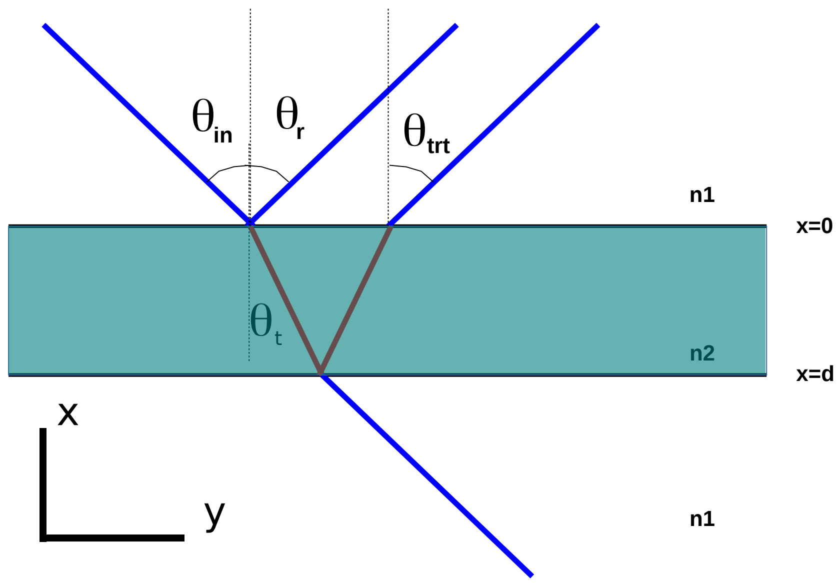
تمرین درس موج ـ شماره ۵

زمان تحویل: ۲۶ خرداد

سوال ۱. قطبش در انعکاس: یک موج الکترومغناطیسی را در نظر بگیرید که بردار انتشار آن در صفحه $x-y$ است. در $x=0$ موج از محیط اولیه خود با ظریب انتشار n_1 وارد محیط دومی با ظریب انتشار n_2 می شود و در $x=d$ از آن خارج می شود و وارد محیط اول می شود. جزئیات را می توانید در شکل ۱ ببینید.



شکل ۱: نمایش شماتیک چیدمان در سوال ۱

الف: قطبش نور را خطی در نظر بگیرید و فرض کنید میدان الکتریکی در داخل صفحه $x-y$ نوسان می کند. ضرایب انعکاس و عبور را برای این موج الکترومغناطیسی در $x=0$ پیدا کنید. (ضرایب را فقط برای انعکاس و عبور از سطح اول در نظر بگیرید، کفایت می کند.) (راهنمایی: برای پیدا کردن ضریب عبور و انعکاس در این مسئله باید دو شرط بدست آورید، یکی برای میدان الکتریکی و یکی برای میدان مغناطیسی. همچنین از قوانین

ماکسول می دانیم که مولفه موازی سطح میدان مغناطیسی و میدان الکتریکی پیوسته هستند. همچنین با رابطه بین میدان الکتریکی را استفاده کنید تا دو معادله را بدست آورید.)
(۳۰ نمره)

پاسخ: به قسمت ۱۲.۴.۲ کتاب مراجعه کنید.

ب. زاویه (راستای انتشار) نوری را که وارد محیط دوم می شود و سپس در $x = d$ انعکاس می یابد و سپس وارد محیط اول می شود (θ_{trt} در شکل) را با زاویه (راستای انتشار) نوری که در $x = 0$ انعکاس می یابد (θ_r در شکل) مقایسه کنید.
(۲۰ نمره)

پاسخ: باید دوبار از قانون اسنل استفاده کنیم. ابتدا وقتی برای بار اول نور وارد محیط دوم می شود. در این مرحله داریم:

$$n_1 Sin\left(\theta_{in}\right) = n_2 Sin\left(\theta_t\right) \qquad (1)$$

که θ_t زاویه راستای انتشار نور در محیط دوم (میانی) از راستای عمود بر مرز دو محیط است.

سپس بخشی از نور که مرز دوم انعکاس می یابد، با همان زاویه θ_t به مرز با محیط اول باز می گردد و با زاویه θ_{trt} وارد محیط اول می شود. این زاویه نیز با قانون اسنل به این شکل به دست می آید:

$$n_1 Sin\left(\theta_{trt}\right) = n_2 Sin\left(\theta_t\right)$$

با استفاده از ۱ سمت راست معادله ساده می شود و به دست می آوریم:

$$n_1 Sin\left(\theta_{trt}\right) = n_2 Sin\left(\theta_t\right) = n_1 Sin\left(\theta_{in}\right) \Rightarrow \theta_{trt} = \theta_{in} = \theta_r$$

بنابراین راستای انتشار نوری که مستقیما از مرز اول منعکس می شود و نوری که وارد محیط دوم شده و پس از انعکاس از مرز دوم، به محیط اول باز می گردد، یکسان است.

۲. تصور کنید که همانطور که در کلاس توضیح داده شد، برای ایجاد تصاویر سه بعدی در سینما، دو تصویر با قطبش متفاوت بر روی پرده به نمایش در می یاید و برای دیدن تصویر سه بعدی، از عینک هایی استفاده شود که برای هر چشم، از پولارایدی با قطبشی متفاوت استفاده می کند. به این ترتیب، هر چشم، یکی از دو تصویر را دریافت می کند و اثر دریافت تصاویر سه بعدی در چشم ها بازسازی می شود. توضیح دهید که استفاده از قطبش خطی برای ایجاد و دریافت دو تصویر چه مشکلی را ایجاد می کند و چگونه می توان این مشکل را بر طرف کرد. (راهنمایی: اهمیت راستای سر در هنگام دریافت تصویر را در نظر بگیرید.)
(۲۰ نمره)

پاسخ: چنانچه از قطبش خطی استفاده شود، به عنوان مثال از قطبش افقی برای تصویری که چشم راست قرار است دریافت کند و قطبش عمودی برای تصویری که چشم چپ باید دریافت کند، آنگاه برای دریافت درست تصویر ضروری است که سر دقیقا در راستای عمودی قرار بگیرد. در غیر این صورت، هنگامی که سر در زاویه بین افقی و عمودی قرار بگیرد، بخشی از هر دو تصویر به هر دو چشم می رسد و تصویر کاملا خراب می شود.

برای برطرف کردن این مشکل، می توان از قطبش دایروی استفاده کرد. به این ترتیب، تصویر چشم راست مثلا به صورت راستگرد و تصویر چشم چپ به صورت چپ گرد، قطبیده

می شود. به این ترتیب، مستقل از زاویه سر، شیشه سمت راست عینک فقط تصویری که قطبش راستگرد دارد را عبور می دهد (مستقل از زاویه سر) و مشابها شیشه سمت چپ تصویری که قطبش چپ گرد دارد.

به صورت ریاضی در نظر بگیرید که تضویری که چشم راست باید دریافت کند به صورت زیر است

$$E_۱ = E_x(z,t)$$

فرض کنید راستای انتشار z می باشد و جهت افقی با x و عمودی با y نشان داده شده است.

به همین ترتیب تصویر دوم با

$$E_۲ = E_y(z,t)$$

داده می شود.

برای دریافت سه بعدی تصویر مهم است که $E_۱$ به چشم راست و $E_۲$ به چشم چپ برسد. برای سادگی ما فقط به چشم راست توجه می کنیم. شیشه پولاروید عینک ۳ بعدی میدان ورودی را که حاصل جمع

$$E_۱ + E_۲ = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$$

می باشد تصویر می کند. عملگر پولاروید در کلاس توضیح داده شد و براساس آن داریم:

$$P_R(E_۱ + E_۲) = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = E_X.$$

هرگونه چرخش سر به معنای یک دوران خواهد بود که

$$P_R \to R_z(\theta) P_R R_z(-\theta)$$

در این حالت نوری که به چشم راست می رسد متناسب هواهد بود با

$$\cos(\theta)E_x + \sin(\theta)E_y$$

بنابرین تصویر برای چشم راست کیفیتش را از دست می دهد و مبهم می شود. تصویر برای چشم چپ نیز به همین شکل خواهد بود.

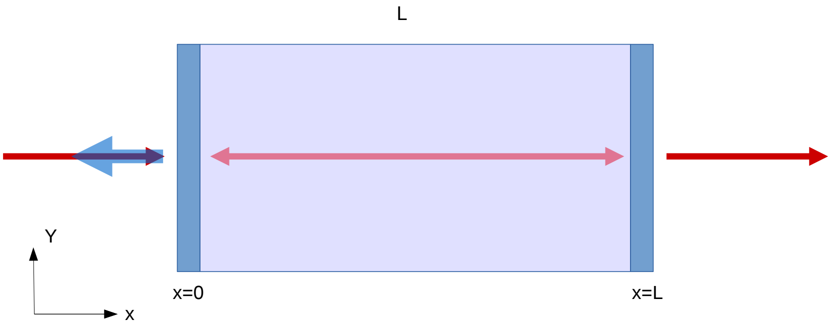
۳. کاواک چگونه کار می کند.

دو آیینه را در نظر بگیرید که به صورت موازی قرار گرفته اند. در نظر بگیرید که نور از پشت آیینه اول به آن می تابد. ضریب انعکاس از هر یک از آینه ها را r و ضریب گذار را t در نظر بگیرید. جزئیات را می توانید در شکل ۲ ببینید.

(نیازی به در نظر گرفتن قطبش برای این سوال نیست، میدان ورودی را در راستای داخل صفحه در نظر بگیرید و راستای انتشار را x در نظر بگیرید. میدان ورودی به این شکل خواهد بود

$$E_i = E_۰ e^{ikx - i\omega t}$$

همچنین برای سادگی آینه اول را در $x = ۰$ در نظر بگیرید و ضخامت آینه ها را صفر.)



شکل ۲: نمایش شماتیک کاواک در سوال ۳

الف. میدان الکتریکی خروجی از آینه دوم را برحسب ضرایب عبور و انعکاس و فاصله دو آینه و طول موج نور بیابید.
(۳۰ نمره)
پاسخ: میدانی که وارد کاواک می شود برابر است با

$$E_{in} = tE_{\circ}e^{ikx-i\omega t}$$

اما این میدان توصیف کننده همه میدان داخل کاواک نخواهد بود. زیرا نور پس از رسیدن به انتهای کاواک بازتاب می شود باز می گردد و همه بازتاب ها باید درنظر گرفته شود. اگر بخواهیم میدانی که از کاواک خارج می شود را محاسبه کنیم نیز باید تاثیر همه این انعکاس ها را در نظر بگیریم. این یعنی این که میدان خروجی بر هم نهی حالت های زیر ایجاد می شود:

- نور ابتدا از آینه اول و سپس از آینه دوم عبور می کند: $E_{tt}(L) = t^{۲}E_{\circ}e^{ikL-i\omega t}$
- نور پس از عبور از آینه اول، یک بار از آینه دوم منعکس شده و بعد از آینه اول منعکس شده و سپس از آینه دوم عبور می کند: $E_{trrt}(L) = t^{۲}r^{۲}E_{\circ}e^{i۳kL-i\omega t}$
- نور از هر یک از آینه ها دو بار منعکس می شود و فاصله بین آینه ها را ۵ بار عبور می کند: $E_{trrrrt}(L) = t^{۲}r^{۴}E_{\circ}e^{i۵kL-i\omega t}$
- $\cdots$

همانگونه که مشهود است، بخش های مختلف این برهم نهی از تعداد متفاوت انعکاس نور بین آینه های می آید که در نتیجه آن طول مسیری که نور قبل از خروج از کاواک طی می کند متفاوت است و در نتیجه آن هنگاه خروج می توانند فاز های مختلفی نیز داشته باشند.
توجه داشته باشید که حالت هایی هم وجود دارند که نور از آینه اول خارج می شود که ما نیازی نیست برای محاسبه میدان در خارج آینه دوم در نظر بگیریم.
جمع همه این میدان ها را که در نظر بگیریم خواهیم داشت

$$E_{out} = E_{tt}(L) + E_{trrt}(L) + E_{trrrrt}(L) + \cdots$$

$$= \quad E_{tt}(L)\sum_{n=0}^{\infty} r^{2n}e^{i2nk} = E_{tt}(L)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n}, \qquad (2)$$

که در آن $\alpha = r^{2}e^{i2k}$. این یک سری هندسی است و می توان از روی آن میدان خروجی کاواک را محاسبه کرد. جمع میدان می شود

$$E_{out} = -E_{tt}(L)\frac{1}{-1 + r^{2}e^{2ikL}}$$

ب. شرایط برهم نهی سازنده را برای فاصله دو آیینه بیابید. یعنی برای چه مقادیری از فاصله بین دو آینه تداخل سازنده خواهد بود. (تمام نور هایی که به آیینه دوم می رسند، هم فاز باشند) برای این شرایط، میدان خروجی از کاواک را محاسبه کنید.

(۲۵ نمره) پاسخ: برای اینکه همه امواجی که به آینه دوم می رسند هم فاز باشند، باید اختلاف راهی که طی می کنند مضرب صحیحی از 2π باشد. این بدان معناست که

$$2kL = 2m\pi \rightarrow L = \frac{m\pi}{k} = \frac{m\lambda}{2}$$

برای این شرایط میدان خروجی

$$E_{out} = -E_{tt}(L)\frac{1}{-1 + r^{2}e^{i2m\pi}} = \frac{E_{tt}(L)}{r^{2} - 1}$$

از سیستم دو آیینه عبور می کند. (هیچ نوری از آیینه اول منعکس نمی شود و فقط از آیینه دوم خارج می شود).

آیا این شرایط برای زمانی که ضریب عبور آیینه ها بسیار کوچک تر از ضریب انعکاس آن هاست نیز صدق می کند؟

ج. نمودار شدت نور خروجی را بر حسب طول کاواک رسم کنید، این را برای $r = 0/9$ و $r = 0/8$ و $r = 0/2$ انجام دهید. تغییرات r چه تاثیری بر توان خروجی دارد؟(ضرایب نظیر دی الکتریک را یک فرض کنید ($\epsilon = 1, \mu = 1$). برای تاثیرات تغییر ضریب انعکاس، توصیف کمی کفایت می کند)
(۲۵ نمره)

پاسخ: به فایل متمتیکای ضمیمه مراجعه کنید. می توانید ضریب انعکاس را تغییر دهید. همانطور که می بینید، برای ضرایب انعکاس بالا، نموداری به شکل شانه به دست می آید که در آن سر شانه ها دقیقا نقاط برهم نهی سازنده می باشد و از قسمت قبل دیدیم که به صورت مضاربی از نصف طول موج داده می شود. ازطرفی با کاهش ظریب انعکاس از تیزی این نقاط بیشینه کاسته می شود.

یکی از کاربرد های این سیستم برای اندازه گیری فرکانس یا به طبع آن طول موج ورودی به کاواک می باشد. با تغییر فاصله دو آینه و یافتن مکان نقطه های بیشینه، می توان طول موج نور ورودی را تشخصی داد. برای این کاربرد هرچه نمودار در نقطه های بیشینه تیزتر باشد بهتر است چرا که دقت اندازه گیری طول موج را بیشتر می کند. بنابراین برای کاربرد هایی از این دست، بهتر است ضریب انعکاس آیینه ها هر چه بیشتر باشد.

۴. میدان الکتریکی ناشی از بر هم نهی ۱۰۰ موج را در نظر بگیرید. تصور کنید که هر میدان به صورت

$$E_i = E_\circ e^{-i\omega_i t}$$

داده می شود (همه امواج از یک نقطه می آیند و فاز ابتدایی همه آنها یکسان است.) تصور کنید که فرکانس های ω_i از یک توزیع گوسی به متوسط $\langle\omega_i\rangle = \omega_\circ = ۱$ و پهنای (واریانس) $\sigma = \delta\omega$ داده شده است.

الف: نمودار شدت نور $(\epsilon = ۱, \mu = ۱)$ و یا اندازه میدان الکتریکی کل را برای $\sigma = \delta\omega = ۰/۱, ۰/۵, ۱, ۲, ۵$ رسم کنید. (برای راحتی می توانید از دستورات متمتیکا در فایل ضمیمه استفاده کنید.)

(۳۰ نمره)

پاسخ: به فایل متمتیکای همراه و یا نسخه پی دی اف شده آن مراجعه کنید.

ب. زمان اولین نقطه ایی که پوشه تابع کمینه می شود را به عنوان زمان همدوسی در نظر بگیرید. زمان همدوسی را بر حسب $\delta\omega$ رسم کنید و نتیجه را تعبیر کنید. (این می تواند زمان تقریبی باشد.)

(۲۰ نمره)

پاسخ: به فایل متمتیکای همراه و یا نسخه پی دی اف شده آن مراجعه کنید.

ج. آیا می توانید رابطه تحلیلی برای ارتباط بین پهنای تابع توزیع فرکانس و زمان همدوسی بیابید؟

(۲۰ نمره)

پاسخ: در حدی که تعداد نورهایی که در جمع به حساب می آیند به سمت بینهایت می رود، می توان کل میدان را به شکل زیر نوشت

$$E_{total} = \frac{۱}{N}\sum_i E_\circ e^{-i(\omega_\circ+\delta\omega_i)t} = \qquad (۳)$$

$$\begin{aligned} E_{total} &= \frac{۱}{N}\sum_i E_\circ e^{-i(\omega_\circ+\delta\omega_i)t} = \frac{e^{-i\omega_\circ t}}{N}\sum_i E_\circ e^{-i\delta\omega_i t} \\ (N\to\infty) &= e^{-i\omega_\circ t}\int d\omega E_\circ P(\omega) e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

در خط آخر ما جمع را بر روی فرکانس ها می زنیم (به جای اندیس i) و فرض را بر این می گذاریم که میدان های مختلف فرکانس های نزدیک به هم دارند که از تابع توزیع $P(\omega)$ داده می شود. حال می توانید این تابع توزیع را گوسی فرض کنیم و انتگرال فوق را از منفی تا مثبت بینهایت حل کنیم که می دهد

$$E_\circ e^{-\frac{۱}{۲}\sigma^۲ t^۲}$$

بنابراین هرچه مقدار σ بزرگتر باشد، میدان با سرعت بیشتری افت می کند. اگر زمان همدوسی را این گونه تعریف کنیم که میدان به

$$\frac{۱}{e^\alpha}$$

مقدار اولیه برسد، آنگاه زمان همدوس برابر است با

$$t_{Coherence} = \sqrt{\frac{\alpha}{۲}}\frac{۱}{\sigma}$$

که با رفتاری که در نمودار های بخش قبل دیدیم مطابق است، یعنی بر حسب σ به صورت $\frac{1}{\sigma}$ افت می کند و هر چه عدم قطعیت تابع توزیع فرکانس بیشتر باشد، زمان همدوسی کاهش می یابد.

۵. خصوصیات تبدیل فوریه

الف. تبدیل فوریه یک تابع زوج، چگونه تابعی است؟ (زوج، فرد، هیچ ارتباطی ندارد) (۱۰ نمره)

پاسخ:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(k) &= \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)e^{-ikx} \\
\mathcal{F}(-k) &= \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)e^{ikx} \\
(x \to -x) &= \frac{۱}{۲\pi}\int_{\infty}^{-\infty} -dx\, f(-x)e^{-ikx} \\
&= \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)e^{-ikx} = \mathcal{F}(k)\,.
\end{aligned}$$

بنابراین تبدیل فوریه نیز زوج است.

ب. انتقال در تبدیل فوریه: چنانچه تبدیل فوریه

$$f(x)$$

تابع

$$\mathcal{F}(k)$$

باشد، آنگاه تبدیل فوریه تابع

$$f(x+a)$$

چه ارتباطی با

$$\mathcal{F}(k)$$

خواهد داشت؟
(۱۰ نمره)

پاسخ:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(k) &= \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)e^{-ikx} \\
&\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x+a)e^{ikx} \\
(x \to x-a) &= \frac{۱}{۲\pi}\int_{\infty}^{-\infty} dx\, f(x)e^{ika}e^{-ikx} \\
&= \frac{e^{ika}}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)e^{-ikx} = e^{ika}\mathcal{F}(k)\,.
\end{aligned}$$

ج. هرمیتی بودن تابع

$$f\left(x\right)$$

چه معنایی برای تبدیل فوریه این تابع خواهد داشت؟ (تبدیل فوریه چه تقارنی خواهد داشت)
با توجه یه اینکه تقارن هرمیتی بودن یک تابع را تعریف نکرده بودیم، این بخش حذف می گردد.
(۱۰ نمره)