نظریه میدان کوانتومی و ذرات پیشرفته ۲ - صفحه ۳۰ - ۱۳۹۵

مکانیزم هیگز: فصل ۲۰ Peskin

a) Abelian Gauge theory:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + |D_\mu \varphi|^2 - V(\varphi)$$

$$V(\varphi) = -\mu^2 \varphi^* \varphi + \frac{\lambda}{2} (\varphi^* \varphi)^2$$

$$D_\mu = \partial_\mu + i g A_\mu$$

$\delta \mathcal{L} = 0$ under $\varphi \to e^{i\alpha}\varphi$ $\quad \alpha = \alpha(x)$ local $U(1)$ gauge transf.

$$A_\mu \to A_\mu(x) - \frac{1}{g}\partial_\mu \alpha(x)$$

اگر در $V(\varphi)$ ، $-\mu^2 = m^2 \longrightarrow$ در آن صورت شکست خودبخودی تقارن میدان اسکالری $U(1)$ اتفاق می‌افتد.

$$\mu^2 > 0$$
$$\lambda > 0$$

در آن صورت پتانسیل min برای $\langle \varphi \rangle \equiv \varphi_0 = \left(\frac{\mu^2}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}$ می‌شود.

• در آن صورت $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2)$ را باید shift بدهیم. مختصات جدیدی که انتخاب می‌کنیم را بصورت زیر می‌گیریم:

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \varphi'(x) = \varphi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1' + i\varphi_2') \quad \text{with} \quad \varphi_0 = \langle \varphi \rangle$$

بطوریکه $0 = \langle \varphi'(x) \rangle$ شود.

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2) = \varphi_0 + \frac{\varphi_1'}{\sqrt{2}} + i\frac{\varphi_2'}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \left\| \begin{array}{l} \varphi_1 = \sqrt{2}\varphi_0 + \varphi_1' \\ \varphi_2 = \varphi_2' \end{array} \right.$$

به این ترتیب

$$-\mu^2 \varphi^* \varphi = -\frac{\mu^2}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) =$$
$$= -\frac{\mu^2}{2}\left((\sqrt{2}\varphi_0 + \varphi_1')^2 + \varphi_2^2\right)$$
$$= -\frac{\mu^2}{2}\left(2\varphi_0^2 + \varphi_1'^2 + 2\sqrt{2}\varphi_0\varphi_1' + \varphi_2^2\right)$$
$$= -\mu^2\left(\varphi_0^2 + \frac{1}{2}\varphi_1'^2 + \sqrt{2}\varphi_0\varphi_1' + \frac{1}{2}\varphi_2^2\right)$$

$$\frac{\lambda}{2}(\varphi^*\varphi)^2 = \frac{\lambda}{2}\left(\varphi_0^4 + \frac{1}{4}\varphi_1'^4 + 2\varphi_0^2\varphi_1'^2 + \varphi_2^4 + \dots\right)$$

جمله جرمی برای φ_1'

$$\lambda\varphi_0^2 \varphi_1'^2 = \lambda\left(\frac{\mu^2}{\lambda}\right)\varphi_1'^2 = \mu^2\varphi_1'^2$$

$$\frac{1}{2} m_{\varphi_1}^2 \varphi_1'^2 = \mu^2 \varphi_1'^2 \longrightarrow m_{\varphi_1}^2 = 2\mu^2 \longrightarrow$$

$$\boxed{m_{\varphi_1} = \sqrt{2}\mu}$$

• حال عبارت $D_\mu\varphi$ را برحسب کمیات جدید می‌نویسیم:

$$D_\mu\varphi = \partial_\mu\varphi + igA_\mu\varphi$$

$$(D_\mu\varphi)(D^\mu\varphi)^* = (\partial_\mu\varphi + igA_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi^* - igA_\mu\varphi^*)$$

$$= \partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi^* + g^2 A_\mu A^\mu \varphi^*\varphi - ig A^\mu\varphi^*\partial_\mu\varphi + igA_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi^*$$

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2) \qquad \partial_\mu\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_\mu\varphi_1 + i\partial_\mu\varphi_2)$$

$$\varphi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 - i\varphi_2) \qquad \partial_\mu\varphi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_\mu\varphi_1 - i\partial_\mu\varphi_2)$$

$$\partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_1\partial^\mu\varphi_1 + \partial_\mu\varphi_2\partial^\mu\varphi_2)$$

$$\varphi_2 = \varphi_2'$$

$$\varphi_1 = \sqrt{2}\varphi_0 + \varphi_1'$$

ادامه $$g^2 A_\mu A^\mu\,\varphi^*\varphi = \frac{1}{2}g^2 A_\mu A^\mu(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)$$

$$= \frac{g^2}{2}A_\mu A^\mu\left((\varphi_1' + \sqrt{2}\varphi_0)^2 + \varphi_2'^2\right)$$

$$= \frac{g^2}{2}A_\mu A^\mu\left(\varphi_1'^2 + 2\varphi_0^2 + 2\sqrt{2}\varphi_0\varphi_1' + \varphi_2'^2\right)$$

به این ترتیب جمله جدیدی برای جرم A_μ بدست می‌آید:

$$g^2\varphi_0^2 A_\mu A^\mu = \frac{1}{2}m_\gamma^2 A_\mu A^\mu$$

$$\rightarrow \quad m_\gamma^2 = 2g^2\varphi_0^2 \quad \rightarrow \quad \boxed{m_\gamma = \sqrt{2}\,g\varphi_0}$$

• به این ترتیب است که فوتون جرم پیدا می‌کند.

نکته: • جرم دار شدن فوتون باعث می‌شود که تقارن پیمانه‌ای بصورت صریح در سطح کلاسیک شکسته شود و این مسئله سبب می‌شود که بازبهنجارپذیری تئوری زیر سوال برود.

✓ البته نکته این جاست که با وجود جمله جرم برای فوتون در $\mathcal{L}$، اتحاد Ward تئوری هنوز درست می‌شود و این بدان معنی است که تقارن پیمانه‌ای مسئله (در سطح کوانتومی) هنوز برقرار است و بدین ترتیب تئوری هنوز بازبهنجارپذیر است.

• مثالی از برقراری اتحاد Ward: وجود یک قطب $p^2 = 0$ در خودانرژی فوتون

فرض کنید $\Pi^{\mu\nu} = (p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu})\,\Pi(p^2)$ & $\Pi(p^2) = \frac{m_\gamma^2}{p^2}$

در این صورت اتحاد Ward $p_\mu\Pi^{\mu\nu} = 0$ هنوز هم برقرار است با وجود اینکه فوتون جرم‌دار شده است.

• نظیر این اتفاق در QED دو بعدی رخ می‌دهد (مدل Schwinger). در اینجا می‌توان نشان داد که

$$D_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu}}{p^2\,(1-\Pi(p^2))} = \frac{g_{\mu\nu}}{p^2 - m_\gamma^2}$$

✓ در اینجا فوتون جرمدار می‌شود

ولی جرم فوتون از وجود قطب در $\Pi(p^2)$ ناشی می‌شود $\Pi(p^2) = \frac{m_\gamma^2}{p^2}$ که باقیمانده این قطب همان m_γ^2 است. والبته $p_\mu \Pi^{\mu\nu} = p_\mu (p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu})\Pi(p^2) = 0$ هنوز هم برقرار است.

✓ می‌توان دید که این مسئله چگونه در مکانیزم هیگز رخ می‌دهد:

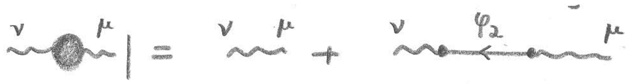
• در عبارت $|D_\mu\varphi|^2$ جمله‌ای به شکل زیر وجود دارد: $(g\sqrt{2}\varphi_0)\, A_\mu \partial^\mu \varphi_2 = m_\gamma A_\mu \partial^\mu \varphi_2$

این جمله باعث بوجود آمدن نوعی vertex جدید بین A_μ و φ_2 می‌شود:

$(i m_\gamma)(-i k^\mu) = m_\gamma k^\mu$ Vertex در فضای فوریه

چون i از iS می‌آید

• اگر بخواهیم خود انرژی فوتون را بدست آوریم:



tree level

(خود انرژی را قبلاً نداشتیم و به دلیل vertex جدید بوجود آمده است.)

سهم tree level:

$$i\, m_\gamma^2\, g_{\mu\nu} + (m_\gamma k_\nu)\left(\frac{i}{k^2}\right)(-m_\gamma k_\mu)$$

$$= \frac{i m_\gamma^2}{k^2}\left(k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu\right) = \Pi(k^2)\left(k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu\right)$$

از جمله $m_\gamma^2 A_\mu A^\mu$ می‌آید

$$m_\gamma^2 A_\mu A^\mu = m_\gamma^2 g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu$$

این همان قطبی است که در $\Pi(k^2)$ قرار بود ظاهر شود و باقیمانده این قطب جرم فوتون است.

• نکته اینجاست که اگر دید تئوری gauge invariance داشته باشیم، درصورتی به $m_\gamma^2 A_\mu A^\mu$ جمله جرمی مربوط به فوتون می‌گوییم که در انتشارگر فوتون داشته باشیم $D_{\mu\nu} = \frac{\cdots}{k^2 - m_\gamma^2}$ و این درصورتی است که

$$\Pi(k^2) = \frac{m_\gamma^2}{k^2}$$

Here the gauge invariance is not broken, because the Ward identity is still valid.

تعداد درجات آزادی قبل و بعد از شکست تقارن:

قبل از شکست تقارن:

فوتون بدون جرم	۲ درجه آزادی
φ_1 و φ_2	۲ درجه آزادی
روی هم	۴ درجه آزادی فیزیکی

بعد از شکست تقارن:

فوتون جرم‌دار	۳ درجه آزادی
φ_1' جرم‌دار	۱ درجه آزادی
$\varphi_2' = \varphi_2$ بدون جرم	۱ درجه آزادی
	۵ درجه آزادی

ظاهراً اشکالی پیش آمده چون تعداد درجات آزادی قبل و بعد از شکست تقارن متفاوت است.

• می‌توان نشان داد که در یک پیمانه مناسب (unitary gauge) می‌توان φ_2 را کاملاً از مسئله بعد از شکست تقارن حذف کرد (می‌توان گفت A_μ اصطلاحاً φ_2 را می‌خورد و جرم‌دار می‌شود)!

یعنی φ_2 کاملاً حذف شده، φ بعد از شکست تقارن کاملاً حقیقی خواهد بود.

به این ترتیب یک درجه آزادی حذف می‌شود و تعداد درجات آزادی قبل و بعد از شکست یکی می‌شود.

The Goldstone mode is eaten by the photon.
(In the unitary gauge φ is real)

---

6) Non-Abelian Gauge Theory: (Higgs Mechanism)

Take the symmetry group G → $\varphi_i \to (1+i\alpha^a t^a)_{ij}\varphi_j$

φ_i are real

$i = 1, \dots N_f$ for complex φ

$i = 1, \dots 2N_f$ for real φ

$$\underbrace{(t^a)_{ij}}_{\substack{\text{pure imaginary} \\ \text{they are Hermitian \&} \\ \text{antisymmetric}}} \longrightarrow \underbrace{i\,(T^a)_{ij}}_{\text{Real \& antisym.}}$$

$$\varphi_i \longrightarrow (1+i\alpha^a(iT^a))_{ij}\varphi_j = (1-\alpha^a T^a)_{ij}\varphi_j$$

Take G as a <u>"local" gauge Group</u>:

$$\partial_\mu \varphi \longrightarrow D_\mu \varphi = (\partial_\mu - ig\, t^a A_\mu^a)\varphi$$
$$= (\partial_\mu - ig\,(iT^a) A_\mu^a)\varphi$$
$$= (\partial_\mu + g\, T^a A_\mu^a)\varphi$$

$$(D_\mu \varphi)_i = (\partial_\mu + g T^a A_\mu^a)_{ij}\, \varphi_j = \partial_\mu \varphi_i + g\,(T^a)_{ij}\, A_\mu^a \varphi_j$$

$$\frac{1}{2}(D_\mu \varphi_i)^2 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_i)^2 + g\,(\partial_\mu \varphi_i)(T^a_{ij} A^{\mu,a} \varphi_j) + \frac{1}{2} g^2\, \underline{(T^a)_{ij}(T^b)_{il}\, \varphi_j \varphi_l\, A_\mu^a A^{\mu,b}}$$

φ_i حقیقی هستند

• دقت کنید که جمله آخر دقیقاً جمله‌ای است که منجر به جمله جرمی برای میدان پیمانه‌ای A_μ^a می‌شود، اگر $\langle \varphi_i \rangle \neq 0$ شود

$$\langle \varphi_i \rangle = \varphi_i^0$$

زیرا در آن صورت $\varphi_i' + \varphi_i^0 = \varphi_i$

$$\frac{1}{2}(D_\mu \varphi_i)^2 \longrightarrow \frac{1}{2} g^2 (T^a \varphi_0)_i (T^b \varphi_0)_i\, A_\mu^a A^{\mu,b} \equiv \frac{1}{2}(m_\gamma^2)_{ab}\, A_\mu^a A^{\mu,b}$$

$$\boxed{\text{Mass Matrix} := m_{ab}^2 = g^2\, (T^a \varphi_0)_i (T^b \varphi_0)_i}$$

به این ترتیب

• m_{ab}^2 همان طور که دیده می‌شود تحت جابجایی a، b متقارن است. پس می‌توان آن را قطری کرد و المان‌های روی قطر جرم میدان‌های پیمانه‌ای هستند.

$$\boxed{m_{aa}^2 = g^2\, (T^a \varphi_0)_i^2}$$

روی a جمع نیست

As we have seen: $\delta^a \varphi_0 \cong (T^a \varphi_0)_i \begin{cases} = 0 & \text{No SSB} \quad m_{aa}^2 = 0 \\ \neq 0 & \text{SSB} \quad m_{aa}^2 \neq 0 \end{cases}$

به این ترتیب بعضی از T^aها تقارن خلأ را می‌شکنند (یعنی به ازای بعضی از aها، $\delta^a \varphi_0 \neq 0$ می‌شود) آنها سهم غیرصفر به ماتریس جرمی می‌دهند و میدان‌های پیمانه‌ای در ارتباط با آنها جرمدار می‌شوند. (هیگس)

The mixed terms: in $\frac{1}{2}(D_\mu \varphi_i)^2$ we have a term:

$$g\,(\partial_\mu \varphi_i)\,(T^a)_{ij}\,\varphi_j\,A^{\mu,a} \longrightarrow g\,\partial_\mu(\varphi_i' + \varphi_{0i})\,T^a_{ij}\,(\varphi_j' + \varphi_{0j})\,A^{\mu,a}$$

$$= g\,\partial_\mu\varphi_i'\,T^a_{ij}\,\varphi_j'\,A^{\mu,a} + g\,\partial_\mu\varphi_i'\,T^a_{ij}\,\varphi_{0j}\,A^{\mu,a} + \dots$$

داریم : $g\,\partial_\mu\varphi_i'\,\underbrace{(T^a\varphi_0)_i}_{(\delta^a\varphi)_i}\,A^{\mu,a}$

$$(\delta^a\varphi_0)_i \begin{cases} = 0 & \text{for no SSB} \\ \neq 0 & \text{for SSB} \end{cases}$$

بنابراین vertex مورد نظر ما فقط وقتی بوجود میاید که a شامل آن جهتهائی شود که تقارن خلاء را میشکنند.

مثلاً در $O(3)$ $\quad \langle \vec{\varphi}_0 \rangle = v\,\hat{e}_3$

$$\delta^{(1)}\varphi^0 = (T^1\varphi^0) \neq 0$$

$$\delta^{(2)}\varphi^0 = (T^2\varphi^0) \neq 0$$

و $\delta^{(3)}\varphi^0 = (T^3\varphi^0) = 0$

$$\rightarrow \quad g\,\partial_\mu\varphi_i'\,(T^a\varphi_0)_i\,A^{\mu,a} = g\,\partial_\mu\varphi_i'\,(T^a)_{ij}\,\varphi_{0j}\,A^{\mu,a}$$

$a=1$, $j=3$: $\quad (T^a)_{ij} = (T^1)_{23} = \epsilon^{213} =$

$a=2$, $j=3$: $\quad (T^a)_{ij} = (T^2)_{13} = \epsilon^{123}$

$$\rightarrow \quad g\,\partial_\mu\varphi_i'\,(T^a\varphi_0)_i\,A^{\mu,a} =$$

$$= g\,\partial_\mu\varphi_i'\,(T^a)_{ij}\,\varphi_{0j}\,A^{\mu,a}$$

$$= g\,\partial_\mu\varphi_2'\,\underbrace{(T^1)_{23}}_{\epsilon^{213}}\,\varphi_{03}\,A^{\mu,1} + g\,\partial_\mu\varphi_1'\,\underbrace{(T^2)_{13}}_{\epsilon^{123}}\,\varphi_{03}\,A^{\mu,2}$$

$$= g\,(\varphi_0^3\,\partial_\mu\varphi_2'\,\epsilon^{321})\,A^{\mu,1} + g\,(\varphi_{03}\,\partial_\mu\varphi_1'\,\epsilon^{312})\,A^{\mu,2}$$

$$= g\,(\vec{\varphi}_0 \times \partial_\mu\vec{\varphi}')_1\,A^{\mu,1} + g\,(\vec{\varphi}_0 \times \partial_\mu\vec{\varphi}')_2\,A^{\mu,2}$$

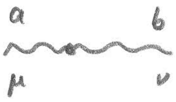
$$= g \sum_{a=1,2} (\vec{\varphi}_0 \times \partial_\mu\vec{\varphi}')_a\,A^{\mu,a}$$

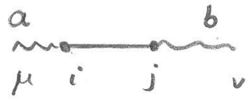
جمع فقط روی جهتهائی است که تقارن خلاء را میشکنند

$\rightarrow$ The corresponding vertex: $\quad g\,\partial_\mu\varphi_i'\,(T^a\varphi_0)_i\,A^{\mu,a} \longrightarrow g\,k_\mu\,(T^a\varphi_0)_i$

for $(T^a\varphi_0)_i \neq 0 \Rightarrow$

در مرتبه درختی خواهیم داشت.

a)  $\quad i g_{\mu\nu} \, m_{ab}^2$

b)  $\quad \sum_{i,j} \left(g k_\mu (T^a \varphi_0)_i\right) \frac{i\delta_{ij}}{k^2} \left(-g k_\nu (T^b\varphi_0)_j\right)$

$$= \frac{-ig^2}{k^2} (k_\mu k_\nu) \sum_i (T^a\varphi_0)_i (T^b\varphi_0)_i$$

$$= \frac{-i k_\mu k_\nu}{k^2} \Big(\underbrace{g^2 \sum_i (T^a\varphi_0)^2}_{m_{ab}^2} \Big)$$

درجمع)  $+$  $=$

$$\Pi_{\mu\nu} = i\left(k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu\right) \frac{m_{ab}^2}{k^2} = i\left(k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu\right) \Pi(k^2)$$

نتیجه: به وجود تولید جمله جرم برای A_μ^a در مکانیزم هیگز برای گروه غیرآبلی، اتحاد Ward در سطح درختی برقرار است. در نتیجه مسئله باز بهنجارش پذیری تئوری در خطر نیست.

مثال غیرآبلی:

مثال ۱ - مدل Georgi - Glashow

SU(2) gauge group coupled to a scalar field φ, that transforms as a spinor SU(2)

$$D_\mu \vec\varphi = (\partial_\mu - ig A_\mu^a \tau^a)\vec\varphi$$

$$\vec\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \qquad \tau^a \text{ Pauli - Matrices} \quad a = 1,2,3$$

$$(\tau^a)_{ij} \qquad i,j = 1,2$$

Assume $\quad \vec\varphi_0 = \langle\vec\varphi\rangle \neq 0 \quad$ (we have SSB)

فرض کنید $\vec\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}0\\v\end{pmatrix}$ یعنی $\vec\varphi_0$ در جهت ۲ است، و تقارن آن تحت تبدیل جهت ۲ حفظ می‌شود. دوران در جهت ۱ و ۳ (با مولدهای τ_1, τ_3) تقارن $\vec\varphi_0$ را می‌شکند.

Shift:

$$D_\mu \vec\varphi = D_\mu(\vec\varphi' + \vec\varphi_0) = (\partial_\mu - ig A_\mu^a\tau^a)(\vec\varphi' + \vec\varphi_0)$$

$$= \partial_\mu \vec\varphi' - ig A_\mu^a \overrightarrow{\tau^a\varphi'} - ig A_\mu^a \overrightarrow{\tau^a\varphi_0}$$

$$= \partial_\mu\vec\varphi' - ig A_\mu^a \overrightarrow{\tau^a\varphi'} - ig A_\mu^a \tau^a \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}0\\v\end{pmatrix}$$

$\rightarrow$

$$|D_\mu \vec{\varphi}|^2 = \frac{1}{2} \underset{\substack{\downarrow \\ (-ig)(ig)}}{g^2} \begin{pmatrix} 0 & v \end{pmatrix} \tau^a \tau^b \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} A_\mu{}^a A^{\mu,b} + \cdots$$

$$= \frac{1}{2} g^2 \begin{pmatrix} 0 & v \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2} \underbrace{\{\tau^a, \tau^b\}}_{=\frac{1}{2}\delta_{ab}} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{2}[\tau^a, \tau^b]}}_{\substack{\text{پادتقارن تحت} \\ a \leftrightarrow b}} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \underbrace{A_\mu{}^a A^{\mu,b}}_{\substack{\text{تقارن تحت} \\ a \leftrightarrow b}} + \cdots$$

$$= \frac{g^2}{8} \begin{pmatrix} 0 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} A_\mu{}^a A^{\mu,a} + \cdots$$

$$= \frac{g^2}{8} v^2 A_\mu{}^a A^{\mu,a} + \cdots = \frac{1}{2} m_{aa}{}^2 A_\mu{}^a A^{\mu,a} + \cdots$$

$$\rightarrow \quad m_{aa} = \frac{gv}{2} \quad \longleftarrow \text{جرم } A_\mu^a \text{ ها} \qquad a = 1, 2, 3$$

$$M^2 = \frac{g^2 v^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

Example 2 :

Assume $\vec{\varphi}$ transforms according to vector representation of $SU(2)$

$\vec{\varphi}$ are real valued (we say $\vec{\varphi}$ are in the adjoint representation)

ماتریس

$$\Phi = \varphi^a t^a \qquad\qquad D_\mu \Phi = D_\mu \varphi^c t^c = \partial_\mu \Phi - ig \, [A_\mu{}^a t^a, \varphi^b t^b]$$

$$[t^a, t^b] = i \epsilon^{abc} t^c \qquad\qquad = \partial_\mu \varphi^c t^c - ig \, A_\mu{}^a \varphi^b \, [t^a, t^b]$$

$$= \partial_\mu \varphi^c t^c - ig \, A_\mu{}^a \varphi^b (i \epsilon^{abc} t^c)$$

$$D_\mu \varphi^c t^c = (\partial_\mu \varphi^c + g \, \epsilon^{abc} A_\mu{}^a \varphi^b) t^c$$

$$\rightarrow \boxed{D_\mu \varphi^c = (\partial_\mu \varphi^c + g \, \epsilon^{abc} A_\mu{}^a \varphi^b)}$$

$\vec{\varphi}_0 = \langle \vec{\varphi} \rangle = \varphi_0 \hat{e}_3$ i.e. $c=3$ is the flat direction along which the symmetry is not broken.

Shift: $\Phi' = \Phi - \Phi_0$

$$\varphi'^c = \varphi^c - \varphi_0^c \quad \begin{cases} (\varphi')^1 = \varphi^1 \\ (\varphi')^2 = \varphi^2 \\ (\varphi')^3 = \varphi^3 - \varphi_0^3 = \varphi^3 - v \end{cases}$$

$$(D_\mu\varphi)^a = \partial_\mu\varphi^a + g\epsilon^{abc}A_\mu{}^b\varphi^c$$

$$= \partial_\mu\varphi^a + g\epsilon^{ab3}A_\mu{}^b\varphi^3 + \dots = \dots + g\epsilon^{ab3}A_\mu{}^b(\varphi'^3 + v)$$

$$\frac{1}{2}(D_\mu\varphi)^2 = \frac{1}{2}(D_\mu\varphi)^a(D^\mu\varphi)^a = \frac{1}{2}(g\epsilon^{ab3}A_\mu{}^b v)(g\epsilon^{ad3}A^{\mu,d}v) + \dots$$

$$= \frac{1}{2}g^2v^2\underbrace{\epsilon^{ab3}\epsilon^{ad3}}_{2\delta^{bd}}A_\mu{}^bA^{\mu,d} + \dots$$

$$= g^2v^2 A_\mu{}^b A^{\mu,b} \qquad b \neq 3$$

$$= g^2v^2\left[(A_\mu{}^{(1)})^2 + (A_\mu{}^{(2)})^2\right]$$

در این نمایش فقط میدانهای پیمانه‌ای جرم‌دار می‌شوند که در فضای flavor در جهتی افتاده‌اند که تقارن $\vec{\varphi}_0$ را می‌شکنند

یعنی $A_\mu{}^{(3)}$ بدون جرم می‌ماند

$$m_{aa}^2 = \begin{cases} m_{11}^2 = 2g^2v^2 \\ m_{22}^2 = 2g^2v^2 \\ m_{33}^2 = 0 \longrightarrow \end{cases}$$

این میدان در جهت flat است و بدون جرم باقی می‌ماند.

Glashow – Weinberg – Salam Theory

- We start with a theory with SU(2) "local" symmetry.
- To break the symmetry spontaneously $\rightarrow$ introduce a scalar field in the spinor representation $\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = \vec{\varphi}$
- As in Example 1, all gauge fields $A_\mu{}^{a=1,2,3}$ are massive
- Introduce also U(1) "local" symmetry in addition to SU(2)

$\longrightarrow$ Complete transformation: $\vec{\varphi} \rightarrow \vec{\varphi}' = e^{i\alpha^a\tau^a + \frac{i\beta}{2}\mathbb{1}}\vec{\varphi}$

$a = 1,2,3 \qquad \tau^a = \frac{1}{2}\sigma^a$

Pauli – Matrix

- Suppose $\vec{\varphi}$ has a non-vanishing vev.

$$\vec{\varphi}_0 = \langle\vec{\varphi}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ v\end{pmatrix}$$

Take $\alpha^1 = \alpha^2 = 0 \qquad \alpha^3 = \beta \longrightarrow \vec{\varphi}_0$ is invariant under SU(2)×U(1)

gauge fixing

$$\vec{\varphi}_0{}' = e^{i\beta(\tau^3 + \frac{\mathbb{1}}{2})}\vec{\varphi}_0 \qquad \tau^3 = \frac{1}{2}\sigma^3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

کمری

$$\tau^3 + \frac{1}{2}\mathbb{1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\vec{\varphi}_0{}' = e^{i\beta\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}}\vec{\varphi}_0 = \vec{\varphi}_0 + i\beta\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ v\end{pmatrix} + \dots = \vec{\varphi}_0$$

پس $\vec{\varphi}_0$ در این پیمانه خاص ناوردا باقی می‌ماند.