تمرین درس موج ـ شماره ۱

صادق رئیسی

۲۸ بهمن ۱۳۹۶

سوال ۱. سیستم جرم و فنری را در نظر بگیرید که جرم فنر قابل صرف نظر کردن نیست. جرم متصل به فنر را M و جرم فنر را m و ثابت فنر را K در نظر بگیرید. فرض کنید جرم فنر به صورت همگن توزیع شده است. جرم موثر فنر را بدست آورید و فرکانس این سیستم جرم و فنر را محاسبه کنید. (راهنمایی: سرعت هر المان از فنر متناسب است با طول فنر در آن نقطه، $v(y) = \frac{vy}{L}$ که v سرعت انتهای فنر را نشان می دهد.
(۱۰ نمره)

سوال ۲.معادله نوسانگر هماهنگ ساده را در حالت ایده آل درنظر بگیرید.

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

برای حل معادله پاسخ های موهومی را در نظر بگیرید به نحوی که

$$\ddot{z}(t) + \omega^2 z(t) = 0.$$

$$x(t) = \Re(z(t))$$

الف. نشان دهید این همان جواب هایی را می دهد که حل مستقیم معادله دیفرانسیل می دهد. (۵ نمره)

ب. تکانه را براساس حل های این معادله پیدا کنید. تکانه بر حسب $z(t)$ چه شکلی می یابد؟ جرم و فرکانس را یک درنظر بگیرید. (۵ نمره)

ج. نمودار فضای فاز را برای این سیستم رسم کنید. (راهنمایی: فقط یکی از فرکانس ها را در نظر بگیرید. مقدار فرکانس را ۱ هرتز درنظر بگیرید. برای شرایط اولیه مکان را در یک متری و سرعت را صفر در نظر گرفته و برای ۱۰۰ نقطه و بگونه ایی که دو تا ۳ دوره تناوب طی شود نمودار فضای فاز را رسم کنید. (۱۰ نمره)

د. با توجه به نمودار قسمت قبل، چه تعبیری می توان از حل $z(t)$ کرد؟ (۵ نمره)

ه. در معادله دیفرانسیل ابتدایی، اصطکاک را اضافه کنید. معادله به شکل زیر در خواهد آمد

$$\ddot{x}(t) + \Gamma \dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

مقدار ضریب افت انرژی یعنی Γ را ۰.۱ در نظر بگیرید و نمودار فضای فاز را برای این حالت بدست آورید. شرایط اولیه بخش قبل را استفاده کنید. (۱۰ نمره)

ی. اثر هدر رفت انرژی (اصطکاک) را توضیح دهید. در نمودار فضای فاز چه کمیتی انرژه سیستم را نشان می دهد. با ریاضیات این را نشان دهید. (۱۵ نمره)

سوال ۳. **بیت های کوانتومی ابررسانا:** یک مدار LC را در نظر بگیرید که بجای القاگر یک اتصال جوزفسون، $JosephsonJunction$ استفاده شده است. جریان این اتصال به این شکل است:

$$I_j = I_\circ \sin(۲\pi\Phi/\Phi_\circ)$$

که در آن Φ شار را نشان می دهد و

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{۲\pi}{\Phi_\circ} v(t)$$

الف. ابتدا انرژی ناشی از اثر القا اتصال ژوسفسون را محاسبه کنید. می توانید از رابطه

$$U = \int_\circ^t I_j(t)v(t)dt$$

استفاده کنید. می شود نشان داد که شار و بار متغییر های مکمل هستند. انرژی خازن را به عنوان انرژی جنبشی و انرژی اتصال را به عنوان انرژی پتانسیل در نظر بگیرید. سپس انرژی کل که مجموع انرژی خازن و اتصال است را حساب کنید. (۱۰ نمره)

ب. انرژی کل را برای شار های کوچک ($\Phi \ll \Phi_\circ$) بسط دهید. این سیستم را در این مرتبه از تقریب با یک نوسانگر هماهنگ ساده مقایسه کنید. (راهنمایی: اگر محاسبه این بخش برایتان آسان نیست، می توانید مستقیما خود جریان اتصال را بسط دهید و تا مرتبه اول نگه دارید.) (۱۰ نمره)

ج. در بسط انرژی تا یک مرتبه بالاتر از نوسانگر هماهنگ جلو بروید. معادله دیفرانسیل سیستم را بدست آورید و با یک نرم افزار نظیر متمتیکا حل عددی معادله را بدست اورید. نمودار فضای فاز این سیستم را بدست آورید. (در متمتیکا می توانید از دستور $NDsolve$ برای این کار استفاده کنید. برای سادگی مقدار $I_\circ$ و $\Phi_\circ$ را یک بگیرید. برای شرایط اولیه هم بار روی خازن را ۱ کولمب و شار را صفر در نظر بگیرید و بقیه متغییر ها را هم یک فرض کنید.) (۲۰ نمره)