Fadeev_ Popov Ghosts

یادآوری

$$Z_0[J] = \int D\varphi \exp\left(\frac{-i}{2}\int d^4x\ \varphi(x)\,(\Box + m^2)\,\varphi(x) + i\int d^4x\ \varphi(x) J(x)\right)$$
$$= \left(\det(\Box + m^2)\right)^{-1/2} \exp\left(\frac{-i}{2}\int d^4x\, d^4y\ J(x)\,\Delta_F(x-y)\,J(y)\right)$$

with
$$(\Box + m^2)\,\Delta_F(x-y) = -i\,\delta^4(x-y)$$
$$\Delta_F(x-y) = \int \frac{i}{p^2 - m^2}\, e^{-ip(x-y)} \frac{d^dp}{(2\pi)^d}$$

For QED

اگر فقط به قسمت پیمانه‌ای Z_0 توجه کنیم

$$Z_0[J_\mu] = \int DA_\mu \exp\left(\frac{i}{2}\int d^4x\ A_\mu\left(\Box g^{\mu\nu} - \left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial^\nu\right)A_\nu + i\int J_\mu A^\mu d^4x\right)$$
$$= N \exp\left(\frac{-i}{2}\int d^4x\, d^4y\ J^\mu(x)\, D_{\mu\nu}(x-y)\, J^\nu(y)\right)$$

with
$$\left(\Box g^{\mu\nu} - \left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial^\nu\right) D_{\nu\rho}(x) = -i\,\delta^\mu{}_\rho\, \delta^4(x)$$

✓ از جمله $\left(-\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2\right)$ برای بدست آوردن معکوس عملگر $(\Box g^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial^\nu)$ استفاده شد.

✓ علت اصلی مشکل آزادی پیمانه‌ای $A_\mu \to A_\mu - \frac{\partial_\mu \alpha}{g}$ بوده است، به این ترتیب که ما ∞ انتخاب برای A_μ داریم

✓ برای تمام انتخاب‌های پیمانه‌ای که از α می‌شود، کنش ناوردا باقی می‌ماند. لذا خاطر این ∞ انتخاب برای measure انتگرال مسیر مشکل‌ساز خواهد بود. زیرا عملاً ∞ پیکربندی برای A_μ وجود دارد که می‌توان بر روی آن انتگرال گرفت و برای همه آنها کنش ناوردا باقی می‌ماند.

✓ ما می‌توانیم این آزادی پیمانه‌ای را محدود کنیم به این ترتیب که مجموعه همه A_μ ها را به کلاس‌های هم‌ارزی تقسیم کنیم. هر کلاس هم‌ارزی با پارامتر α یک نماینده دارد به نام $\bar{A}_\mu$

$$\int DA_\mu = \underbrace{\int D\alpha}_{\text{کپی ∞ از } \int DA_\mu} \int D\bar{A}_\mu$$

روش Fadeev_Popov (FP)

$$Z = N\int DA_\mu\, e^{iS_g} \qquad S_g = \frac{1}{2}\int d^4x\ A_\mu(x)\left(g^{\mu\nu}\Box - \partial^\mu\partial^\nu\right)A_\nu(x)$$

a) Insertion of 1

$\longrightarrow$

a) One dim example:

$$(\Delta_F)^{-1} = \int da\, \delta(f(a)) = \int \frac{da}{df}\, \delta(f)\, df = \left(\frac{da}{df}\right)_{f=0}$$

$$\rightarrow \quad 1 = \int da \quad \delta(f(a))\ \Delta_F$$

$$\underset{\uparrow}{=} \quad \int da\ \delta(f(a)) \ \left(\frac{df}{da}\right)_{f=0}$$

$$(\Delta_F)^{-1} = \left(\frac{da}{df}\right)_{f=0} \rightarrow \quad \Delta_F = \left(\frac{df}{da}\right)_{f=0}$$

شرط $f=0$ از طریق $\delta(f)$ عملاً اعمال می‌شود

$\longrightarrow$

b) Multi-dimensional:

$$(\Delta_F)^{-1} = \prod_{i=1}^{n} \int da_i \prod_{j=1}^{m} \delta^{(m)}(f_j(\vec{a}))$$

$a_i \quad i=1,\dots n$

$f_j \quad j=1,\dots m$

$$= \prod_{j=1}^{m} \int df_j \prod_{i=1}^{n} \det \underbrace{\left(\frac{\partial a_i}{\partial f_j}\right)}_{n\times m\text{-matrix}} \delta^{(m)}(f_j)$$

$$= \det \left(\frac{\partial a_i}{\partial f_j}\right)\Big|_{\vec{f}=0}$$

$$\rightarrow \quad \Delta_F = \det\left(\frac{\partial f_j}{\partial a_i}\right)\Big|_{\vec{f}=0}$$

$$\longrightarrow \quad 1 = \int \prod_{i=1}^{n} da_i \prod_{j=1}^{m} \delta(f_j)\ \det\left(\frac{\partial f_j}{\partial a_i}\right)\Big|_{\vec{f}=0}$$

همین مفهوم را می‌توان به صورت انتگرال مسیر نوشت:

$$\star \quad \boxed{1 = \int \mathcal{D}\alpha\ \delta\left[F^{a}[A_\mu^{\alpha}]\right]} \ \det\left(\frac{\delta F^{a}[A_\mu^{\alpha}(x)]}{\delta\alpha(x)}\right)\Big|_{F[A_\mu^{\alpha}]=0}$$

a) $A_\mu^{\alpha} =$ A_μ تبدیل یافته $\quad (A_\mu^{\alpha} = A_\mu' - \frac{1}{g}\partial_\mu \alpha$ for QED$)$

b) $F[A_\mu^{\alpha}(x)]$ $\quad$ یک تابع دلخواه از A_μ^{α} $\longrightarrow$ منجر می‌شود به قید مورد نظر

c) $\delta[F[A]] = \prod_{\vec{x},a} \delta(F^{a}[A_\mu(x)])$ $\quad$ قید مورد نظر را اعمال می‌کند $F[A^{\alpha}]=0$

d) $\mathcal{D}\alpha = \prod_{\vec{x},a} d\alpha^{a}(x)$

---

e) In QED: $\quad A_\mu' = A_\mu^{\alpha} = A_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha$ -

In QCD: $\quad A_\mu' = A_\mu^{\alpha} = A_\mu - \frac{1}{g}D_\mu\alpha = A_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha - i\,[A_\mu, \alpha]$

$$= A_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha + f^{abc} A_\mu^{a}\alpha^{b}\tau^{c}$$

قید لورنتس: $\quad \delta[F[A_\mu^{\alpha}]] = \delta[\partial_\mu A^{\mu\alpha}]$ که $F[A_\mu^{\alpha}] = \partial_\mu A^{\mu\alpha} = 0$

در QED $\quad \dfrac{\delta F[A_\mu^{\alpha}]}{\delta\alpha} = \dfrac{\delta}{\delta\alpha(x)}\left(\partial^{\mu}A_\mu^{\alpha}(y)\right) = \dfrac{\delta}{\delta\alpha(x)}\left(\partial_\mu A^{\mu} - \frac{1}{g}\Box\alpha(y)\right)$

$$= \frac{-1}{g}\,\Box\,\delta(x-y)$$

$\longleftarrow$ معمولاً آن را نمی‌نویسیم

$$\xrightarrow{\text{In QCD}} \quad \frac{\delta F[A_\mu^\alpha]}{\delta\alpha} \underset{\uparrow}{=} \frac{\delta}{\delta\alpha}\partial_\mu\left(A^\mu - \frac{1}{g}D^\mu\alpha\right) = \frac{-1}{g}\partial^\mu D_\mu$$

$$F = \partial_\mu A^{\mu\alpha}$$

و یا دقیق‌تر

$$A_\mu^{\alpha\, a} = A_\mu{}^a - \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha^a + f^{abc}A_\mu{}^b\alpha^c$$

$$F[A_\mu^{a\alpha}] = (\partial_\mu A^{\mu\alpha})^a = \partial_\mu A^{\mu,a} - \frac{1}{g}\partial_\mu\left(\delta^{ac}\partial^\mu - g f^{abc}A^{\mu,b}\right)\alpha^c$$

$$= \partial_\mu A^{\mu,a} - \frac{1}{g}\partial_\mu\left(D^\mu\alpha\right)^a$$

$$\rightarrow \frac{\delta F[A_\mu^{a\alpha}]}{\delta\alpha^d} = -\frac{1}{g}\partial^\mu\left(\delta^{ac}\partial_\mu - g f^{abc}A_\mu{}^b\right)\delta^{dc}$$

$$= -\frac{1}{g}\partial^\mu\left(\delta^{ad}\partial_\mu - g f^{abd}A_\mu{}^b\right) = \underline{-\frac{1}{g}\partial^\mu\left(D_\mu\right)^{ad}}$$

1st Trick:

$$\mathcal{Z} = \mathcal{N}\int\mathcal{D}A_\mu\, e^{iS_g}\; 1$$

با توجه به این توضیحات

$$= \mathcal{N}\int\mathcal{D}A_\mu e^{iS_g}\int\mathcal{D}\alpha\;\delta[F^a[A_\mu^\alpha]]\;\Delta_\mu[A_\mu^\alpha]$$

with Faddeev-Popov determinant $\Delta_\mu[A_\mu^\alpha] = \det\left(\frac{\delta F[A_\mu^\alpha]}{\delta\alpha}\right)$

به این ترتیب قید مورد نظرمان را از طریق تابع δ در انتگرال مسیر وارد کردیم. تا حال با قید لورنتس $\partial_\mu A^\mu = 0$ کار کرده بودیم
با توجه به این قید فقط روی پیکربندی‌هایی از A_μ انتگرال مسیر گرفته می‌شود که در این قید صدق می‌کند.

قدم اول: می‌دانیم که S_g تحت تبدیل پیمانه‌ای ناوردا است، $S_g[A_\mu^\alpha] = S_g[A_\mu]$

در ضمن فرض کرده‌ایم که $\mathcal{D}A_\mu$ هم تحت تبدیل پیمانه‌ای ناوردا است؛ $\mathcal{D}A_\mu^\alpha = \mathcal{D}A_\mu$

پس انتگرال مسیر روی $\mathcal{D}A_\mu^\alpha$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathcal{Z} = \mathcal{N}\int\mathcal{D}\alpha\;\underbrace{\int\mathcal{D}A_\mu^\alpha\; e^{iS_g[A_\mu^\alpha]}\;\delta[F^a[A_\mu^\alpha]]\;\Delta_F[A_\mu^\alpha]}_{**} \qquad (1)$$

در این رابطه همه A_μ^α ها متعلق به کلاسی هم‌ارزی هستند که پارامتر آن α است. بعد از اینکه ما انتگرال مسیر مربوط به $\mathcal{D}A_\mu^\alpha$ را حل کردیم روی همه پیکربندی‌های α باید جمع بزنیم (انتگرال بگیریم)

قدم دوم: در رابطه ** به جای $A_\mu^\alpha \rightarrow A_\mu$ می‌گذاریم

✓ به این ترتیب منشأ بی‌نهایت شدن $\int\mathcal{D}A_\mu$ که در واقع در $\int\mathcal{D}\alpha$ بود، جدا شد.

✓ همین $\int\mathcal{D}\alpha$ در $\mathcal{N}$ هم ظاهر می‌شود به این ترتیب این عامل ∞ از صورت و مخرج حذف می‌شود.

در روش لوری باید روشی داشته باشیم تا انتگرال (۱) را ساده کنیم :

ابتدا با QED دوری می‌کنیم

for QED: $\Delta_F[A_\mu] = \det\left(-\frac{\Box}{g}\right)$

(Ghosts decouple in QED) ← که به A_μ بستگی ندارد

for QCD: $\Delta_F[A_\mu] = \det\left(-\frac{\partial_\mu D^\mu}{g}\right)$

در QCD دترمینان FP به A_μ بستگی دارد و نمی‌توان آن را از زیر انتگرال مسیری A_μ بیرون آورد (بعداً خواهیم دید که میدان‌های ghost به گلوئون A_μ در QCD کوپل می‌شوند (با A_μ برهمکنش می‌کنند).

2nd Trick: $\delta\left(F^a[A_\mu^\alpha]\right) \longrightarrow \delta\left(F^a[A_\mu^\alpha] - \omega^a\right)$

برای ω^a همراه با یک weight مناسب انتگرال می‌گیریم:

$$(2)\quad Z = \mathcal{N}\int \mathcal{D}\alpha \int \mathcal{D}A_\mu \int \Delta_F[A_\mu]\,\delta\left(F^a[A_\mu] - \omega^a\right) e^{iS_g[A_\mu]}\, \underbrace{e^{-\frac{i}{2\xi}\int \omega^2(x)\, d^4x}}_{\text{weight مورد نظر}}\, \mathcal{D}\omega$$

$$= \mathcal{N}\int \mathcal{D}\alpha \int \mathcal{D}A_\mu\, \underbrace{\exp\left(\frac{-i}{2\xi}\int d^4x\,\left(F^a[A_\mu]\right)^2\right)}\, \Delta_F[A_\mu]\, e^{iS_g[A]}$$

اگر $F^a[A_\mu] = \partial_\mu A^{\mu,a} \Longrightarrow e^{-\frac{i}{2\xi}\int d^4x\,(F^a)^2} = e^{-\frac{i}{2\xi}\int d^4x\,(\partial_\mu A^{\mu,a})^2}$

و این همان جمله gauge fixing در کنش QED/QCD است.

3rd Trick:

$$\Delta_F[A] = \begin{cases} \text{in QED} \longrightarrow \det\left(-\frac{\Box}{g}\right) = \det M \\ \text{in QCD} \longrightarrow \det\left(-\frac{\partial_\mu D^\mu}{g}\right) = \det M \end{cases}$$

در SU(N)

$$\det(M^{ab}) = \int \mathcal{D}c\,\mathcal{D}\bar{c}\, \exp\left(-i\int d^dx\; \bar{c}^a(x)\, M^{ab}\, c^b(x)\right)$$

complex Grassmann variables. (They are not spinors)

$$\longrightarrow \quad Z = \mathcal{N}\int \mathcal{D}\alpha \int \mathcal{D}A_\mu\, e^{iS_g - \frac{i}{2\xi}\int d^dx\,\left(F^a[A_\mu]\right)^2} \int \mathcal{D}c\,\mathcal{D}\bar{c}\; e^{-i\int d^dx\, \bar{c}(x) M^{ab} c(x)}$$

اگر $\det\left(\frac{-\Box}{g}\right)\delta(x-y) \longrightarrow \int \mathcal{D}c\,\mathcal{D}\bar{c}\, \exp\left(-i\int d^dx\, d^dy\; \bar{c}(x)\, M^{ab}\, \delta(x-y)\, c(y)\right)$

$$= \int \mathcal{D}c\,\mathcal{D}\bar{c}\, \exp\left(-i\int d^dx\; \bar{c}(x)\, M^{ab}\, c(x)\right)$$

5/

✓ c و $\bar{c}$ گراسمنی هستند ولی برخلاف ψ و $\bar{\psi}$ اسپینور نیستند (آن‌ها اسکالرند)

✓ $c, \bar{c}$ تحت تبدیلات لورنتس مانند میدان‌های اسکالر هستند ولی آمارشان فرمیونی است. ← میدان گراسمنی.

In QED:

$$\mathcal{Z} = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\alpha \int \mathcal{D} A_\mu \, e^{iS_g} \, e^{iS_{g.f.}} \int \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \, e^{\frac{i}{g} \int d^dx \, \bar{c}(x) (-\Box) c(x)}$$

با توجه به اینکه هیچ نوع برهمکنشی بین c و A_μ وجود ندارد می‌توانیم انتگرال روی c را در صورت $\mathcal{Z}$ با آنچه در مخرج $\mathcal{Z}$ ظاهر می‌شود حذف کنیم؛

به این ترتیب ghost ها از QED اصطلاحاً decouple می‌شوند.

و $\mathcal{L}_g = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{a} F^{\mu\nu,a} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 \sim -\frac{1}{2} A_\mu \left(g^{\mu\nu} \Box - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\mu \partial^\nu \right) A_\nu$

In SU(N)

$$\int d^4x \, \mathcal{L} = S_g + S_{g.f.} + S_{ghost}.$$

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{2} \mathrm{tr}\left(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\right) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}{}^{a} F^{\mu\nu,a}$$

$$\mathcal{L}_{g.f.} = -\frac{1}{2\xi} (F^a)^2 \qquad F^a = \text{قید پیمانه}$$

$$\mathcal{L}_{ghost} = -\bar{c}^a M^{ab} c^b$$

$$M^{ab} = \left(-\frac{\partial_\mu}{g} D^\mu\right)^{ab} = -\frac{1}{g} \partial^\mu \left(\delta^{ab} \partial_\mu - f^{acb} A_\mu{}^c\right)$$

$\longrightarrow$

$$\begin{aligned} M^{ab} c^b &= -\frac{1}{g} \left(\partial^\mu D_\mu\right)^{ab} c^b = \frac{-1}{g} \partial^\mu \left(\partial_\mu \delta^{ab} - f^{acb} A_\mu{}^c\right) c^b \\ &= -\frac{1}{g} \left(\Box \delta^{ab} - f^{abc} \partial^\mu (A_\mu{}^c c^b)\right) \\ &= -\frac{1}{g} \partial^\mu \left(\partial_\mu c^a + i (i f^{acb}) A_\mu{}^c c^b\right) \\ &= -\frac{1}{g} \partial^\mu \left(\partial_\mu c + i \left[A_\mu, c\right]\right)^a \end{aligned}$$

اثر D_μ بر روی c در نمایش الحاقی است