1

ذرات بنیادی مقدماتی - صفحه ۵۵

Magnetic Moment

تعیین دوقطبی مغناطیسی باریون‌های هشت تائی: (پروتون - نوترون و ...)

$$\vec{\mu} = \left(\frac{qe}{mc}\right)\vec{S} \xrightarrow{\text{مولفه سوم}} \mu_z = \left(\frac{qe}{mc}\right)S_z = \left(\frac{qe}{mc}\right)\frac{\hbar}{2}$$

$S_z = \frac{\hbar}{2}$

دوقطبی مغناطیسی $\boxed{\mu = \frac{qe\hbar}{2mc}}$

برای الکترون — $\mu_e = \frac{e\hbar}{2m_e c}$ Bohr magneton in SI - units $= 9.27\times10^{-24}\ JT^{-1}$

$eq = e$

ژول، تسلا

برای نوکلئون‌ها — $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p c}$ Nuclear magneton $= 5.05\times10^{-27}\ JT^{-1}$

$m_p = m_n$

نوترون، پروتون

$$\left.\begin{aligned} \mu_u(\uparrow) &= +\frac{2}{3}\frac{e\hbar}{2m_u c} \\ \mu_d(\uparrow) &= -\frac{1}{3}\frac{e\hbar}{2m_d c} \\ \mu_s(\uparrow) &= -\frac{1}{3}\frac{e\hbar}{2m_s c} \end{aligned}\right\}$$

با این حساب: $\vec{\mu}_f = \frac{q_f e}{m_f c}\vec{S} = \frac{2}{\hbar}\mu_f\vec{S}$

• محاسبه ممان مغناطیسی (دوقطبی مغناطیسی) کلی از باریون‌های هشت تائی:

فرض: اول: فرض می‌کنیم این باریون در حالت پایه $l = l' = 0$ است. به این ترتیب $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ فقط شامل $\vec{S}$ است. و مولفهٔ ۳ برای $\vec{J}$ همان مولفه ۳ برای $\vec{S}$ است.

دوما: فرض می‌کنیم باریون مربوطه در حالت Spin - up باشد. یعنی $S_z = +\frac{\hbar}{2}$

$$\vec{\mu}_B = \vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2 + \vec{\mu}_3 \leftarrow \text{کل } \vec{\mu}_B$$

$$\langle B\uparrow|(\vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2 + \vec{\mu}_3)_z|B\uparrow\rangle =$$

$\vec{\mu}_i = \underbrace{\left(\frac{q_i e}{m_i c}\right)}\vec{S}_i$

$\frac{q_i e}{m_i c} = \frac{2}{\hbar}\mu_i$

$(\vec{\mu}_i)_z = \frac{2}{\hbar}\mu_i(\vec{S}_i)_z$

$\mu_i = \frac{q_i e}{m_i c}$

$$= \frac{2}{\hbar}\sum_{i=1}^{3}\langle B\uparrow|\mu_i(\vec{S}_i)_z|B\uparrow\rangle = (\vec{\mu}_B)_z^{tot}$$

$i = 1, 2, 3$ سه طعم تشکیل دهنده باریون

مثال • ممان مغناطیسی پروتون را با این فرض محاسبه می‌کنیم که پروتون در حالت پایه $l = l' = 0$ و اسپین up دارد:

$$|P;\ j = \tfrac{1}{2},\ m_s = +\tfrac{1}{2}\rangle = \frac{2}{3\sqrt{2}}\Big|u(\uparrow)u(\uparrow)d(\downarrow) - \frac{1}{2}u(\uparrow)u(\downarrow)d(\uparrow) \pm \dots\Big\rangle$$

جمله اول را در نظر می‌گیریم (سایر جمله‌ها به همین ترتیب محاسبه می‌شوند):

$$\frac{2}{3\sqrt{2}} \,|u(\uparrow)\, u(\uparrow)\, d(\downarrow)\rangle$$

$$\sum_{i=1}^{3} \mu_i S_{iz} = \mu_1 S_{1z} + \mu_2 S_{2z} + \mu_3 S_{3z} \qquad \text{(as operator)}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \mu_i S_{iz} \,|u(\uparrow)\, u(\uparrow)\, d(\downarrow)\rangle = \mu_u \left(S_{uz}\, |u\uparrow\rangle\right) + \mu_u \left(S_{uz}\, |u\uparrow\rangle\right) + \mu_d \left(S_{dz}\, |d\downarrow\rangle\right)$$

$$= \left(+\frac{\hbar}{2}\mu_u + \frac{\hbar}{2}\mu_u - \frac{\hbar}{2}\mu_d\right) |u(\uparrow)\, u(\uparrow)\, d(\downarrow)\rangle$$

$$= \left(\hbar \mu_u - \frac{\hbar}{2}\mu_d\right) |u(\uparrow)\, u(\uparrow)\, d(\downarrow)\rangle$$

$$\mu_u = \frac{2}{3}\frac{e\hbar}{2m_u c} \qquad \mu_d = -\frac{1}{3}\frac{e\hbar}{2m_d c}$$

حال این رابطه را در $\langle u(\uparrow)\, u(\uparrow)\, d(\downarrow)|$ bra ضرب می‌کنیم

$$\Rightarrow \frac{2}{\hbar}\left(\frac{2}{3\sqrt{2}}\right)^2 \frac{\hbar}{2}\left(2\mu_u - \mu_d\right) \underbrace{\langle u(\uparrow)\, u(\uparrow)\, d(\downarrow) | u(\uparrow)\, u(\uparrow)\, d(\downarrow)\rangle}_{=1}$$

$$\langle p; j=\tfrac{1}{2}, m_s=+\tfrac{1}{2}|\left(\vec{\mu}_1+\vec{\mu}_2+\vec{\mu}_3\right)_z |p; j=\tfrac{1}{2}, m_s=+\tfrac{1}{2}\rangle_{\text{جمله اول}}$$

$$= \frac{2}{9}\left(2\mu_u - \mu_d\right)$$

این فقط سهم جمله اول در تابع موج پروتون در حالت اسپین μ_p

سایر جمله‌ها را هم به همین ترتیب می‌توان محاسبه کرد. نتیجه: $\boxed{\mu_p = \frac{1}{3}\left(4\mu_u - \mu_d\right)}$

نکته: همه جا فرض این بوده که $\langle u\uparrow|u\uparrow\rangle = 1$ ، $\langle d\downarrow|d\downarrow\rangle = 1$ و در سایر موارد $\langle u\uparrow|u\downarrow\rangle = 0$ وغیره

$$\mu_u = \frac{2}{3}\frac{e\hbar}{2m_u c}$$

$$\mu_d = -\frac{1}{3}\frac{e\hbar}{2m_d c}$$

$$\mu_s = -\frac{1}{3}\frac{e\hbar}{2m_s c}$$

برای بدست آوردن $\mu_f = \dfrac{q_f e\hbar}{2m_f c}$ باید از رابطه استفاده کرد و در نهایت بجای m_f جرم ساختاری (dressed mass) کوارک را جایگزین کرد

$$m_u \simeq m_d \simeq 336 \text{ MeV} \quad , \quad m_s \simeq 538 \text{ MeV}$$

که قبلاً آن را 303 MeV یا 308 گرفته بودیم.

با جایگذاری این اعداد در رابطه تئوری

$$\begin{cases} \mu_p = \frac{1}{3}(4\mu_u - \mu_d) \\ \mu_n = \frac{1}{3}(4\mu_d - \mu_u) \end{cases}$$

و مقایسه آن با آزمایش داریم

$$\left(\frac{\mu_n}{\mu_p}\right)_{theor.} = \left(\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)\right) \times \frac{1}{\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)}$$

$$= \frac{-4-2}{8+1} = -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3} \simeq -0.\bar{6}$$

$$\left(\frac{\mu_n}{\mu_p}\right)_{exp} = -0.68497945 \pm 0.000\,00058$$

که نتیجه خوبی است. به این ترتیب با وجود اینکه ممان مغناطیسی کوارک را به تنهائی نمی‌توان اندازه گرفت،

ما مدلی نوشتیم ما با استفاده از مدل تابع موج درون پروتون و نوترون را بدست آوردیم. لذا نسبت $\frac{\mu_n}{\mu_p}$ را از طریق

آن بصورت نظری بدست آوردیم و نتیجه را با آزمایش مقایسه کردیم

و با توجه به نزدیک بودن نتیجه آزمایش و تئوری می‌توانیم نتیجه بگیریم که تئوری بنیادی (در واقع مدل استاندارد) صحیح است.

Anomalous Magnetic Moment of Quarks

اگر به رابطه ممان مغناطیسی برای ذره با بار (qe) دقت کنیم $\mu = \frac{qe\hbar}{2mc}$ آن را به صورت زیر هم

می‌توان نوشت:

$$\mu = g\,\frac{qe}{2mc}\,\frac{\hbar}{2} \quad \text{with} \quad g = 2$$

به $g = 2$ در اینجا ضریب ژیرومغناطیسی می‌گویند.

✓ برای ذره دیراک آزاد با اسپین $\frac{1}{2}$ و جرم m ضریب g مساوی است با 2.

✓ ولی اگر ذره دیراک آزاد نباشد (باید تصحیحات تابشی را در نظر بگیریم) و یا اینکه فرمیونی داشته باشیم که ساختار داشته باشد (حالت مقیدی از ذرات بنیادی باشد، مثل باریونها که فرمیونند ولی ذره بنیادی نیستند، بلکه حالات مقیدی هستند از کوارکها)

آنگاه $g \neq 2$

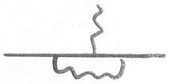
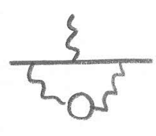
در اولین مرتبه اختلال

$$g \to g(1+\alpha) \approx g'$$

$$\mu \cong g(1+\alpha)\,\frac{qe}{2mc}\,\frac{\hbar}{2}$$

به ضریب α، anomalous magnetic moment می‌گویند. (ممان مغناطیسی ناهنجار)

AMM

در محاسبه g' را از روی  +  + ... و تصحیحات بالاتر آن محاسبه می‌کنند.

• برای الکترون‌ها می‌توانیم از ابزار اختلال (بسط اختلال) استفاده کنیم ولی برای کوارک‌ها نمی‌توانیم متکی به این ابزار باشیم (به علت آزادی مجانبی در مورد نیروهای قوی).

• در QED (کوانتوم الکترودینامیک) اگر سهم  را محاسبه کنیم:

$$g' = g(1+\alpha) \rightarrow \alpha = \frac{g'-g}{g} = \frac{g'-2}{2} \approx \frac{\alpha_e}{2\pi} = 0.00116171$$

$\alpha_e = \frac{1}{137}$ ثابت ساختار ریز برای الکترون است.

اگر عدد α را با آنچه در آزمایش بدست می‌آید مقایسه کنیم واقعاً تعجب می‌کنیم:

$$(\alpha)^{QED}_{exp} = 0.00115965218073 \quad \text{(Wikipedia)}$$

با توجه به اینکه تا چندین رقم بعد از ممیز دو نتیجه مساوی شده‌اند (و تازه اینجا ما فقط تصحیح مرتبه اول تابشی را در نظر گرفته‌ایم) به نظر می‌رسد، ساختار مدل استاندارد لااقل در قسمت QED درست است.

به چنین تست‌هایی Precision test QED می‌گویند.

• در مورد کوارک‌ها محاسبات اختلالی دیگر کار نمی‌کنند (آزادی مجانبی - UV freedom & IR slavery)

برای تعیین AMM برای کوارک‌ها (مثلاً up , down) از دو مقدار

$$\mu_p = +2.79\,\mu_N$$
$$\mu_n = -1.91\,\mu_N$$

در اینجا $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_pc}$ (Nuclear magneton) است.

از طرفی داریم

$$\mu_u = \frac{1}{5}(4\mu_p + \mu_n) \longleftarrow \begin{cases} \mu_p = \frac{1}{3}(4\mu_u - \mu_d) \\ \mu_n = \frac{1}{3}(4\mu_d - \mu_u) \end{cases}$$
$$\mu_d = \frac{1}{5}(4\mu_n + \mu_p)$$

$$\longrightarrow \mu_u \cong 1.852\,\mu_N$$
$$\mu_d \simeq -0.972\,\mu_N$$

• حال با استفاده از $\mu_{u,d=f}$ و استفاده از یک کمیت پدیده‌شناختی می‌توان α_f را بدست آورد $(f = u,d)$:

$$I_f = \frac{\mu_N}{\mu_f} q_f m_p = \frac{\frac{e\hbar}{2m_pc} q_f m_p}{(1+\alpha_f)\frac{e q_f \hbar}{2m_f c}} = \frac{m_f}{1+\alpha_f}$$

همه کمیت‌های $I_f = \frac{\mu_N}{\mu_f} q_f m_p$ را می‌توانیم بصورت آزمایشگاهی (یا غیرمستقیم تعیین کنیم)
از طرفی در سمت راست این رابطه m_f جرم ساختاری کوارک‌ها است و آن را هم می‌توانیم با دقت خوبی بنویسیم:

$$\longrightarrow \boxed{\alpha_f = \frac{m_f}{q_f\, m_p} \frac{\mu_f}{\mu_N} - 1} \qquad (*)$$

$$I_f = \frac{m_f}{1+\alpha_f} = \frac{\mu_N}{\mu_f} q_f\, m_p$$

$$I_u = \frac{m_u}{1+\alpha_u} = \frac{\mu_N}{\mu_u} q_u\, m_p \simeq 0.338 \text{ GeV}$$

$$I_d = \frac{m_d}{1+\alpha_d} = \frac{\mu_N}{\mu_d} q_d\, m_p \simeq 0.322 \text{ GeV}$$

از روی جدول $(*)$ و مقادیر

$$m_u \sim m_d \simeq 0.420 \text{ GeV}$$

$$\Longrightarrow \alpha_{up} \simeq 0.242$$

$$\alpha_d \simeq 0.304$$

<u>نکته مهم</u>: فقط در صورتیکه $\alpha_u - \alpha_d \simeq 0.05$ باشد، فرض تقارن ایزواسپینی درست است که اعداد فوق قابل توجیه هستند.

جرم باریون‌ها: مانند محاسبه جرم مزون‌ها، در اینجا هم باید برای محاسبه جرم باریون‌ها نقش اسپین را در نظر بگیریم. تنها تفاوت اصلی با فرمولی که برای مزون داشتیم، اینکه در مورد باریون‌ها ۳ ذره داریم (برخلاف مزون‌ها که ۲ ذره تشکیل حالت مقید می‌دادند) و برهمکنش اسپین‌ها در اینجا بصورت ۲ تا ۲ تا است:

$$M(\text{baryon}) = m_1 + m_2 + m_3 + A' \left(\frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{m_1 m_2} + \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_3}{m_1 m_3} + \frac{\vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3}{m_2 m_3} \right)$$

$A' =$ fit parameter

حاصلضرب اسپین‌ها:

$$\vec{J} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3$$

$$\vec{J}^2 = \vec{S}_1^2 + \vec{S}_2^2 + \vec{S}_3^2 + 2\left(\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_3 + \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3\right)$$

(برای بدست آوردن جرم هشت تائی و ده تائی باریونی فرض می‌کنیم $m_u = m_d = m_s$ (این جرم‌ها ساختاری هستند

البته در واقعیت تقارن ایزواسپینی $SU(3_f)$ نداریم و این جرم‌ها باهم برابر نیستند، ولی ما فعلاً برای راحتی

این فرض را کرده‌ایم)

$$J^2 \rightarrow \hbar^2 j(j+1)$$

$$\vec{S}_1^2 \rightarrow \hbar^2 s_1(s_1+1) = \hbar^2 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{3}{4}\hbar^2$$

$$\vec{S}_2^2 \rightarrow \hbar^2 s_2(s_2+1) = \hbar^2 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{3}{4}\hbar^2$$

$$\vec{S}_3^2 \rightarrow \hbar^2 s_3(s_3+1) = \hbar^2 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{3}{4}\hbar^2$$

$$\chi = \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_3 + \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3 = \frac{1}{2}\left(\vec{J}^2 - \left(\vec{S}_1^2 + \vec{S}_2^2 + \vec{S}_3^2\right)\right)$$

$$\chi = \frac{\hbar^2}{2}\left(j(j+1) - 3 \times \frac{3}{4}\right) = \frac{\hbar^2}{2}\left(j(j+1) - \frac{9}{4}\right)$$

Baryon Octet	$j = \frac{1}{2}$	$\chi_{octet} = -\frac{3}{4}\hbar^2$
Baryon Decuplet	$j = \frac{3}{2}$	$\chi_{decuplet} = +\frac{3}{4}\hbar^2$

مثال: با فرض برابری $m_u = m_d$ باریون‌ها را به چند دسته تقسیم می‌کنیم:

(a) برای نوکلئون‌ها، چند تائی‌های Δ ، Ω^- داریم:

$$\text{Nucleons}\ (p(uud),\ n(udd)) \xrightarrow[\substack{j=\frac{1}{2} \\ m_u \sim m_d}]{} M_N = 3m_u - \underbrace{\frac{3}{4}\hbar^2}_{\leftarrow \chi(\text{octet})} \frac{A'}{m_u^2}$$

$$\Delta\ \left(\Delta^-(ddd),\ \Delta^0(ddu),\ \Delta^+(duu),\ \Delta^{++}(uuu)\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{j=\frac{3}{2} \\ m_u \sim m_d}]{} M_\Delta = 3m_u + \underbrace{\frac{3}{4}\hbar^2}_{\leftarrow \chi(\text{decuplet})} \frac{A'}{m_u^2}$$

$$\Omega^-(sss) \xrightarrow[j=\frac{3}{2}]{} M_{\Omega^-} = 3m_s + \underbrace{\frac{3}{4}\hbar^2}_{\leftarrow \chi(\text{decuplet})} \frac{A'}{m_s^2}$$

(b) جرم $\Sigma^*(uds)$ و $\Xi^*(ssu)$ (با توجه به اینکه $m_u = m_d$ فرض می‌شود، در ساختار Σ^{*-}، Σ^{*0} و Σ^{*+} که به ترتیب از dds، uds و uus ساخته شده‌اند تفاوتی وجود ندارد) $M(\Sigma^*(uus)) = ?$

(به همین ترتیب تفاوتی بین Ξ^{-*} و Ξ^{+*} که از dss و uss ساخته شده‌اند وجود ندارد)

$$1)\quad M\big(\Sigma^*(\underset{1\,2\,3}{uds})\big) = 2m_u + m_s + A'\left(\frac{\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2}{m_u^2} + \frac{\vec{S}_1\cdot\vec{S}_3}{m_u m_s} + \frac{\vec{S}_2\cdot\vec{S}_3}{m_u m_s}\right)$$

$$= 2m_u + m_s + A'\left[\left(\frac{\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2}{m_u^2} - \frac{\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2}{m_u m_s}\right) + \left(\frac{\vec{S}_1\cdot\vec{S}_3 + \vec{S}_2\cdot\vec{S}_3 + \vec{S}_1\cdot\vec{S}_2}{m_u m_s}\right)\right]$$

جزء ساختن $\chi_{decuplet} = +\frac{3}{4}\hbar^2$ یک جمله را اضافه و کم کرده‌ام.

از قبل می‌دانیم

$$\boxed{\chi_{\Sigma^*} = \frac{\vec{S}_1\cdot\vec{S}_3 + \vec{S}_2\cdot\vec{S}_3 + \vec{S}_1\cdot\vec{S}_2}{m_u m_s} = +\frac{3}{4}\hbar^2\frac{1}{m_u m_s}}$$ است.

از طرفی باید $\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2$ را حساب کنیم:

$$\vec{S}_1 + \vec{S}_2 = \vec{S}_a \qquad \vec{J} = \vec{S} = \vec{S}_3 + \vec{S}_a$$

$$S_1 = \frac{1}{2},\ S_2 = \frac{1}{2} \longrightarrow S_a = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0 \quad \text{یا} \quad S_a = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 1$$

در اینجا S_a دو مقدار دارد و ما نمی‌دانیم (فعلاً) که کدام دو مقدار را باید انتخاب کنیم. پس می‌رویم سراغ اطلاعات قبلی

اگر $\left.\begin{matrix} S_a = 0 \\ S_3 = \frac{1}{2}\end{matrix}\right\}$ $S = j = \frac{1}{2}$ ($\rightarrow$ هشت‌تائی باریونی) $\longrightarrow$ تابع موج اسپینی پادمتقارن تحت جابجائی ذره $1 \leftrightarrow 2$

اگر $\left.\begin{matrix} S_a = 1 \\ S_3 = \frac{1}{2}\end{matrix}\right\}$ $S = j = \frac{1}{2},\ \frac{3}{2} \longrightarrow$ ($S = \frac{3}{2}$ ده‌تائی باریونی) $\longrightarrow$ تابع موج اسپینی متقارن تحت جابجائی ذره $1 \leftrightarrow 2$

نتیجه: در مورد decuplet ها $S_a = 1$ را باید انتخاب کنیم (Σ^* عضو ده‌تائی باریونی است).

$$\longrightarrow \vec{S}_a = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 \longrightarrow \vec{S}_a^{\,2} = \vec{S}_1^{\,2} + \vec{S}_2^{\,2} + 2\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2$$

$$\longrightarrow \vec{S}_1\cdot\vec{S}_2 = \frac{1}{2}\left(\vec{S}_a^{\,2} - \vec{S}_1^{\,2} - \vec{S}_2^{\,2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2 - \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)\hbar^2$$

$$= \frac{1}{4}\hbar^2$$

$$M(\Sigma^*) = 2m_u + m_s + A'\left[\left(\frac{\hbar^2/4}{m_u^2} - \frac{\hbar^2/4}{m_u \cdot m_s}\right) + \frac{3/4\,\hbar^2}{m_u m_s}\right]$$

$$\boxed{M(\Sigma^*) = 2m_u + m_s + A'\frac{\hbar^2}{4}\left(\frac{1}{m_u^2} + \frac{2}{m_u \cdot m_s}\right)}$$

به همین ترتیب برای Ξ^* بدست می‌آید

2) $$\boxed{M(\Xi^*) = 2m_s + m_d + A'\frac{\hbar^2}{4}\left(\frac{1}{m_s^2} + \frac{2}{m_u m_s}\right)}$$

اگر

$$m_u = m_d = 363\ MeV$$

$$m_s = 538\ MeV$$

$$A' = \left(\frac{2m_u}{\hbar}\right)^2 50\ \frac{MeV}{c^2} \qquad \text{(best fit)}$$

$I=1 \quad I_3 = \pm 1, 0 \quad (\Sigma^-, \Sigma^0, \Sigma^+) \; : \; \Sigma(uds)$ جرم (c1) (c)

$I=0 \quad I_3 = 0 \qquad\qquad : \; \Lambda^0(uds)$ جرم (c2)

برای بدست آوردن رابطه جرم در اینجا باید بیشتر دقت کرد. می‌دانیم که هر دو ذره ساختار یکسان دارند ولی توابع موج اسپینی آنها متفاوت است:

$\Sigma^- \qquad (ds - sd)d$

$* \; \Sigma^0 \qquad [(us - su)d + (ds - sd)u]$

$\Sigma^+ \qquad (us - su)u$

$\Lambda^0 \qquad \frac{1}{\sqrt{12}}[2(ud - du)s + (us - su)d - (ds - sd)u]$

اگر به Λ^0 و Σ^0 توجه کنیم، Λ^0 تحت جابجایی $u \leftrightarrow d$ پادمتقارن و Σ^0 تحت جابجایی $d \leftrightarrow u$ متقارن است

اگر ترتیب (uds) را به عنوان ذرات (123) انتخاب کنیم، در اینصورت

$u \quad d \quad s$

$$\psi(\text{flavor})\big|_{\Sigma^0} = \text{متقارن}$$

$$\psi(\text{flavor})\big|_{\Lambda^0} = \text{پادمتقارن}$$

اگر قرار باشد $\psi(\text{spin})\,\psi(\text{flavor})$ در کل برای این دو ذره تحت تبدیل $u \leftrightarrow d$ متقارن باشد، داریم

$$\psi_{\Sigma^0} \Rightarrow \psi(\text{flavor})\ \psi(\text{spin})$$

متقارن ⟵ متقارن ⟵ متقارن

$$\psi_{\Lambda^0} \Rightarrow \psi(\text{flavor})\ \psi(\text{spin})$$

متقارن ⟵ پادمتقارن ⟵ پادمتقارن

نکته: اینکه ما ترتیب کوارک‌ها را $uds = 123$ در نظر گرفتیم (به ترتیب) در کلیت حل مسئله تغییری نمی‌دهد.

با توجه به اینکه $(\psi(spin))_{\Sigma^0}$ متقارن است $\vec{S}_1+\vec{S}_2=\vec{S}_a$ ، $1 = S_a$ (متقارن)

$(\psi(spin))_{\Lambda^0}$ پادمتقارن است $\vec{S}_1+\vec{S}_2=\vec{S}_a$ ، $0 = S_a$ (پادمتقارن)

$\longrightarrow$

$$m(\Sigma(uds)) = m_u + m_d + m_s + A'\left(\frac{\vec{S}_u\cdot\vec{S}_d}{m_u m_d} + \frac{\vec{S}_u\cdot\vec{S}_s}{m_u m_s} + \underbrace{\frac{\vec{S}_d\cdot\vec{S}_s}{m_d m_s}}_{\approx m_u m_s}\right)$$

$m_u \sim m_d$

$$= 2m_u + m_s + A'\left[\left(\frac{\vec{S}_u\cdot\vec{S}_d}{m_u m_d} - \frac{\vec{S}_u\cdot\vec{S}_d}{m_u m_s}\right) + \frac{(\vec{S}_u\cdot\vec{S}_d + \vec{S}_u\cdot\vec{S}_s + \vec{S}_d\cdot\vec{S}_s)}{m_u m_s}\right]$$

$$= 2m_u + m_s + A'\left[\frac{\vec{S}_u\cdot\vec{S}_d}{m_u}\left(\frac{1}{m_d} - \frac{1}{m_s}\right) + \frac{\chi_\Sigma}{m_u m_s}\right]$$

$$\underset{\text{octet}}{\chi_\Sigma} = \vec{S}_u\cdot\vec{S}_s + \vec{S}_u\cdot\vec{S}_d + \vec{S}_d\cdot\vec{S}_s = -\frac{3}{4}\hbar^2$$

$$\vec{S}_u + \vec{S}_d = \vec{S}_a \quad \rightarrow \quad \vec{S}_a^{\,2} = \vec{S}_u^{\,2} + \vec{S}_d^{\,2} + 2\vec{S}_u\cdot\vec{S}_d$$

$$\rightarrow \vec{S}_u\cdot\vec{S}_d = \frac{1}{2}\left(\vec{S}_a^{\,2} - \vec{S}_u^{\,2} - \vec{S}_d^{\,2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1(1+1) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\right)\hbar^2$$

$S_a = 1$

$$= \frac{1}{2}\left(2 - \frac{3}{4}\times 2\right) = \frac{\hbar^2}{4}$$

$$m(\Sigma) = 2m_u + m_s + A'\left(\frac{\hbar^2/4}{m_u}\left(\frac{1}{m_d} - \frac{1}{m_s}\right) - \frac{3}{4}\hbar^2\frac{1}{m_u m_s}\right)$$

$m_d \sim m_u$

$$\boxed{m(\Sigma) = 2m_u + m_s + A'\frac{\hbar^2}{4}\left(\frac{1}{m_u^2} - \frac{4}{m_u m_s}\right)}$$

(C2) $m(\Lambda^0) =$

$$= m_u + m_d + m_s + A'\left(\frac{\vec{S}_u\cdot\vec{S}_d}{m_u m_d} + \frac{\vec{S}_u\cdot\vec{S}_s}{m_u m_s} + \frac{\vec{S}_d\cdot\vec{S}_s}{m_d m_s}\right)$$

$m_u = m_d$

روشی که این معادله بدست میاید را در بالا آوردیم.

$$= 2m_u + m_s + A'\left(\frac{\vec{S}_u\cdot\vec{S}_d}{m_u}\left(\frac{1}{m_d} - \frac{1}{m_s}\right) + \frac{\chi_\Lambda}{m_u m_s}\right)$$

$m_d \sim m_u$

$$\underbrace{\chi_\Lambda}_{\text{octet}} = -\frac{3}{4}\hbar^2$$

$$\vec{S}_u + \vec{S}_d = \vec{S}_a \longrightarrow \vec{S}_a^{\,2} = \vec{S}_u^{\,2} + \vec{S}_d^{\,2} + 2\vec{S}_u\cdot\vec{S}_d$$

$$\vec{S}_u\cdot\vec{S}_d = \frac{1}{2}\left(\vec{S}_a^{\,2} - \vec{S}_u^{\,2} - \vec{S}_d^{\,2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\hbar^2\left(0(0+1) - \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{4}\hbar^2$$

$$= 2m_u + m_s + A'\left(\frac{-3/4\hbar^2}{m_u^2} + \cancel{\frac{3/4\hbar^2}{m_u m_s}} - \cancel{\frac{3/4\hbar^2}{m_u m_s}}\right)$$

$$= 2m_u + m_s + A'\left(\frac{-3}{4}\hbar^2\right)\frac{1}{m_u^2}$$

$$\boxed{m(\Lambda^0) = 2m_u + m_s + A'\left(\frac{-3}{4}\hbar^2\right)\frac{1}{m_u^2}}$$

$m_u = m_d = 363\ \text{MeV}$ $\qquad m_s = 538\ \text{MeV}$ $\qquad A' = \left(\frac{2m_u}{\hbar}\right)^2 50\ \text{MeV}$

(d) در مورد Ξ

Ξ (uss or dss)

$$m(\Xi) = 2m_s + m_u + A'\left(\frac{\vec{S}_u\cdot\vec{S}_s}{m_u m_s} + \frac{\vec{S}_u\cdot\vec{S}_s}{m_u m_s} + \frac{\vec{S}_s\cdot\vec{S}_s}{m_s^2}\right)$$

$$= 2m_s + m_u + A'\left(\frac{\vec{S}_u\cdot\vec{S}_s + \vec{S}_u\cdot\vec{S}_s + \vec{S}_s\cdot\vec{S}_s}{m_u m_s} + \frac{\vec{S}_s\cdot\vec{S}_s}{m_s^2} - \frac{\vec{S}_s\cdot\vec{S}_s}{m_u m_s}\right)$$

$$= 2m_s + m_u + A'\left(\frac{\chi_\Xi}{m_u m_s} + \frac{\vec{S}_s\cdot\vec{S}_s}{m_s}\left(\frac{1}{m_s} - \frac{1}{m_u}\right)\right)$$

$$\chi_\Xi^{\text{octet}} = -\frac{3}{4}\hbar^2$$

$$\vec{S}_s\cdot\vec{S}_s = \frac{1}{2}\left(\vec{S}_a^{\,2} - \vec{S}_s^{\,2} - \vec{S}_s^{\,2}\right)$$

$$\vec{S}_a = \vec{S}_s + \vec{S}_s \begin{cases} 0 \\ 1 \longrightarrow \end{cases}$$

به ازای تابع موج تک

جابجائی $s \leftrightarrow s$ متقارن است

$S_a = 1$ را انتخاب می‌کنیم.

$$\vec{S}_s \cdot \vec{S}_s = \frac{\hbar^2}{2}\left(1(1+1) - \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right) = \frac{\hbar^2}{4}$$

$\longrightarrow$

$$m(\Xi) = 2m_s + m_u + A'\left(\frac{-3/4\,\hbar^2}{m_u m_s} + \frac{\hbar^2}{4}\left(\frac{1}{m_s^2} - \frac{1}{m_s m_u}\right)\right)$$

$$\boxed{m(\Xi) = 2m_s + m_u + A'\frac{\hbar^2}{4}\left(\frac{1}{m_s^2} - \frac{4}{m_u m_s}\right)}$$