محاسبه two loop در تئوری $\lambda\phi^4$:

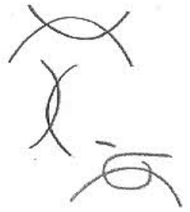
نمودارها در سه دسته

1-loop Contribution :

t-channel

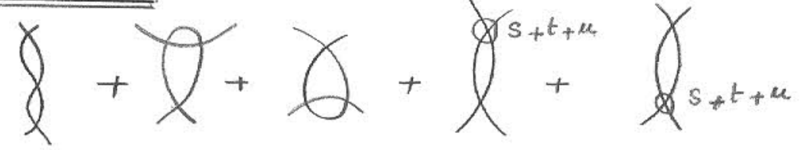
s-channel

u-channel

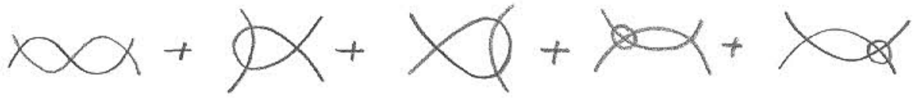


two loops

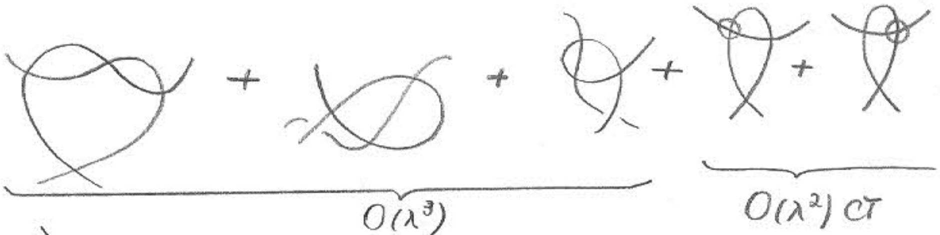
s-channel ⟶



t-channel ⟶



u-channel ⟶



+

$O(\lambda^3)$CT

$$\delta\lambda\,(-i\lambda\mu^\epsilon) = \underbrace{(-i\lambda\mu^\epsilon)(i\lambda)}_{\lambda^2\mu^\epsilon = -(-i\lambda)^2\mu^\epsilon}\left[\frac{-3i}{16\pi^2\epsilon} + iV_f(4m^2) + 2iV_f(0)\right]$$ قبلاً بدست آورده بودیم که

$$= (-i\lambda)^2\mu^\epsilon\left\{\left[\frac{i}{16\pi^2\epsilon} - iV_f(4m^2)\right] + 2\left[\frac{i}{16\pi^2\epsilon} - iV_f(0)\right]\right\}$$

$$\overset{\text{نامتناهی}}{=} (-i\lambda)^2\mu^\epsilon\left\{\underbrace{\left(-iV(4m^2)\right)}_{s\ \text{سهم}} + \underbrace{2\left(-iV(0)\right)}_{u+t\ \text{سهم}}\right\}$$

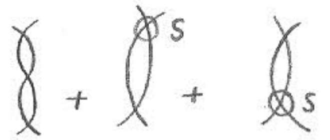
with

$$-iV(4m^2) = -iV_f(4m^2) + \frac{i}{16\pi^2\epsilon} \longrightarrow (-i\lambda)^2\mu^\epsilon\left(-iV(4m^2)\right)$$

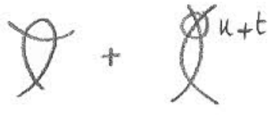
$$-2iV(0) = -2iV_f(0) + \frac{2i}{16\pi^2\epsilon} \longrightarrow (-i\lambda)^2\mu^\epsilon\left(-iV(0)\right)$$

هر دسته از نمودارها را می‌توان در سه گروه تقسیم کرد: (مثلاً)

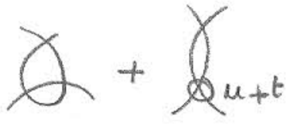
گروه ۱)

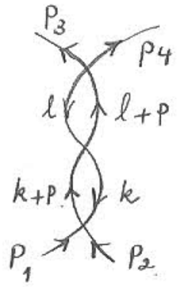


گروه ۲)



گروه ۳)



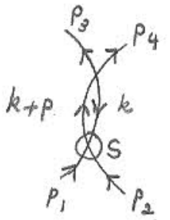


$$(-i\lambda)^3 \ (iV(p^2))^2$$

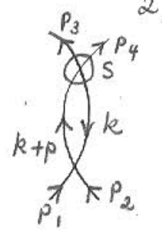
$$V(p^2) = \frac{-1}{16\pi^2\epsilon} + \frac{1}{32\pi^2}\gamma_E + \frac{1}{32\pi^2}\int_0^1 d\alpha \ \ln \frac{m^2-\alpha(1-\alpha)p^2}{4\pi\mu^2}$$

$$P = P_1 + P_2$$

داریم: $\tilde{V}(p^2) = -\frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2-m^2)\left((k+p)^2-m^2\right)}$



$+$

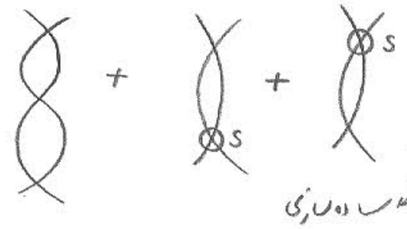


$$= 2(-i\lambda)^3 \underbrace{\left(iV(p^2)\right)}_{\text{سهم نمودار}} \underbrace{\left(-iV(4m^2)\right)}_{\text{سهم CT مربوط از نوع s}}$$

• این حاصلضرب خطرناک است زیرا می‌تواند شامل ∞ های غیرموضعی باشد.

داریم: $\tilde{V}(4m^2) = \frac{1}{32\pi^2}\int_0^1 d\alpha \ \ln\left(\frac{m^2-4\alpha(1-\alpha)m^2}{4\pi\mu^2}\right) + \frac{1}{32\pi^2}\gamma_E$

و



$$= (-i\lambda)^3\left[\left(iV(p^2)\right)^2 + 2\left(iV(p^2)\right)\left(-iV(4m^2)\right)\right]$$

$$= (-i\lambda)^3\left\{\left(-V^2(p^2) + 2V(p^2)V(4m^2)\right) \pm V^2(4m^2)\right\}$$

کمک دوتایی

$$= (-i\lambda)^3\left\{-\left[V(p^2) - V(4m^2)\right]^2 + \left(V(4m^2)\right)^2\right\}$$

در این عبارت ∞ حذف می‌شود

$$V(p^2) - V(4m^2) = \cancel{\frac{-1}{16\pi^2\epsilon}} + \cancel{\frac{1}{32\pi^2}\gamma_E} + \frac{1}{32\pi^2}\int_0^1 d\alpha \ \ln \frac{m^2-\alpha(1-\alpha)p^2}{4\pi\mu^2}$$

$$+ \cancel{\frac{1}{16\pi^2\epsilon}} - \cancel{\frac{1}{32\pi^2}\gamma_E} - \frac{1}{32\pi^2}\int_0^1 d\alpha \ \ln \frac{m^2-4m^2\alpha(1-\alpha)}{4\pi\mu^2}$$

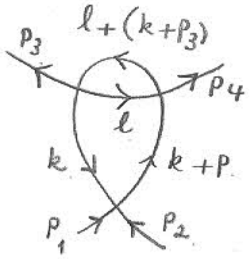
جمله اول $= \frac{1}{32\pi^2}\int_0^1 d\alpha \ \ln\left(\frac{m^2-\alpha(1-\alpha)p^2}{m^2-4\alpha(1-\alpha)m^2}\right)$ اصلاً $\frac{1}{\epsilon}$ ندارد

جمله دوم $= \left(V(4m^2)\right)^2 = \left(\frac{-1}{16\pi^2\epsilon}\right)^2 + \cdots$

• عبارت متناسب با $\frac{1}{\epsilon^2}$ را double pole نامند. این نوع ∞ ها در CT از مرتبه $(-i\lambda)^3$ جذب می‌شوند

• نتیجه اینکه در هر دو اول از دسته نمودارهای s-channel مرتبه ۲ حلقه هیچ ∞ غیرموضعی پیش نمی‌آید

$$\sim \frac{1}{\epsilon} f(p^2)$$



$P = P_1 + P_2$

ابتدا با روش ناهمین مجح مذکور در نظر گرفته می‌شود

$$I = (-i\lambda)^3 \int_k \frac{i}{k^2-m^2}\, \frac{i\mu^\epsilon}{[(k+p)^2-m^2]} \left(iV\left((k+p_3)^2\right)\right)$$

$$= (-i\lambda)^3 \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\, \frac{i}{k^2-m^2}\, \frac{i\mu^\epsilon}{[(k+p)^2-m^2]}$$

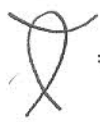
$$\times \underbrace{\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d}\, \frac{1}{2}\, \frac{i}{l^2-m^2}\, \frac{i}{(l+k+p_3)^2-m^2}}_{=\, iV\left((k+p_3)^2\right)}$$

$iV\left((k+p_3)^2\right)$ can be converted into

$$iV\left((k+p_3)^2\right) = -\frac{1}{2} \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d}\, \frac{1}{(l^2-\Delta)^2}$$

with $\Delta = m^2 - \alpha(1-\alpha)(k+p_3)^2$

$$\curvearrowright\ iV\left((k+p_3)^2\right) = \frac{-1}{2}\int_0^1 d\alpha \left[\frac{i}{(4\pi)^2}\, \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)} \left\{ \frac{4\pi\mu^2}{m^2-\alpha(1-\alpha)(k+p_3)^2} \right\}^{2-\frac{d}{2}} \right]$$

$$\longrightarrow I = $$  $$= \frac{-\lambda^3}{2(4\pi)^2}\, \Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \int_0^1 d\beta\, \frac{\mu^\epsilon}{(k^2+2kp\beta+\beta p^2-m^2)^2}$$

$$\times \int_0^1 d\alpha \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2-\alpha(1-\alpha)(k+p_3)^2} \right)^{2-\frac{d}{2}}$$

Now use:

$$\frac{1}{A^\alpha B^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 d\omega\, \frac{\omega^{\alpha-1}(1-\omega)^{\beta-1}}{(\omega A + (1-\omega)B)^{\alpha+\beta}}$$

$$\alpha = 2-\frac{d}{2}\ ;\quad \beta = 2$$

$$A = m^2-\alpha(1-\alpha)(k+p_3)^2\ ;\quad B = k^2+2kp\beta+\beta p^2-m^2$$

$$\Gamma(\alpha+\beta) = \Gamma\left(4-\frac{d}{2}\right)\ ;\quad \Gamma(\alpha) = \Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)\ ;\quad \Gamma(\beta) = \Gamma(2) = 1$$

• در این قسمت می‌توان روند محاسبات را از روی Peskin تمرین ۱۰ دنبال کرد. در ادامه فقط نکته اصلی (یعنی حذف ∞ های غیرموضعی) اش را خواهیم گفت.

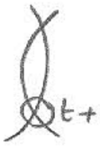
$$\longrightarrow \cdots \longrightarrow \frac{-i\lambda^3}{2(4\pi)^2}\left(\frac{2}{\epsilon}\right)\int_0^1 dy\, \frac{\Gamma(\epsilon)}{(m^2-y(1-y)p^2)^\epsilon} + \cdots$$

$$\xrightarrow[\epsilon\to 0]{d\to 4} \frac{-i\lambda^3}{2(4\pi)^2}\left(\frac{2}{\epsilon}\right)\int_0^1 dy \left\{ \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E - \ln\left(\frac{m^2-y(1-y)p^2}{4\pi\mu^2}\right)\right\}$$

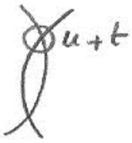
local (double) poles
$\longrightarrow$ local CT's will of $O(\lambda^3)$ remove them

Non-local CT (*)

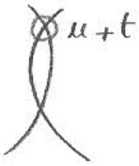
∞ از نوع غیر موضعی را می‌توان با اضافه کردن نوع دوم CT یعنی



+



حذف کرد.



$$= (-i\lambda)^3 \left(-2iV(0)\right)\left(iV(p^2)\right)$$

که در آن

$$-2iV(0) = \frac{2i}{2(16\pi^2)}\,\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)^{2-\frac{d}{2}}$$

و

$$iV(p^2) = \frac{-i}{2(16\pi^2)}\,\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)\int_0^1 d\alpha\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2-\alpha(1-\alpha)p^2}\right)^{2-\frac{d}{2}}$$

به این ترتیب

$$= (-i\lambda)^3\left(\frac{2i}{32\pi^2}\right)\left(\frac{-i}{32\pi^2}\right)\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)^{\frac{\epsilon}{2}} \times\int_0^1 d\alpha\;\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2-\alpha(1-\alpha)p^2}\right)^{\frac{\epsilon}{2}}$$

$$= \frac{(-i\lambda)^3}{2(4\pi)^4}\left\{\underbrace{\left(\frac{2}{\epsilon}\right)^2}_{\text{double pole} \to \text{CT of } O(\lambda^3)} - \underbrace{\frac{2}{\epsilon}\int_0^1 d\alpha\,\ln\frac{m^2-\alpha(1-\alpha)p^2}{4\pi\mu^2}}_{\text{non-local CT that cancels } \star} - \frac{2}{\epsilon}\ln\frac{m^2}{4\pi\mu^2} + \cdots\right\}$$

همه ∞ های دیگر به p^2 بستگی ندارند، به این ترتیب ∞ از نوع non-local در نمودارهای s-channel نداریم.
و این یکی از خصوصیت های تئوری های بازبهنجار پذیر است.