^*, \quad (7)$$

و

$$\rho_B = \sum_{\mu;\nu} \rho_{\mu\nu} |\mu\rangle\langle\nu|, \quad (8)$$

که در آن

$$(\rho_B)_{\mu\nu} = \sum_i \psi_{i\mu} \psi_{i\nu}^*. \quad (9)$$

با توجه به این عبارت ها براحتمی می توان خواص سه گانه ماتریس چگالی را تحقیق کرد یعنی این که ρ یک ماتریس هرمیتی مثبت با رد برابر با واحد است.

حال که با مفهوم ماتریس چگالی آشنا شدیم می توانیم اصول موضوع مربوط به حالت و اندازه گیری را بازنویسی کنیم.

اصل اول: حالت یک سیستم در یک فضای هیلبرت یک ماتریس هرمیتی مثبت با رد واحد است که ماتریس چگالی نامیده می شود و معمولاً با ρ نشان داده می شود.

اصل دوم: اندازه گیری تصویری: هر اندازه گیری روی یک سیستم با مجموعه ای از عملگرهای تصویری $\{P_m\}$ مشخص می شود که در شرایط زیر صدق می کنند:

$$\begin{aligned} P_m P_n &= \delta_{m,n} P_m \\ \sum_m P_m &= I, \end{aligned} \quad (10)$$

که در آن I عملگر واحد روی فضای هیلبرت سیستم است. هرگاه حالت قبل از اندازه گیری را با ρ نشان دهیم حالت بعد از اندازه گیری تنها با احتمال مشخص می شود به این معنا که با احتمال $P(m) := \text{tr}(P_m \rho P_m)$ حالت بعد از اندازه گیری عبارت خواهد بود از

$$\rho'_m := \frac{P_m \rho P_m}{\text{tr}(P_m \rho P_m)}. \quad (11)$$

اگر روی آنرا میلی از حالت های ورودی که با حالت ρ مشخص می شوند اندازه گیری فوق را انجام دهیم و حالت های خروجی متفاوت را از هم جدا نکنیم، آنرا میلی خروجی با ماتریس چگالی زیر توصیف می شود^۱:

$$\rho' := \sum_m P(m) \rho'_m = \sum_m P_m \rho P_m \quad (12)$$

۳ حالت های یک کیوبیت

کیوبیت ساده ترین سیستم کوانتومی است که فضای هیلبرت اش دو بعد دارد. حالت یک کیوبیت را معمولاً به صورت

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, \quad (13)$$

می نویسیم که در آن $|0\rangle$ و $|1\rangle$ پایه محاسباتی خوانده می شود. هرگاه عملگرهای پاولی را به صورت زیر بنویسیم:

$$X := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad Z := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

آنگاه پایه محاسباتی همان ویژه بردارهای عملگر Z خواهد بود. ویژه بردارهای عملگر X این ها هستند:

$$|x, +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad |x, -\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle), \quad (15)$$

معمولاً این ویژه بردارها را به دلیل وفور استفاده از آنها با $|+\rangle$ و $|-\rangle$ نشان می دهیم. همانطور که از درس های مکانیک کوانتومی می دانیم

می توان حالت یک کیوبیت را به صورت زیر پارامتریزه کرد

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle, \quad (16)$$

^۱ برای بیان دقیق این اصل من مرهون یک بحث از طریق ای-میل با آقای مهدیار نوربالا هستم.

که در آن $0 \leq \theta \leq \pi$ و $0 \leq \phi \leq 2\pi$. چنین حالتی در واقع ویژه بردار عملگر پاولی $\hat{n} \cdot \sigma$ است که در آن $\hat{n}$ بردار یکه ای است که در روی کره دو بعدی در جهت مشخص شده توسط زاویه θ و ϕ قرار گرفته است یعنی $\hat{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$.

۴ کره بلوخ

در بخش قبلی حالت خالص یک کیوبیت را معرفی کردیم. کلی ترین حالت یک کیوبیت با یک ماتریس چگالی دو در دو داده می شود. این ماتریس را با ρ نشان می دهیم. از آنجا که ماتریس یک و ماتریس های پاولی یک پایه برای فضای ماتریس های دو در دو تشکیل می دهند می توان این ماتریس را به شکل زیر نوشت:

$$\rho = \frac{1}{4}(r \cdot I + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} r_1 + z & x - iy \\ x + iy & r_1 - z \end{pmatrix} \quad (17)$$

که در آن $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ، ماتریس های پاولی هستند و ضریب $1/2$ برای راحتی بیرون کشیده شده است.

حال دقت می کنیم که:

الف: ρ هرمیتی است. بنابراین ضرایب $\vec{r}$ ، حقیقی هستند.

ب: $tr(\rho) = 1$. بنابراین $r_1 = 1$.

ج: $\rho \geq 0$. برای تامین این شرط می بایست ویژه مقادیرهای ρ را حساب کنیم. یک محاسبه ساده نشان می دهد که ویژه مقادیرهای ρ عبارتند

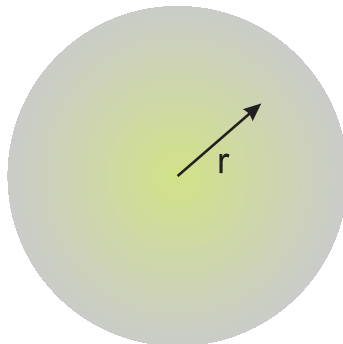
از:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{4}(1 \pm r) \quad (18)$$

که در آن r اندازه بردار $\vec{r}$ است.

بنابراین برای مثبت بودن کافی است که طول بردار $\vec{r}$ از یک کمتر باشد: یعنی $r \leq 1$. به این ترتیب بین هر ماتریس چگالی و یک نقطه از

یک کره به شعاع واحد یک تناظر یک به یک برقرار می شود. این کره بلوخ نام دارد که در شکل 4 نشان داده شده است. نقاط روی سطح کره



شکل ۲: کره بلوخ. نقاط روی کره متناظر با حالت های خالص و نقاط درون کره متناظر با حالت های آمیخته هستند.

بلوخ نقاطی هستند که در آنها $r = 1$ و بنابراین ویژه مقادیر ρ برابر با یک و صفر هستند. در نتیجه این نقاط متناظر با حالت های خالص هستند.

درواقع براحتی می توان نشان داد که هرگاه $r = 1$ باشد یعنی r برابر با یک بردار یکه $\mathbf{n}$ باشد آنگاه

$$\rho \equiv \frac{1}{4}(I + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = |\mathbf{n}\rangle\langle\mathbf{n}| \quad (19)$$

که در آن $|\mathbf{n}\rangle$ حالت یک ذره با اسپین درجهت بردار یکه $\mathbf{n}$ است. از طرف دیگر مرکز کره یعنی $r = 0$ متناظر با حالت کاملاً مخلوط $\rho = \frac{1}{4}I$ است. هرچه از مرکز کره به طرف مرز پیش برویم به درجه خلوص حالت ها اضافه می شود.

۱.۴ گیت های یک کیوبیتی

یک عملگر یکانی روی یک کیوبیت را یک گیت تک-کیوبیتی می خوانیم. بنابراین یک گیت تک-کیوبیتی به این صورت نوشته می شود:

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \quad (20)$$

که در آن $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. چنین گیتی را می توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$U = e^{i\phi I + i\theta \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}} \quad (21)$$

به این ترتیب یک گیت تک-کیوبیتی را چهار پارامتر θ, ϕ و $\mathbf{n}$ پارامتریزه می شود. البته این فقط یکی از راه های پارامتریزه کردن است و خواننده در تمرین ها می تواند راه های دیگری غیر از این نیز یاد بگیرد. مشهورترین عملگرهای تک کیوبیتی همان عملگرهای پاولی X ، Y و Z

هستند. عملگر X را عملگر بیت-برگردان یا $bit - flip$ و عملگر Z را عملگر فاز-برگردان یا $phase - flip$ می نامند. دلیل اش هم واضح است زیرا:

$$X(a|\cdot\rangle + b|1\rangle) = a|1\rangle + b|\cdot\rangle, \quad Z(a|\cdot\rangle + b|1\rangle) = a|\cdot\rangle - b|1\rangle. \quad (22)$$

عملگر XZ نیز که منهای یک فاز i همان عملگر Y است هم فاز و هم بیت را برمی گرداند. عملگر دیگری که خیلی مهم است عملگر هادامارد است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

این عملگر ویژه بردارهای عملگرهای X و Z را به هم تبدیل می کند.

تمرین: نشان دهید که $H^2 = I$. هم چنین نشان دهید که عملگر هادامارد را می توان به صورت زیر نوشت:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r,s=\cdot,1} (-1)^{rs} |r\rangle\langle s|. \quad (24)$$

تمرین: حالتی را در نظر بگیرید مثل

$$|\phi\rangle := \sum_{r=\cdot,1} \phi_r |r\rangle, \quad (25)$$

نشان دهید که

$$H|\phi\rangle = |\tilde{\phi}\rangle = \sum_{r=\cdot,1} \tilde{\phi}_r |r\rangle, \quad (26)$$

که در آن

$$\tilde{\phi}_r = \sum_{s=\cdot,1} (-1)^{rs} \phi_s. \quad (27)$$

۵ حالت های یک کیودیت

اگرچه طبیعی ترین کاندیدا برای ذخیره و پردازش یک واحد اطلاعات کوانتومی یک کیوبیت یعنی یک سیستم کوانتومی دوحالته است، ولی هم از نظر تئوری و هم تجربی می بایست امکان استفاده از سیستم های کوانتومی با تعداد بیشتر از دو حالت را نیز در نظر گرفت. ممکن است سرانجام یک سیستم کوانتومی d حالت تمامی ملاک های مورد نیاز برای رایانش کوانتومی، مثل قابلیت کنترل دقیق، زمان وادوسی زیاد، و هم چنین مقیاس پذیری

را برآورده کند. در این صورت می بایست رایانش کوانتومی را حتماً با استفاده از این حالت ها که به آن ها کیودیت *Qudit* می گویند انجام داد. از نظر تئوری نیز نشان داده شده است که مثلاً در رمزنگاری کوانتومی استفاده از کیودیت ها امنیت پروتکل را نسبت به کیوبیت ها بالاتر می برد. هم چنین صورت بندی آلوگوریتم ها و فرایندهای کوانتومی در بعد دلخواه باعث می شود که درک بهتر و عمیق تری از چگونگی کارکرد آنها بدست آوریم.

حالت خالص یک کیودیت (یک سیستم d حالتی) به صورت زیر نوشته می شود:

$$|\psi\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle + \dots + a_{d-1}|d-1\rangle \quad (28)$$

بنابراین یک حالت دلخواه با $d-1$ پارامتر حقیقی مشخص می شود. برای آنکه حالت های آمیخته کیودیتی را نیز بفهمیم می بایست عملگرهای هرمیتی کیودیتی را مطالعه کنیم.

می توان برای این فضا یک پایه از عملگرهای هرمیتی نیز در نظر گرفت. چنین پایه ای به صورت زیر تعریف می شود:

$$X_{ij} := E_{ij} + E_{ji}, \quad Y_{ij} := -iE_{ij} + iE_{ji}, \quad Z_i := E_{i,i} - E_{i+1,i+1}, \quad (29)$$

که در آن $E_{ij} = |i\rangle\langle j|$. دقت کنید که عملگرهای $X^r Z^s$ رابطه ضربی ساده ای باهم دارند ولی عملگرهای هرمیتی که در بالا تعریف کردیم رابطه جابجایی شان باهم ساده است.

تمرین: نشان دهید که تعداد این عملگرهای هرمیتی برابر است با $d^2 - 1$.

تمرین: اگر این عملگرها را به صورت کلی با Γ_i نشان دهیم، با توجه به ضرب داخلی $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^\dagger)$ که برای عملگرها تعریف می شود، نشان دهید که این عملگرها بر یکدیگر عمودند. سپس هرکدام از آنها را در ضرب مناسبی چنان ضرب کنید که به صورت زیر بهنجار باشند:

$$\langle \Gamma_i, \Gamma_j \rangle = \frac{1}{d^2 - d} \delta_{ij} I. \quad (30)$$

۱.۵ آیا برای کیودیت ها کره بلوخ وجود دارد؟

ماتریس چگالی یک کیودیت را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\rho = \frac{1}{d}(I + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Gamma}), \quad (31)$$

که در آن $i = 1, \dots, d^2 - 1$ یک پایه از عملگرهای هرمیتی و بدون رد در فضای یک کیودیت است و $\mathbf{r}$ نیز یک بردار $d^2 - 1$ مولفه ای است. بنابراین یک ماتریس چگالی کیودیتی با تعداد $d^2 - 1$ پارامتر مشخص می شود که حتی برای یک کیوتریت (یعنی یک سیستم سه حالته) تعداد زیاد d پارامتر است. به شکل فوق مطمئن هستیم که ماتریس ρ هرمیتی و بدون رد است. اما ρ هنوز یک ماتریس چگالی نیست زیرا الزام مثبت نیست. ویژه مقادیرهای چنین ماتریسی رابطه ساده ای با پارامترهای مشخص کننده $\mathbf{r}$ ندارد. این رابطه هرچه که هست رابطه ی ساده ای نیست که فضای ماتریس های چگالی کیودیتی را به صورت یک کره یا یک شکل هندسی ساده در بیاورد. دقت کنید که حتی در مورد $d = 3$ نیز فضای ماتریس های چگالی یک زیرمجموعه از فضای R^8 بعدی ۸ است. بنابراین تصور چنین فضایی بسیار مشکل است. از نظر هندسی و جبری در این مورد پژوهش های متعددی انجام شده و در حال انجام است.

تمرین: نشان دهید که هر ماتریس چگالی به صورت نشان داده شده در رابطه ی 31 در صورتی که طول بردار $\mathbf{r}$ برابر با واحد باشد یک حالت خالص را نشان می دهد.

عملگرهای هرمیتی ای که در بالا ساختیم تعمیم طبیعی عملگرهای پاوولی به بعد d بودند. به نحو دیگری هم می توان عملگرهای پاوولی را به بعد دلخواه تعمیم داد که برای منظورهای دیگری مناسب است. اگر دقت کنیم عملگرهای پاوولی هم هرمیتی هستند و هم یکانی. حالا تعمیمی از این عملگرها در بعد دلخواه بدست می آوریم که یکانی باشند و نه هرمیتی. برای تعمیم آنها به عملگرهای یکانی کافی است که عملگرهای X و Z را به صورت زیر به کیودیت ها تعمیم دهیم:

$$X|k\rangle = |k+1\rangle, \quad Z|k\rangle = \omega^k|k\rangle, \quad (32)$$

که در آن $\omega^d = 1$ یعنی $\omega = e^{\frac{2\pi i}{d}}$ و همه جمع ها به سنج d انجام می شود. این عملگرها هرمیتی نیستند ولی یکانی اند. رابطه جابجایی آنها به صورت زیر است:

$$ZX = \omega XZ. \quad (33)$$

عملگرهای $X^r Z^s$ که در آن $r, s = 0, 1, \dots, d-1$ یک پایه از عملگرهای یکانی برای فضای هیلبرت یک کیودیت می سازند.

تمرین: رابطه جابجایی $X^r Z^s$ را با $X^a Z^b$ پیدا کنید.

تمرین: ویژه بردارهای عملگرهای Z و X را پیدا کنید.

تمرین: ویژه بردارهای عملگر $X^a Z^b$ را برای وقتی که a, b دو عدد صحیح هستند بدست آورید.

تمرین: عملگر هادامارد را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$H = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i,j=0}^{d-1} \omega^{ij} |i\rangle \langle j|. \quad (34)$$

نشان دهید که این عملگر ویژه بردارهای Z را به ویژه بردارهای X تبدیل می کند. هم چنین نشان دهید که توان چهارم این عملگر برابر با عملگر واحد است یعنی $H^4 = I$.

۶ حالت های پیوسته

یکی از راه های عملی کردن رایانش کوانتومی استفاده از اپتیک خطی و غیرخطی است. دست کم دو دلیل برای این امیدواری وجود دارد نخست اینکه تولید حالت های کوانتومی نور در آزمایشگاه ساده است و سابقه ای طولانی و موفق در اپتیک کوانتومی و اپتیک لیزر برای تولید و کنترل چنین حالت هایی وجود دارد. دوم اینکه زمان وادوسی فوتون عملاً بی نهایت است. البته این زمان وادوسی خیلی بالا یک جنبه منفی نیز دارد و آن اینکه برهم کنش فوتون ها با یکدیگر بسیار ضعیف است و به همین دلیل به دشواری می توان گیت های دو فوتونی عمومی روی فوتون ها ساخت. با این وجود استفاده از حالت های نور همچنان یک کاندیدای مهم برای رایانش کوانتومی باقی خواهد ماند. به همین دلیل شایسته است که آشنایی مختصری با حالت های کوانتومی نور پیدا کنیم. خوشبختانه در درسهای مقدماتی مکانیک کوانتومی این آشنایی را تا حدود زیادی پیدا کرده ایم و تنها کافی است که کمی یافته های خود را با آنچه که در مورد فوتون ها باید بدانیم تطبیق دهیم.

یک نوسانگر هارمونیک ساده را با هامیلتونی زیر در نظر بگیرید:

$$H = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \hat{x}^2). \quad (35)$$

همواره می توان دستگاهی واحدهایی اختیار کرد که هامیلتونی یک نوسانگر در آن به صورت ساده زیر در بیاید. برای فضای هیلبرتی که این

هامیلتونی روی آن نمایش پیدا می کند می توان پایه ای از ویژه بردارهای عملگر $\hat{x}$ یا عملگر $\hat{p}$ در نظر گرفت. هم چنین می توان دو عملگر بالابرنده و پایین برنده، یا خلق و فنا را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\hat{a} := \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\hat{p}), \quad \hat{a}^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} - i\hat{p}). \quad (36)$$

این دو عملگر روابط جابجایی زیر را دارند:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad (37)$$

و با تعریف عملگر $\hat{N} := \hat{a}^\dagger \hat{a}$ ، روابط زیر برقرار خواهند بود:

$$[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}, \quad [\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger. \quad (38)$$

یک پایه دیگر برای همین فضای هیلبرت از ویژه حالت های عملگر $\hat{N}$ ساخته می شوند که در واقع ویژه حالت های انرژی هستند:

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle, \quad \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (39)$$

از مکانیک کوانتومی مقدماتی می دانیم که

$$\psi.(x) := \langle x|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad \tilde{\psi}.(p) := \langle p|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}p^2}. \quad (40)$$

بنابراین تابع موج حالت پایه نوسانگر هارمونیک چه در پایه مختصات و چه در پایه تکانه یک تابع ساده گاوسی است.

۱.۶ حالت های همدوس

از نظر فیزیکی حالت های پایه $|x\rangle$ ، $|p\rangle$ و $|n\rangle$ هرکدام معنای فیزیکی خاصی دارند. پایه دیگری که معنای فیزیکی خیلی جالبی دارد پایه حالت های همدوس است. این حالت ها به ترتیبی که خواهیم دید، نزدیک ترین حالت ها به حالت های کلاسیک هستند. بهترین تعریف برای این حالت ها به صورت زیر است. عملگر $\hat{a}$ را در نظر بگیرید. این عملگر یک عملگر هرمیتی نیست بنابراین اگر ویژه مقداری داشته باشد حتما یک عدد مختلط است. این ویژه مقدار را با عدد مختلط z و ویژه بردار مربوطه را با $|z\rangle$ نشان دهید. بنابراین داریم

$$\hat{a}|z\rangle = z|z\rangle. \quad (41)$$

تمرین: نشان دهید که این حالت را می توان به صورت زیر بسط داد:

$$|z\rangle = N \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (42)$$

عدد N را چنان انتخاب کنید که حالت فوق بهنجار باشد.

تمرین: نشان دهید که حالت بهنجار همدوس را می توان به صورت زیر نوشت:

$$|z\rangle = e^{z\hat{a}^\dagger - z^*\hat{a}}|0\rangle \quad (43)$$

عملگر $D(z, z^*) := e^{z\hat{a}^\dagger - z^*\hat{a}}$ عملگر جابجایی نامیده می شود.

تمرین: نشان دهید که رابطه زیر برقرار است:

$$D(z, z^*)D(w, w^*) = AD(z + z^*, w + w^*), \quad (44)$$

که در آن A یک عدد مختلط و تابعی از z و w است. این عدد را محاسبه کنید.

تمرین: نشان دهید که برای هر حالت همدوس میزان عدم قطعیت هایزنبرگ مساوی با مقدار کمینه یعنی $\frac{\hbar}{4}$ است. البته در دستگاه واحدهایی

که به کار برده ایم مقدار $\hbar$ برابر با یک است.

تمرین: نشان دهید که رابطه تمامیت زیر برقرار است:

$$\int dz dz^* |z\rangle \langle z| = I. \quad (45)$$

تمرین: مشاهده پذیر های زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \hat{x}' &:= \cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{p}, \\ \hat{p}' &:= -\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{p}. \end{aligned} \quad (46)$$

نشان دهید که برای این مشاهده پذیرها نیز میزان عدم قطعیت هایزنبرگ مساوی با مقدار کمینه یعنی $\frac{\hbar}{4}$ است. بنابراین می توان یک حالت همدوس

را با کمی تسامح به صورت نشان داده شده در شکل ?? نشان داد.

یک حالت خالص پیوسته را می توان به هرکدام از شکل های زیر نوشت:

$$|\psi\rangle = \int dx |x\rangle \langle x|\psi\rangle, \quad |\psi\rangle = \int dp |p\rangle \langle p|\psi\rangle, \quad |\psi\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n|\psi\rangle, \quad |\psi\rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2z |z\rangle \langle z|\psi\rangle, \quad (47)$$

و یا

$$|\psi\rangle = \int dx \psi(x) |x\rangle, \quad |\psi\rangle = \int dp \tilde{\psi}(p) |p\rangle, \quad |\psi\rangle = \sum_n \psi_n |n\rangle, \quad |\psi\rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2z \psi(z) |z\rangle. \quad (48)$$

یک حالت آمیخته نیز یک ماتریس هرمیتی و مثبت است که در هرکدام از پایه های فوق قابل نوشتن است. مثلاً می توان نوشت:

$$\rho = \int dx dy \rho(x, y) |x\rangle \langle y|, \quad (49)$$

و یا

$$\rho = \sum_{n,m} \rho_{n,m} |n\rangle \langle m|, \quad (50)$$

و یا

$$\rho = \frac{1}{\pi^2} \int d^2z d^2w \rho(z, w) |z\rangle \langle w|. \quad (51)$$

۲.۶ حالت های فشرده

حالت های فشرده حالت هایی هستند که در آنها عدم قطعیت در یکی از مختصه ها مثلاً در مکان کم شده و در مختصه دیگر مثلاً در تکانه زیاد شده است به نحوی که بازهم حاصل ضرب عدم یقین در دو مختصه مقدار کمینهی $\frac{\hbar}{2}$ باقی مانده است. چنین حالت هایی را برای نور و فوتون ها می توان براحتی در آزمایشگاه ساخت. از نظر ریاضی این حالت ها با اثر یک عملگر فشارنده *Squeezing Operator* روی حالت همدوس بدست می آیند. یک عملگر فشارنده برای یک مود به صورت زیر تعریف می شود:

$$S(\xi) := e^{\xi^* a^\dagger - \xi a^\dagger}, \quad (52)$$

که در آن $\xi := r e^{i\phi}$ یک عدد مختلط است. بنابراین یک حالت فشرده به صورت زیر است:

$$|z, \xi\rangle := S(\xi) |z\rangle, \quad (53)$$

که در آن $|z\rangle$ یک حالت همدوس است.

تمرین: نشان دهید که

$$e^{iN\phi} a e^{-i\phi N} = e^{-i\phi} a, \quad e^{iN\phi} a^\dagger e^{-i\phi N} = e^{i\phi} a^\dagger \quad (54)$$

با استفاده از این رابطه نشان دهید که عملگر فشارنده با پارامتر ξ با پارامتر مختلط $r^{i\phi} \xi$ را می توان با یک تبدیل یکانی از عملگر فشارنده با پارامتر حقیقی r بدست آورد.

تمرین:

با استفاده از لم بیکر - هاسدورف نشان دهید که

$$S(r)aS(-r) = \cosh ra + \sinh ra^\dagger, \quad S(r)a^\dagger S(-r) = \sinh ra + \cosh ra^\dagger. \quad (55)$$

تمرین: با استفاده از تمرین قبلی عدم یقین Δx و Δp را برای یک حالت فشردی $|z, r\rangle$ حساب کنید. نشان دهید که نسبت به یک حالت همدوس، اگرچه عدم یقین در یکی از این مشاهده پذیرها افزایش و در دیگری کاهش یافته ولی هم چنان حاصلضرب آنها مقدار ثابت $\frac{\hbar}{4}$ است.

تمرین: حال عدم یقین را برای یک حالت فشردی دلخواه مثل $|z, \xi\rangle$ بدست آورید.

تمرین: بسط یک حالت فشردی دلخواه را برحسب حالت های پایه $|n\rangle$ بدست آورید.

۳.۶ تابع مشخصه

بسط یک حالت برحسب بردارهای پایه آنچنانکه در روابط (۳۳-۳۴) نوشته شده است اگرچه کاملترین توصیف از یک حالت است ولی برای بسیاری اوقات به چنین توصیف کاملی نه نیاز داریم و نه به آن دسترسی داریم. معمولاً می خواهیم از یک حالت کوانتومی متوسط مشاهده پذیرها را بدست آوریم. معمولاً می خواهیم متوسط عملگرهایی مثل $a^m a^{\dagger n}$ را که در آن m و n اعداد صحیح مثبتی هستند بدست آوریم. بجای آنکه هر بار چنین متوسط هایی را حساب کنیم یک بار برای همیشه تابع مولدی را حساب می کنیم که چنین متوسط هایی را در دل خود دارد. به چنین تابع

مولدی تابع مشخصه یا *CharacteristicFunction* مربوط به آن حالت کوانتومی می‌گوییم. این تابع مشخصه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\chi(z, z^*) := \langle D(z, z^*) \rangle = \text{tr}(D(z, z^*)\rho) = \text{tr}(e^{za^\dagger - z^*a}\rho). \quad (56)$$

تمرین: تابع مشخصه‌ی یک حالت همدوس را بدست آورید. از روی آن متوسط کمیت‌های X, P, X^2, P^2 را بدست آورید.

تمرین: تمرین قبلی را برای یک حالت فشرده‌ی $|z, \xi\rangle$ تکرار کنید.

تمرین: تمرین قبلی را برای حالت پایه نوسانگر هارمونیک یعنی $|0\rangle$ تکرار کنید.

تمرین: یک حالت ρ یک حالت گاوسی خوانده می‌شود هرگاه تابع مشخصه‌ی آن یک تابع گاوسی باشد. کلی‌ترین مشاهده پذیر تابع دلخواهی است از مشاهده پذیرهای $\langle \hat{x} \rangle$ و $\langle \hat{p} \rangle$ و با تابع دلخواهی از عملگرهای $\hat{a}$ و $\hat{a}^\dagger$.

۴.۶ گیت‌های پیوسته

به هر عملگر یکانی که روی فضای هیلبرت یک نوسانگر هارمونیک عمل می‌کند یک گیت پیوسته می‌گوییم. بنابراین اگر $H(a, a^\dagger)$ یک تابع دلخواه از عملگرهای a و $a^\dagger$ باشد به نحوی که H هرمیتی باشد، آنگاه e^{iH} یک گیت پیوسته تک کیوبیتی است. ساده‌ترین این گیت‌ها گیت‌هایی هستند که در آن‌ها H یک تابع درجه دو از a و $a^\dagger$ است.

۷ تجزیه اشمیت

رابطه 3 کلی‌ترین حالت یک سیستم کوانتومی مرکب را نشان می‌دهد. این حالت برحسب NM تا بردار پایه $|i, \mu\rangle$ بسط داده شده است. باین وجود می‌توان نشان داد که این بردار حالت را به صورت زیر نوشت:

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha |\alpha\rangle |\tilde{\alpha}\rangle. \quad (57)$$

که در آن $|\alpha\rangle$ ها و $|\tilde{\alpha}\rangle$ ها بردارهای متعامد یک‌ه هستند، λ_α ها اعداد مثبت و $n \leq \min(M, N)$. این تجزیه، تجزیه اشمیت خوانده می‌شود و دارای کاربردهای بسیار مفید و مهم است. به دو روش می‌توان وجود این تجزیه را ثابت کرد.

روش اول: ماتریس Ψ با درایه های $\psi_{i,\mu} = (\Psi)_{i\mu}$ را در نظر بگیرید. بنابر قضیه تجزیه مقدار منفرد می توان نوشت

$$\Psi = UDV \quad (58)$$

که در آن U و V ماتریس های یکانی مستطیلی و D یک ماتریس مربعی قطری با درایه های مثبت است. به عبارت دیگر

$$\psi_{i\mu} = \sum_{\alpha=1}^n U_{i,\alpha} \lambda_{\alpha} V_{\alpha,\mu} \quad (59)$$

که در آن n تعداد مقادیر منفرد غیر صفر از Ψ است. دقت کنید که $n \leq \min(M, N)$. با جایگذاری این مقدار در حالت اولیه بدست می

آوریم:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \sum_{i,\mu,\alpha} U_{i,\alpha} \lambda_{\alpha} V_{\alpha,\mu} |i, \mu\rangle = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} \left(\sum_i U_{i\alpha} |i\rangle \right) \left(\sum_{\mu} V_{\alpha\mu} |\mu\rangle \right) \\ &=: \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} |\alpha\rangle |\tilde{\alpha}\rangle, \end{aligned} \quad (60)$$

که در آن

$$|\alpha\rangle := \sum_i U_{i\alpha} |i\rangle, \quad |\tilde{\alpha}\rangle = \sum_{\mu} V_{\alpha\mu} |\mu\rangle. \quad (61)$$

یکانی بودن ماتریس های U و V این نتیجه را می دهد که بردارهای فوق، بردارهای متعامد یکه برای فضاهای هیلبرت سیستم های A و B خواهند بود، یعنی

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \delta_{\alpha,\beta}, \quad \langle \tilde{\alpha} | \tilde{\beta} \rangle = \delta_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}. \quad (62)$$

روش دوم: در این روش از تجزیه مقدار منفرد استفاده نمی کنیم بلکه برای فضای هیلبرت H_A پایه ای انتخاب می کنیم که در آن ماتریس ρ_A

قطری باشد. این پایه را با $\{|\alpha\rangle\}$ نشان می دهیم. در نتیجه بردار حالت به شکل زیر نوشته می شود:

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{\alpha} |\alpha\rangle |\phi_{\alpha}\rangle \quad (63)$$

که در آن بردارهای $\{|\phi_{\alpha}\rangle\}$ بردارهایی نه الزاماً متعامد و یا یکه در فضای هیلبرت H_B هستند. حال دقت می کنیم که بنابر تعریف :

$$\rho_A = \text{tr}_B(|\psi\rangle_{AB} \langle \psi|) = \sum_{\alpha,\beta} |\alpha\rangle \langle \beta| \langle \phi_{\alpha} | \phi_{\beta} \rangle. \quad (64)$$

اما چون ماتریس چگالی ρ_A در پایه انتخاب شده قطری است پس بدست می آوریم که :

$$\langle \phi_{\alpha} | \phi_{\beta} \rangle = \lambda_{\alpha}^* \delta_{\alpha,\beta} \quad (65)$$

با تعریف $|\phi_\alpha\rangle = \lambda_\alpha |\tilde{\alpha}\rangle$ به تجزیه اشمیت یعنی رابطه (57) می‌رسیم. یکی از نتایج تجزیه اشمیت این است که هر دو ماتریس چگالی ρ_B و ρ_A ویژه مقدارهای غیر صفر یکسان دارند، زیرا

$$\rho_A = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^2 |\alpha\rangle\langle\alpha|, \quad \rho_B = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^2 |\tilde{\alpha}\rangle\langle\tilde{\alpha}|. \quad (66)$$

دقت کنید که تجزیه اشمیت فقط برای حالت های دو قسمتی^۲ برقرار است و برای یک سیستم سه قسمتی^۳ یا چند قسمتی^۴ چنین تجزیه‌ای وجود ندارد.

۱.۷ درهم تنیدگی و تجزیه اشمیت

یکی از مهمترین ویژگی های مکانیک کوانتومی وجود حالت های درهم تنیده^۵ است که در درس های آینده به تفصیل در باره آن سخن خواهیم گفت. یک حالت درهم از یک سیستم دو قسمتی، حالتی است که نتوان آن را به صورت حاصل ضرب تانسوری حالت هایی از تک سیستم ها نوشت. بنابراین حالتی مثل $|\psi\rangle_{AB} = |\phi\rangle_A |\psi\rangle_B$ یک حالت درهم تنیده نیست و حالتی که عدد اشمیت آن بزرگتر از یک باشد، یک حالت درهم تنیده است. در یک حالت درهم ناتنیده^۶ حالت هرکدام از زیر سیستم های A و B یک حالت خالص است ولی در یک حالت درهم تنیده چنین نیست. فرض کنید که یک حالت درهم تنیده در دست آلیس و باب است که تنها می توانند اعمال یکانی موضعی^۷ روی زیرسیستم های خود انجام دهند. آیا با این اعمال آلیس و باب می توانند درهم تنیدگی حالت خود را از بین ببرند؟ پاسخ این سوال منفی است زیرا با این گونه اعمال آنها نمی توانند عدد اشمیت حالت خود را تغییر دهند. فرض کنید که عدد اشمیت یک حالت $|\psi\rangle_{AB}$ برابر با k باشد. این امر به این معناست که

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i=1}^k |i\rangle |\tilde{i}\rangle, \quad (67)$$

Bi-partite^۲

tri-partite^۳

Multi-partite^۴

Entangled^۵

disentangled^۶

Local unitary^۷

که در آن $\{|i\rangle\}$ ها و $\{|\tilde{i}\rangle\}$ ها دو دسته حالت های متعامد هستند. (دقت کنید که ضرایب $\sqrt{\lambda_i}$ را در حالت ها جذب کرده ایم و بنابراین حالت های فوق دیگر یک نیستند.) حال اعمال یکانی روی حالت $|\psi\rangle_{AB}$ ، حالت

$$|\psi'\rangle_{AB} = U_A \otimes U_B |\psi\rangle_{AB} = \sum_{i=1}^k (U_A |i\rangle)(U_B |\tilde{i}\rangle) = \sum_{i=1}^k |i'\rangle |\tilde{i}'\rangle, \quad (68)$$

که بازهم همان عدد اشمیت را دارد.

۸ خالص سازی - Purification

فرض کنید که دستگاه A توسط یک ماتریس چگالی ρ توصیف می شود. آیا می توان دستگاهی مثل B و حالتی از دستگاه مرکب AB مثل $|\psi\rangle_{AB}$ چنان یافت که:

$$\rho = \text{tr}_B(|\psi\rangle_{AB}\langle\psi|) \quad (69)$$

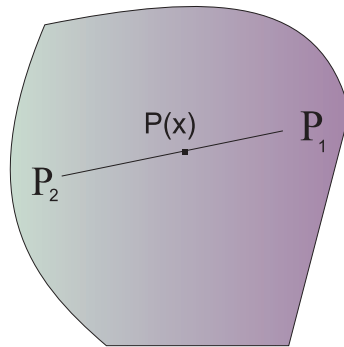
باشد. اگر چنین حالتی پیدا کنیم حالت $|\psi\rangle_{AB}$ را حالت خالص شده ماتریس چگالی ρ می خوانیم. برای اینکه خالص شده یک ماتریس چگالی ρ_A باویژه مقدارهای p_i را پیدا کنیم به ترتیب زیر عمل می کنیم. دستگاه B را دستگاهی می گیریم که بعد فضای هیلبرت آن یعنی H_B حداقل با بعد H_A یکی باشد. هرگاه بردارهای $\{|i\rangle\}$ یک پایه متعامد برای دستگاه A باشند قرار می دهیم:

$$\psi_{AB} = \sum_i \sqrt{p_i} |i, \hat{i}\rangle \quad (70)$$

که در آن $\{|\hat{i}\rangle\}$ یک مجموعه بردار متعامدیکه برای فضای H_B هستند. در این صورت $|\psi\rangle_{AB}$ یک خالص سازی ρ_A است. دقت کنید که برای حالت های چند بعدی فضای ماتریس های چگالی شکل ساده ای ندارد. خواننده می تواند این موضوع را برای خود برای حالت های سه بعدی تحقیق کند. در واقع برای حالت های n بعدی می دانیم که مولفه های جبر $su(n)$ که آنها را با $T_1, T_2, \dots, T_{n^2-1}$ نشان می دهیم، یک پایه برای فضای ماتریس های هرمیتی و بدون رد تشکیل می دهند. بنابراین یک ماتریس چگالی بسطی برحسب این ماتریس ها به شکل زیر دارد:

$$\rho_A = \frac{1}{d} \left(I + \sum_{i=1}^{n^2-1} \alpha_i T_i \right). \quad (71)$$

ولی آنچه که دشوار است این است که به ازای چه مقادیری از ضرایب بسط یعنی α_i ها، ویژه مقدارهای این ماتریس ها مثبت هستند.



شکل ۳: ماتریس های چگالی یک زیر مجموعه محدب از مجموعه تمام ماتریس های هرمیتی را تشکیل می دهند. مطابق شکل می توان هر ماتریس چگالی را به انواع مختلف به صورت جمع محدبی از ماتریس های چگالی دیگر نوشت. به عنوان $\rho(x) = x\rho_1 + (1-x)\rho_2$. نقاطی که نتوان آنها را به صورت مجموع محدب نقاط دیگر نوشت، نقاط اکسترمال نامیده می شوند. نقاط روی مرز ماتریس هایی هستند که یکی یا بیشتر از ویژه مقادیر آنها برابر با صفر است.

۹ نکاتی در مورد توپولوژی مجموعه ماتریس های چگالی

می دانیم که ماتریس چگالی، ماتریسی است که دارای سه خاصیت هرمیتی بودن، مثبت بودن و رد واحد داشتن است. حال اگر ρ_1 و ρ_2 دو ماتریس چگالی باشند، نتیجه می گیریم که ماتریس

$$\rho(\lambda) = \lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2, \quad (72)$$

که در آن $0 \leq \lambda \leq 1$ ، نیز یک ماتریس چگالی است زیرا هر سه خاصیت گفته شده در بالا را دارد. این موضوع نشان می دهد که مجموعه ماتریس های چگالی در فضای ماتریس های هرمیتی یک زیر مجموعه محدب را تشکیل می دهد زیرا خط واصل بین هر دو نقطه در این زیر مجموعه به تمامی داخل این مجموعه است، شکل 9.

تعریف: در یک زیر مجموعه محدب C از یک فضای برداری، یک نقطه، نقطه اکسترمال خوانده می شود اگر نتوان آن را به صورت مجموع محدب دو نقطه از C نوشت.

قضیه: در فضای ماتریس های چگالی یک نقطه، نقطه اکسترمال است اگر و فقط اگر آن نقطه یک حالت خالص باشد.

اثبات: نخست فرض کنید که ρ یک نقطه اکسترمال باشد. تجزیه طیفی ρ را می نویسیم که بر مبنای آن داریم $\rho = \sum_i \lambda_i |i\rangle\langle i|$. از آنجا که گفته شده است ρ یک نقطه اکسترمال است، این امر به این معناست که یکی از λ ها برابر با ۱ و بقیه برابر با صفرند. اما این چیزی نیست جز بیان

خالص بودن حالت ρ .

بر عکس، ρ را یک حالت خالص مثل $|\psi\rangle\langle\psi|$ بگیرید. نشان می دهیم که نمی توان این حالت را به صورت مجموع محدب دو ماتریس چگالی دیگر نوشت و به همین معنا واقعاً این حالت یک حالت خالص است. از برهان خلف استفاده می کنیم. فرض کنید که بتوان نوشت

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \lambda\rho_1 + (1 - \lambda)\rho_2. \quad (73)$$

حال برداری مثل $|\psi^\perp\rangle$ در نظر بگیرید. داریم

$$0 = \langle\psi^\perp|\psi\rangle\langle\psi|\psi^\perp\rangle = \lambda\langle\psi^\perp|\rho_1|\psi^\perp\rangle + (1 - \lambda)\langle\psi^\perp|\rho_2|\psi^\perp\rangle. \quad (74)$$

از آنجا که ماتریس های ρ_1 و ρ_2 هر دو مثبت هستند، طرف راست تنها وقتی می تواند برابر با صفر باشد که یا $\lambda = 0$ یا $\lambda = 1$ و یا

$$\langle\psi^\perp|\rho_1|\psi^\perp\rangle = \langle\psi^\perp|\rho_2|\psi^\perp\rangle = 0. \quad (75)$$

در دو حالت اول مقصود حاصل شده است یعنی حالت ρ جمع محدب نشده است. در حالت اخیر، از آنجا که این تساوی ها برای هر بردار $|\psi^\perp\rangle$ که بر $|\psi\rangle$ عمود است می بایست برقرار باشند نتیجه می گیریم که $\rho_1 = \rho_2 = |\psi\rangle\langle\psi|$ که باز هم به معنای آن است که ρ به صورت یک جمع محدب نوشته نشده است.

حال به مرز مجموعه ماتریس های چگالی نگاه می کنیم. این مرز جایی است که یکی یا بیشتر از ویژه مقادیرهای ماتریس چگالی صفر می شود، زیرا بیرون از این مرز، جایی است که ماتریس های هرمیتی ولی منفی قرار گرفته اند. در این جا یک تفاوت مهم ماتریس های چگالی دو بعدی با ماتریس های چگالی با بعد بیشتر از ۲ آشکار می شود. در دو بعد نقاط روی مرز یکی از ویژه مقادیرهایشان برابر با صفر و در نتیجه تنها ویژه مقدار دیگرشان حتماً برابر با ۱ است. این امر به این معناست که همه ماتریس های چگالی روی مرز در دو بعد، حالت های خالص هستند. این خاصیت را قبلاً در کره بلوخ دیده ایم. در واقع در این کره تمام نقاط روی مرز نقاط اکسترمال هستند و این خاصیت مختص دو بعد است به عنوان مثال در سه بعد یک ماتریس چگالی که تجزیه طیفی آن برابر با $\rho = \frac{1}{3}(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| + |3\rangle\langle 3|)$ است، روی مرز قرار دارد ولی یک حالت خالص نیست.

۱۰ تجزیه یک ماتریس چگالی به آنزامل های مختلف

از آنجا که یک حالت مخلوط با یک ماتریس هرمیتی داده می شود، می توانیم آن را قطری کنیم یا به اصطلاح تجزیه طیفی آن را بدست آوریم. در نتیجه می توان نوشت

$$\rho = \sum_{i=1}^n \lambda_i |i\rangle\langle i|, \quad (۷۶)$$

که در آن λ_i ها ویژه مقدارهای ρ و $|i\rangle$ ها ویژه بردارهای آن هستند. در اینجا n بعد فضای هیلبرت یا بعد ماتریس ρ است. هرگاه چنین کنیم می توانیم برای هر مشاهده پذیر M بنویسیم

$$\langle M \rangle = \text{tr}(M\rho) = \text{tr}\left(M \sum_{i=1}^n \lambda_i |i\rangle\langle i|\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle i|M|i\rangle. \quad (۷۷)$$

عبارت بالا را می توان به این ترتیب تفسیر کرد که حالت ρ مخلوطی از حالت های $|i\rangle$ هر کدام با درصد λ_i است و به همین مناسبت متوسط مشاهده پذیری مثل M در دو مرحله حساب شده است: نخست یک متوسط کلاسیک روی حالت های $|i\rangle$ که هر کدام با وزن λ_i در این جمع آورده شده اند و سپس یک متوسط کوانتومی روی هر حالت $|i\rangle$. این محاسبه وجه نامگذاری حالت مخلوط را نیز روشن می کند. در بسیاری اوقات ما نمی دانیم که سیستم ما دقیقاً در چه حالتی است بلکه می دانیم که مخلوطی است از حالت های متعادل با وزن های مشخص. مهمترین مثال از این نوع در مکانیک آماری پدیدار می شود. وقتی که یک سیستم در دمای T به تعادل رسیده باشد، بنابر اصل موضوع بولتزمن می دانیم که با احتمال $P_i := \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i}$ در ویژه حالت هامیلتونی یعنی $|i\rangle$ با انرژی E_i است. بنابراین چنین سیستمی با یک ماتریس چگالی توصیف می شود که عبارت است از:

$$\rho = \sum_i \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i} |i\rangle\langle i| = \sum_{i=1}^n \frac{1}{Z} e^{-\beta H} |i\rangle\langle i| = \frac{1}{Z} e^{-\beta H}. \quad (۷۸)$$

در این عبارت Z تابع پارش خوانده می شود و برابر است با:

$$Z = \sum_{i=1}^n e^{-\beta E_i} = \text{tr}(e^{-\beta H}). \quad (۷۹)$$

باید توجه داشت که تجزیه 76 تنها یکی از انواع تجزیه هاست. هم از نظر تجربی و هم نظری می توان تجزیه های گوناگونی از یک حالت تصور کرد. تجزیه طیفی؟؟ فقط از این نظر منحصر به فرد است که در آن ویژه بردارهای ρ بکار رفته است وگرنه می توان بی نهایت تجزیه برای یک ماتریس چگالی نوشت. یعنی می توان نوشت

$$\rho = \sum_{j=1}^N |\psi_j\rangle\langle\psi_j|, \quad (۸۰)$$

که در آن اولاً N هیچ ربطی به بعد فضای هیلبرت یا همان بعد ρ ندارد و ثانیاً حالت های $|\psi_j\rangle$ لزوماً برهم عمود نیستند. این نوع تجزیه نیز یک آنزامل از همان ماتریس چگالی را توصیف می کند. بنابراین برای یک نوع ماتریس چگالی می توان انواع تجزیه ها و در نتیجه انواع تفسیرهای

آزمایی را به کار برد. در واقع به بی نهایت طریق می توان یک ماتریس چگالی را به ماتریس های چگالی دیگر و یا به حالت های خالص تجزیه کرد.

برای درک این نکته که بی نهایت تجزیه برای یک حالت مخلوط امکان پذیر است باز هم کره بلوخ را در نظر بگیرید. چگونه می توان یک حالت مخلوط برای یک ذره اسپین یک دوم را تجزیه کرد؟ این تجزیه چگونه روی کره بلوخ نشان داده می شود؟ پاسخ این سوال ساده است. فرض کنید که یک حالت مخلوط متناظر با بردار $\mathbf{r}$ روی کره بلوخ داده شده است. می خواهیم این حالت را به صورت مجموع دو حالت خالص تجزیه کنیم. برای این کار از نوک بردار $\mathbf{r}$ وتری از کره را رسم می کنیم که سطح کره را در دو نقطه $\mathbf{n}_1$ و $\mathbf{n}_2$ قطع کند. هرگاه طول دو پاره خط نشان داده شده در شکل را با l_1 و l_2 نشان دهیم آنگاه یک محاسبه ساده نشان می دهد که می توان حالت مخلوط $\rho = \frac{1}{2}(I + \mathbf{r} \cdot \sigma)$ را به شکل زیر تجزیه کرد:

$$\rho = p_1 |n_1\rangle\langle n_1| + p_2 |n_2\rangle\langle n_2| \quad (81)$$

که در آن $p_1 = \frac{l_1}{l_1+l_2}$ و $p_2 = \frac{l_2}{l_1+l_2}$. از آنجا که وتر مربوطه را به بی نهایت طریق می توان رسم کرد، پس بی نهایت تجزیه دوتایی برای حالت مخلوط وجود دارد. آیا تجزیه های بیش از دو تایی هم وجود دارد؟ پاسخ این سوال هم مثبت است. فرض کنید که نقاط $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_N$ روی سطح کره داده شده اند. حال ضرایب $p_1, p_2, \dots, p_N$ را چنان تعیین می کنیم که شرط زیر تحقق یابد:

$$\sum_{i=1}^N p_i \mathbf{n}_i = \mathbf{r} \quad (82)$$

در این صورت می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2}(I + \mathbf{r} \cdot \sigma) = \sum_{i=1}^N p_i \frac{1}{2}(I + \mathbf{n}_i \cdot \sigma) \\ &= \sum_{i=1}^N p_i |n_i\rangle\langle n_i| \end{aligned} \quad (83)$$

به این ترتیب حالت مخلوط ρ را می توان به بی نهایت طریق به صورت مجموعی از حالت های خالص و یا حتی به صورت انتگرالی از حالت های خالص تجزیه کرد که در حالت اخیر خواهیم نوشت:

$$\rho = \int d\phi d\cos\theta p(\theta, \phi) |n(\theta, \phi)\rangle\langle n(\theta, \phi)| \quad (84)$$

با این شرط که $\int d\phi d\cos\theta p(\theta, \phi) = 1$.

۱.۱۰ طرز تهیه آنزامل های مختلف

اصل موضوع اندازه گیری به ما می گوید که اندازه گیری یک حالت کوانتومی (حتی حالت های خالص) را معمولاً به یک حالت آمیخته تبدیل می کند. یعنی در اثر اندازه گیری $\{P_m\}$ ، حالت $|\Psi\rangle$ تبدیل به حالت مخلوط

$$\rho = \sum_m P_m |\Psi\rangle\langle\Psi| P_m \quad (۸۵)$$

می شود. بنابراین ساده ترین راه برای تهیه حالت های مخلوط از حالت های خالص انجام یک عمل اندازه گیری است. فرض کنید که آلیس و باب حالت زیر را در اختیار دارند که در آن کیوبیت اول در اختیار آلیس و کیوبیت دوم در اختیار باب است:

$$|\Psi\rangle = a|0,0\rangle + b|1,1\rangle. \quad (۸۶)$$

حال اگر باب روی کیوبیت خود اندازه گیری در پایه $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ انجام دهد حالت آلیس تبدیل می شود به

$$\rho_A = a^2|0\rangle\langle 0| + b^2|1\rangle\langle 1|, \quad (۸۷)$$

برای سادگی فرض کرده ایم که a و b حقیقی هستند.

حال فرض کنید که باب اندازه گیری خود را در پایه $\{|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\}$ انجام دهد. در این صورت برای بدست آوردن حالت آلیس نخست حالت $|\Psi\rangle$ را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= a|0\rangle \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) \right] + b|1\rangle \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle) \right] \\ &= \left[\frac{a|0\rangle + b|1\rangle}{\sqrt{2}} \right] |+\rangle + \left[\frac{a|0\rangle - b|1\rangle}{\sqrt{2}} \right] |-\rangle. \end{aligned} \quad (۸۸)$$

بنابراین اندازه گیری باب در این پایه حالت آلیس را به حالت زیر تبدیل می کند:

$$\rho_A = |\tilde{\alpha}_+\rangle\langle\tilde{\alpha}_+| + |\tilde{\alpha}_-\rangle\langle\tilde{\alpha}_-|, \quad (۸۹)$$

که در آن $|\tilde{\alpha}_\pm\rangle$ حالت های نابهنجار زیر هستند:

$$|\tilde{\alpha}_\pm\rangle = \frac{a|0\rangle \pm b|1\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (۹۰)$$

با تعریف حالت های بهنجار

$$|\alpha_\pm\rangle = \frac{a|0\rangle \pm b|1\rangle}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad (۹۱)$$

می توانیم حالت آلیس را بعد از اندازه گیری باب به شکل زیر بنویسیم:

$$\rho_A = \frac{a^2 + b^2}{2} |\alpha_+\rangle\langle\alpha_+| + \frac{a^2 + b^2}{2} |\alpha_-\rangle\langle\alpha_-|. \quad (۹۲)$$

به این ترتیب یک آنزامل دیگر برای آلیس تهیه می شود. در این جا توجه به یک نکته ی بسیار مهم و اساسی ضروری است و آن اینکه 87 و 92 دو ماتریس چگالی مختلف نیستند، بلکه دو تجزیه مختلف از یک ماتریس چگالی هستند. اگر غیر از این بود، باب می توانست با اندازه گیری های خود حالت آلیس را حتی بدون داشتن رابطه علی با او تغییر دهد و این امر ناقض نسبیت است. به عبارت دیگر باب می توانست با اندازه گیری های متفاوت خود و تغییر دادن حالت آلیس به طرق مختلف برای او پیامی مخابره کند. این قضیه را به طور کلی می توان ثابت کرد و آن اینکه اندازه گیری های باب به هیچ وجه ماتریس چگالی آلیس را تغییر نمی دهد. برای اثبات این مطلب حالت آلیس و باب را قبل از هر نوع اندازه گیری به صورت زیر می نویسیم:

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sum_{i,\mu} \psi_{i,\mu} |i, \mu\rangle, \quad (93)$$

قبل از هر نوع اندازه گیری توسط باب، حالت آلیس برابر است با

$$\rho_A = \text{tr}_B(|\Psi\rangle_{AB}\langle\Psi|) \quad (94)$$

حال فرض کنید که باب اندازه گیری تصویری $\{P_m^B := I \otimes P_m\}$ را روی ذره خودش انجام می دهد. در این حالت حالت $|\Psi\rangle_{AB}$ تبدیل

می شود به

$$\rho_{AB} = \sum_m P_m^B |\Psi\rangle_{AB}\langle\Psi| P_m^B = \sum_m (I \otimes P_m) |\Psi\rangle_{AB}\langle\Psi| (I \otimes P_m) \quad (95)$$

در این صورت حالت آلیس برابر خواهد بود با

$$\rho'_A = \text{tr}_B(\rho_{AB}) = \sum_m \text{tr}_B(I \otimes P_m) |\Psi\rangle_{AB}\langle\Psi| (I \otimes P_m) \quad (96)$$

اما از خواص رد جزئی این است که

$$\text{tr}_B((I \otimes A)S(I \otimes C)) = \text{tr}_B((I \otimes C)(I \otimes A)S) \quad (97)$$

که در آن S یک عملگر دلخواه است که روی فضای AB اثر می کند. بنابراین ماتریس چگالی ρ'_A را می توان به شکل زیر نوشت:

$$\rho'_A = \sum_m \text{tr}_B(I \otimes P_m)(I \otimes P_m) |\Psi\rangle_{AB}\langle\Psi| = \text{tr}_B(I \otimes \sum_m P_m) |\Psi\rangle_{AB}\langle\Psi| = \text{tr}_B |\Psi\rangle_{AB}\langle\Psi| = \rho_A. \quad (98)$$

این رابطه به این معناست که اندازه گیری های باب نمی تواند ماتریس چگالی آلیس را تغییر دهد.

۲.۱۰ آنزامل های مختلف چه ربطی به هم دارند؟

آنزامل های مختلف یا به عبارت دیگر تجزیه های متفاوت از یک ماتریس چگالی چه ربطی به هم دارند؟ برای درک این ارتباط تجزیه را به صورت زیر می نویسیم:

$$\rho = \sum_{i=1}^N \lambda_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| = \sum_{i=1}^N |\tilde{\psi}_i\rangle \langle \tilde{\psi}_i|, \quad (99)$$

که در آن $|\tilde{\psi}_i\rangle := \sqrt{\lambda_i} |\psi_i\rangle$ حالت های غیر بهنجار هستند. قضیه زیر ارتباط بین تجزیه ها را بیان می کند.

قضیه: فرض کنید که یک حالت ρ به دو صورت زیر تجزیه می شود

$$\rho = \sum_{i=1}^N |\tilde{\psi}_i\rangle \langle \tilde{\psi}_i| = \sum_{j=1}^N |\tilde{\phi}_j\rangle \langle \tilde{\phi}_j|, \quad (100)$$

که در آن بدون نقض کلیت تعداد بردارهای هر دو آنزامل را یکی گرفته ایم زیر همواره می توان با افزودن احتمالات برابر با صفر، تعداد بردارهای به کار رفته در دو آنزامل را مساوی گرفت. در این صورت حتماً یک ماتریس یکانی مثل U وجود دارد به طوری که

$$|\tilde{\psi}_i\rangle = \sum_{j=1}^N U_{ij} |\tilde{\phi}_j\rangle. \quad (101)$$

بالعکس، فرض کنید که شرط بالا برقرار باشد آنگاه مخلوط های ناشی از این دو آنزامل یکسان هستند.

اثبات: نخست قسمت دوم قضیه را که آسان تر است ثابت می کنیم. می نویسیم

$$\begin{aligned} \rho_\psi &:= \sum_{i=1}^N |\tilde{\psi}_i\rangle \langle \tilde{\psi}_i| = \sum_{i,j,k=1}^N U_{ij} U_{ik}^* |\tilde{\phi}_j\rangle \langle \tilde{\phi}_k| \\ &= \sum_{j,k} \delta_{j,k} |\tilde{\phi}_j\rangle \langle \tilde{\phi}_k| = \sum_{j=1}^N |\tilde{\phi}_j\rangle \langle \tilde{\phi}_j| = \rho_\phi. \end{aligned} \quad (102)$$

حال به قسمت اول قضیه می پردازیم. می دانیم که ρ یک تجزیه طیفی دارد یعنی

$$\rho = \sum_{r=1}^n k_r |k_r\rangle \langle k_r| = \sum_{r=1}^n |\tilde{k}_r\rangle \langle \tilde{k}_r|, \quad (103)$$

که در آن $\{|\tilde{k}_r\rangle, r = 1 \dots n\}$ ها یک پایه متعامد ولی نه لزوماً یکه را تشکیل می دهند. باز هم در این جا می توان بعد n را با N مساوی گرفت، به این معنی که اگر $N \leq n$ باشد با افزودن وزن های صفر به آنزامل ها این کار را می کنیم. اگر هم $N > n$ باشد بردارهای $|k_{n+1}\rangle, \dots, |k_N\rangle$ را با ویژه مقدارهای صفر به تجزیه طیفی اضافه می کنیم. حال برداری مثل $|\alpha\rangle$ را در نظر بگیرید که بر بردارهای عمود $|k_r\rangle$ باشد. در این صورت می نویسیم

$$\cdot = \sum_r \langle \alpha | \tilde{k}_r \rangle \langle \tilde{k}_r | \alpha \rangle = \sum_i \langle \alpha | \tilde{\psi}_i \rangle \langle \tilde{\psi}_i | \alpha \rangle. \quad (104)$$

از این رابطه نتیجه می گیریم که بردار $|\alpha\rangle$ بر همه بردارهای $|\tilde{\psi}_i\rangle$ عمود است. با استدلال مشابه نتیجه می گیریم که هر برداری که بر بردارهای $|\tilde{\psi}_i\rangle$ عمود باشد، بر بردارهای $|\tilde{k}_r\rangle$ عمود است. بنا براین بردارهای $|\tilde{\psi}_i\rangle$ و بردارهای $|\tilde{k}_r\rangle$ در یک ابر صفحه قرار دارند و می توان بردارهای $|\tilde{\psi}_i\rangle$ را بر حسب بردارهای $|\tilde{k}_r\rangle$ بسط داد:

$$|\tilde{\psi}_i\rangle = \sum_{r=1}^N U_{ir} |\tilde{k}_r\rangle. \quad (105)$$

همین استدلال را برای بردارهای $|\phi_j\rangle$ می توان تکرار کرد و نوشت:

$$|\tilde{\phi}_j\rangle = \sum_{r=1}^N V_{jr} |\tilde{k}_r\rangle. \quad (106)$$

اما از آنجا که

$$\rho = \sum_{i=1}^N |\tilde{\psi}_i\rangle \langle \tilde{\psi}_i| = \sum_{j=1}^N |\tilde{\phi}_j\rangle \langle \tilde{\phi}_j| = \sum_{r=1}^N |\tilde{k}_r\rangle \langle \tilde{k}_r| \quad (107)$$

نتیجه می گیریم که

$$UU^\dagger = I, \quad VV^\dagger = I. \quad (108)$$

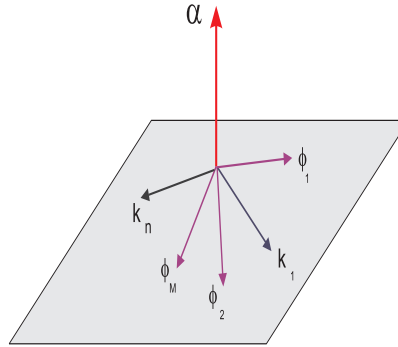
با توجه به یکانی بودن ماتریس ها می توان از روابط 105، 106 نوشت

$$|\tilde{\psi}_i\rangle = \sum_{r=1}^N (UV^\dagger)_{ir} |\tilde{\phi}_r\rangle, \quad (109)$$

و این همان چیزی بود که می خواستیم ثابت کنیم.

۳.۱۰ قضیه GHJW

در بخش پیشین فهمیدیم که بردارهای دو آنزامل مختلف چگونه به هم مرتبط هستند. در این بخش یک قضیه مهم موسوم به قضیه GHJW را ثابت می کنیم که بیان می کند تمام آنزامل های مختلف را می توان با اندازه گیری های مناسب بدست آورد. نام این قضیه از نام کاشفان آن یعنی Wootters و Gisin, Hughston, Jozsa گرفته شده است.



شکل ۴: هر برداری مثل $|\alpha\rangle$ که بر بردارهای $|k\rangle$ عمود باشد حتماً بردارهای $|\phi\rangle$ نیز عمود است. بنابراین بردارهای $|k\rangle$ و بردارهای $|\phi\rangle$ همه در یک ابر صفحه قرار دارند.

ماتریس چگالی ρ_A و دو آنزامل مختلف از آن را به شکل زیر در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned}\rho_A &= \sum_{\mu=1}^M p_\mu |\phi_\mu\rangle \langle \phi_\mu|, \\ \rho_A &= \sum_{\nu=1}^N p_\nu |\psi_\nu\rangle \langle \psi_\nu|.\end{aligned}\quad (110)$$

دقت کنید که تعداد اعضای این دو آنزامل لزوماً مساوی نیستند. به عنوان مثال ممکن است که $M = 4$ و $N = 1000$ باشد و بعد ماتریس ρ_A که آن را با n نشان می دهیم برابر با ۲ باشد. می توانیم با افزودن احتمالات صفر M را با N مساوی بگیریم. البته بعد ماتریس n معین است و ربطی به تعداد بردارهای آنزامل ندارد و به همین دلیل قابل دستکاری نیست. حال برای این دو آنزامل مختلف دو نوع خالص سازی انجام دهیم، به این معنا که حالت های زیر را تعریف کنیم:

$$\begin{aligned}|\Xi_1\rangle &:= \sum_{\mu=1}^M \sqrt{p_\mu} |\phi_\mu\rangle |\alpha_\mu\rangle \\ |\Xi_2\rangle &:= \sum_{\mu=1}^M \sqrt{q_\mu} |\psi_\mu\rangle |\beta_\mu\rangle,\end{aligned}\quad (111)$$

به نحوی که

$$\rho_A = \text{tr}_B(|\Xi_1\rangle \langle \Xi_1|) = \text{tr}_B(|\Xi_2\rangle \langle \Xi_2|). \quad (112)$$

دقت کنید که $\langle \alpha_\mu | \alpha_\nu \rangle = \langle \beta_\mu | \beta_\nu \rangle = \delta_{\mu,\nu}$. حال دقت می کنیم که تجزیه اشمیت حالت های خالص فوق به صورت زیر است زیرا هردو

حالت خالص شده یک ماتریس چگالی هستند:

$$\begin{aligned} |\Xi_1\rangle &:= \sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i} |k_i\rangle |\tilde{k}_i\rangle \\ |\Xi_2\rangle &:= \sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i} |k_i\rangle |\tilde{\tilde{k}}_i\rangle, \end{aligned} \quad (113)$$

که در آن $|k_i\rangle$ ها ویژه بردارهای ρ_A و n بعد این ماتریس است. هم چنین بردارهای $|\tilde{k}_i\rangle$ یک پایه متعامد یک فضای B و $|\tilde{\tilde{k}}_i\rangle$ یک پایه متعامد دیگر برای همان فضای B هستند. از رابطه اخیر بدست می آوریم

$$|\Xi_2\rangle = (I \otimes U_B) |\Xi_1\rangle, \quad (114)$$

که در آن U_B یک ماتریس یکانی است. با توجه به این رابطه و رابطه 111 بدست می آوریم

$$\sum_{\mu=1}^M \sqrt{q_\mu} |\psi_\mu\rangle |\beta_\mu\rangle = \sum_{\mu=1}^M \sqrt{p_\mu} |\phi_\mu\rangle (U_B |\alpha_\mu\rangle). \quad (115)$$

این رابطه یک پیام مهم در بردارد و آن اینکه اگر روی یک حالت خالص، باب یک بار اندازه گیری اش را در پایه $|\beta_m\rangle$ ها انجام دهد، آنزامل ۱ و اگر روی همان حالت خالص اندازه گیری اش را در پایه $|\gamma_m\rangle := U_B |\alpha_m\rangle$ انجام دهد آنزامل ۲ را در 110 برای آلیس تهیه می کند. بنابراین تمام آنزامل های مختلف را باب می تواند با اندازه گیری در پایه های مختلف برای آلیس تهیه کند. این عبارت بیان قضیه $GHJW$ است.

۱۱ تمرین ها:

۱ - یک ماتریس چگالی به صورت $\rho = \frac{1}{4}(I + \vec{r} \cdot \vec{\sigma})$ داده شده است. ماتریس $\rho^{\frac{1}{2}}$ را برحسب ماتریس های پائولی بنویسید.

۲ - ماتریس چگالی یک ذره (به بیان دقیق تر آنزاملی از ذرات) به صورت زیر داده شده است:

$$\rho = A \int_{-\infty}^{\infty} dx dx' e^{-a(x+x'-b)^2} |x\rangle \langle x'| \quad (116)$$

الف: مقدار A را تعیین کنید.

ب: اگر روی این ذرات اندازه گیری مکان انجام دهیم، احتمال بدست آوردن نتیجه‌ی x چقدر است. به عبارت بهتر تابع احتمال $P(x)$ چقدر است؟

ج: اگر روی این ذرات اندازه گیری تکانه انجام دهیم، احتمال بدست آوردن نتیجه‌ی p چقدر است. به عبارت بهتر تابع احتمال $P(p)$ چقدر است؟

د: کمیت های زیر را حساب کنید:

$$\langle X \rangle, \quad \langle X^2 \rangle, \quad \langle P \rangle, \quad \langle P^2 \rangle. \quad (117)$$

۳ - یک حالت دلخواه ρ در کره بلوخ در نظر بگیرید. کدام حالت های خالص مثل $|\phi\rangle$ هستند که در رابطه‌ی $\langle \phi | \rho | \phi \rangle = 0$ صدق می کنند؟ کدام حالت ها هستند که در رابطه $\langle \phi | \rho | \phi \rangle = \frac{1}{4}$ صدق می کنند.

۴ - یک حالت دلخواه ρ در کره بلوخ در نظر بگیرید. کدام حالت های مخلوط مثل σ هستند که در رابطه‌ی $tr(\rho\sigma) = 0$ صدق می کنند؟

۵ - یک باریکه ذرات مخلوطی است از ذراتی که در حالت های زیر هستند:

$$\begin{aligned} |z+\rangle, & \quad 10 \text{ percent} \\ |z-\rangle, & \quad 40 \text{ percent} \\ |x+\rangle, & \quad 50 \text{ percent}. \end{aligned} \quad (118)$$

روی این باریکه اندازه گیری اسپین انجام می دهیم. کمیت های زیر را حساب کنید:

$$\langle S_x \rangle, \quad \langle S_z \rangle. \quad (119)$$

۶ - دو ذره در حالت $|\phi\rangle = a|00\rangle + b|11\rangle$ هستند. ذره اول دست آلیس و ذره دوم دست باب است.

الف: ماتریس چگالی باب چیست؟

ب: فرض کنید که آلیس روی ذره خود یک اندازه گیری در راستای $z \cos \theta + x \sin \theta$ انجام می دهد. این اندازه گیری باعث می شود که

ما بتوانیم یک تجزیه از ماتریس چگالی باب بدست آوریم. این تجزیه را مشخص کنید.

۷ - دو ذره در حالت کاملاً درهم تنیده‌ی $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ هستند. ذره اول دست آلیس و ذره دوم دست باب است. آلیس و باب ذرات خود را در راستاهای $\hat{m}$ و $\hat{n}$ اندازه می گیرند.

الف: احتمال اینکه هردو نتیجه‌ی +۱ بدست آورند، یعنی $P(+1, +1)$ چقدر است. $P(+1, -1)$ و $P(-1, -1)$ و $P(-1, +1)$ را محاسبه کنید.

ب: مقدار متوسط $\langle \hat{S}_m^1 \hat{S}_n^2 \rangle$ را حساب کنید.

- ۸