مثال:

Generating Functional: (Free scalar Field Theory)

$$Z_0[J] = \frac{\int \mathcal{D}\varphi \; e^{iS_0 + i\int J\varphi}}{\int \mathcal{D}\varphi \; e^{iS_0}} \qquad (a)$$

$$S_0 = -\frac{1}{2}\int d^4x \;\; \varphi(x)\left(\Box + m^2\right)\varphi(x)$$

$$(\Box + m^2)\varphi_0 = J \longrightarrow \qquad \varphi_0(x) = -\int \Delta_F(x-y)\, J(y)\, d^4y$$

با توجه به $\quad (\Box + m^2)\Delta_F(x-y) = -\delta^4(x-y)$

$$\longrightarrow \quad Z_0[J] = \exp\left(\frac{-i}{2}\int d^4x\, d^4y \;\; J(x)\,\Delta_F(x-y)\,J(y)\right)$$

$$Z_0[J] = \left(1 + \frac{1}{2}\; \times\!\!-\!\!-\!\!\times \; + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \begin{matrix}\times\!\!-\!\!-\!\!\times \\ \times\!\!-\!\!-\!\!\times\end{matrix} + \cdots\right) \qquad (b)$$

$$\text{——} = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$\times\!\!\text{——} = i\tilde{J}(p) \qquad \curvearrowright \quad \frac{1}{2}\;\times\!\!-\!\!-\!\!\times = \frac{-i}{2}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\; \frac{\tilde{J}(p)\,\tilde{J}(-p)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$\text{——}\!\!\times = +i\tilde{J}(-p)$$

Application:

$$\underset{x_1}{\bullet}\!\!\text{———}\!\!\underset{x_2}{\bullet} \qquad i\Delta_F(x_1 - x_2) = \left(\frac{1}{i}\right)^2 \frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J(x_1)\,\delta J(x_2)}\bigg|_{J=0}$$

(c) برای تئوری برهم‌کنشی تابع مولد را به صورت زیر به دست آوردیم:

$$Z[J] = \exp\left(i\int d^4z \;\; \mathcal{L}_{int}\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right]\right) Z_0[J]$$

این تابع مولد هم نمودارهای connected و هم نمودارهای disconnected را نتیجه می‌دهد.

(d) برای اینکه تابع مولد نمودارهای connected را داشته باشیم

$$W[J] = -i \ln Z[J]$$ را تعریف کردیم

• فرض می‌کنیم که $\langle\varphi(x)\rangle = \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)}\Big|_{J=0}$ باشد (یعنی شکست خودبخودی تقارن نداشته باشیم)

$$\longrightarrow \qquad \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1)\,\delta J(x_2)}\bigg|_{J=0} = -i\left(\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_1)\,\delta J(x_2)}\right)_{J=0}$$

$$\tau(x_1, x_2) = \;\; \phi(x_1, x_2)$$

$$\tau(x_1, \ldots, x_4) = \;\; i\,\phi(x_1 \ldots x_4) - \sum_{\text{partitions}} \phi(x_{i_1} - x_{i_2})\,\phi(x_{i_3} - x_{i_4})$$

Vertex function :

$$\Phi_N(x_1,\dots x_N) = \left(\frac{1}{i}\right)^N \frac{\delta^N W[J]}{\delta J(x_1)\dots\delta J(x_N)}\Big|_{J=0} \equiv -i\, \underbrace{G_c^{(N)}}_{\text{connected Green's fct.}}(x_1,\dots,x_N)$$

$$\rightarrow G_c^{(2)}(x_1,x_2) = \frac{1}{i}\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}\Big|_{J=0}$$

$$= \langle\Omega|T(\varphi(x_1)\varphi(x_2))|\Omega\rangle_{\text{connected.}}$$

انتشارگر کامل

$$G_c^{(2)}(p) = G_0^{(2)}(p) + G_0^{(2)}(p)\left(-i\Sigma(p)\right)G_0^{(2)}(p) + \dots$$

$$= \frac{i}{p^2-m^2-\Sigma(p^2,m^2)}$$

$$\left(G_c^{(2)}(p)\right)^{-1} = -i\left(p^2-m^2-\underbrace{\Sigma}_{1PI\,\in\,\Sigma}(p)\right) \overset{Def.}{\equiv} -i\,\underbrace{\Gamma^{(2)}(p)}_{\text{Two-point Vertex function}}$$

با توجه به این رابطه $\rightarrow$ $\boxed{G_c^{(2)}(p)\,\Gamma^{(2)}(p) = -i}$

✓ این مفهوم را می‌توان کلی کرد و N_point Vertex function را در فضای x بدست آورد:

$$\Gamma^{(N)}(x_1,\dots x_N) = \int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\dots\frac{d^4p_N}{(2\pi)^4}\,\Gamma^{(N)}(p_1,\dots,p_N)\,\exp\left(i\sum_{j=1}^{N}x_jp_j\right)$$

تبدیل فوریه

✓ ادعا می‌کنیم که $\Gamma[\varphi]$ Quantum (effective action) تابعی است که می‌توان با استفاده از رابطه زیر از طریق آن $\Gamma^{(N)}(x_1,\dots x_N)$ را بدست آورد:

$$\boxed{\Gamma^{(N)}(x_1,\dots,x_N) = \frac{\delta^N\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x_1)\dots\delta\varphi(x_N)}\Big|_{\varphi=0}}$$

Quantum Effective action : $\Gamma[\varphi]$

a) Classical action of $\lambda\varphi^4$ Theory

$$S[\varphi] = \int d^dx\left(\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4\right)$$

$$\underset{\text{in mom-space}}{=} \int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\left\{+\frac{1}{2}\tilde\varphi(k)\left(k^2-m^2\right)\tilde\varphi(-k)\right\}$$

$$-\frac{\lambda}{4!}\int\frac{d^dk_1}{(2\pi)^d}\dots\frac{d^dk_4}{(2\pi)^d}(2\pi)^d\delta^d(k_1+\dots+k_4)\,\tilde\varphi(k_1)\dots\tilde\varphi(k_4)$$

b) Quantum effective action :

$$\Gamma[\varphi] = \frac{+1}{2} \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \tilde{\varphi}(k) \left\{ k^2 - m^2 - \Sigma(k) \right\} \tilde{\varphi}(k)$$

$$+ \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \frac{d^dk_1}{(2\pi)^d} \cdots \frac{d^dk_n}{(2\pi)^d} (2\pi)^d \delta^d(k_1 + \cdots + k_n) \Gamma^{(n)}(k_1, \ldots, k_n) \times \tilde{\varphi}(k_1) \ldots \tilde{\varphi}(k_n)$$

جمله درهم کنشی می‌تواند شامل همه توابع چندنقطه‌ای باشد

• خواص $\Gamma[\varphi]$:

در نمودارهای درختی که توسط $\Gamma[\varphi]$ تولید می‌شود، همه انتشارگرها انتشارگر کامل و همه رئوس رئوس تصحیح شده کامل هستند.

• روش تعیین $\Gamma[\varphi]$، از تبدیل Legendre تابع مولد $W[J]$ بعداً

ایده اصلی

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\varphi \; e^{\overbrace{iS[\varphi]}^{\text{classical action}} + i\int J\varphi} = e^{iW[J]}$$

$$Z_\Gamma[J] = \int \mathcal{D}\phi \; e^{\overbrace{i\Gamma[\phi]}^{\text{Quantum effective action}} + i\int J\phi} = e^{iW_\Gamma[J]}$$

اگر این ایده درست باشد $Z[J]$ تابع مولد نمودارهای connected , disconnected با انتشارگر آزاد و رئوس کلاسیک

و $Z_\Gamma[J]$ " " " با انتشارگر کامل (شامل سهم نمودارهای 1PI) و رئوس تصحیح شده کوانتومی.

---

c) Quantum effective action & loop expansion :

گام اول: $\hbar$ را در عبارت $Z_\Gamma[J]$ احیا می‌کنیم:

$$Z_{\Gamma,\hbar}[J] = \int \mathcal{D}\phi \; \exp\left(\frac{i}{\hbar} \left\{ \Gamma[\phi] + \int d^dx \, J(x)\phi(x) \right\} \right) \equiv \exp\left(iW_{\Gamma,\hbar}[J] \right)$$

توضیح: • انتشارگر عکس عبارتی است که در قسمت آزاد کنش میآید. به علت فاکتور $\hbar^{-1}$ همه انتشارگرها (چه در پاهای خارجی و چه در خطوط داخلی) فاکتور $\hbar^{-1}$ می‌گیرند

• پاهای خارجی به J ختم می‌شوند. از آنجا که هر J فاکتور $\hbar^{-1}$ می‌گیرند ← پاهای خارجی هر کدام چنین فاکتوری می‌گیرند.

• هر n-point vertex هم فاکتور $\hbar^{-1}$ می‌گیرد.

→ $\hbar^{P-V-E}$

$P =$ propagators تعداد

$V =$ Vertices "

$E =$ External lines "

اگر $L = \#$ independent loop momenta

$$= \underbrace{(P-E)}_{=I} - (V-1) \Rightarrow \quad L-1 = P-E-V \rightarrow \hbar^{P-E-V} = \hbar^{L-1}$$

تعداد خطوط داخلی

قدم دوم: حال $W_{\Gamma,\hbar}[J]$ را برحسب $\hbar$ بسط می‌دهیم

$$\boxed{W_{\Gamma,\hbar}[J] = \sum_{L=0}^{\infty} \hbar^{L-1} \, W_{\Gamma,L}[J] = \frac{1}{\hbar} W_{\Gamma,L=0}[J] + O(\hbar^{0})}$$

✓ در سطح درختی ($\hbar \to 0$) تنها جمله غالب از رتبه $\hbar^{-1}$ است که مربوط می‌شود به $L=0$ (در این حد همه جمله‌های دیگر نسبت به جمله اول از رتبه $\hbar^{-1}$ بسیار کوچکند)

$$W_{\Gamma,L=0}[J] = W_{\Gamma,L}[J]\Big|_{\text{tree-level}} = W[J]$$

نمودارهای connected را تولید می‌کند (البته نمودارهایی که انتشارگرهای آن انتشارگر آزاد هستند و رئوس آن رئوس آزاد هستند).

قدم سوم: برای پیدا کردن سهم مراتب بالاتر در $O(\hbar)$ باید بتوانیم $W_{\Gamma,\hbar}[J]$ را حساب کنیم:

$$Z_{\Gamma,\hbar}[J] = \int \mathcal{D}\phi \; \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left\{\Gamma[\phi] + \int d^4x \, J\phi\right\}\right) = \exp\left(i\, W_{\Gamma,\hbar}[J]\right)$$

✓ روش ما برای این محاسبه اصطلاحاً Stationary phase approximation (SP) است.

برای توضیح

• ابتدا یادآوری می‌کنیم که معادله حرکت کلاسیک در حضور یک چشمه خارجی J از وردش کنش کلاسیک نسبت به میدان ϕ بدست می‌آید:

$$\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi}\Big|_{\phi_J} = -J \qquad \text{(Classical Equation of motion)}$$

✓ ϕ_J آن پیکربندی خاصی است که معادله حرکت کلاسیک را در حضور چشمه J ارضا می‌کند.

• بهمین معنی می‌توان تصور کرد که از وردش کنش کوانتومی $\Gamma[\phi]$ نسبت به ϕ، معادله حرکت کوانتومی بدست می‌آید:

$$\frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi}\Big|_{\phi_J} = -J \qquad \text{(Quantum Equation of motion)}$$

• در روش تقریبی SP، میتوان میدان دلخواه ϕ (پیکربندی دلخواهی که روی آن انتگرال گیری می‌شود) را حول میدان ϕ_J بسط داد:

$$\phi = \phi_J + \text{Rest field}$$

حل معادله حرکت کوانتومی در حضور چشمه.

✓ این پیکربندی کنش کوانتومی را min می‌کند.

✓ لذا بیشترین سهم انتگرال از این پیکربندی می‌آید.

→

از آنجا که ϕ_J آن پیکربندی خاص است که $\Gamma[\phi]$ را min می‌کند، بیشترین سهم به انتگرال در $Z_{\Gamma,\hbar}[J]$ از $\Gamma[\phi_J]$ می‌آید (Saddle point approx.)

$$Z_{\Gamma,\hbar}[J] = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left\{\Gamma[\phi_J]+\int d^4x\, \phi_J(x) J(x)\right\}\right) + O(\hbar^0) = \exp\left(i W_{\Gamma,\hbar}[J]\right)$$

• حالا اگر از رابطه $W_{\Gamma,\hbar}[J]=\frac{1}{\hbar}W_{\Gamma,\hbar=0}+O(\hbar^0)$ استفاده کنیم، خواهیم داشت: (ضرایب مربوط به $\hbar^{-1}$ را از دو طرف مقایسه کنیم):

$$\Gamma[\phi_J]+\int d^4x\,\phi_J J = W_{\Gamma,\hbar=0}[J] \equiv W[J]$$

و این همان تبدیل Legendre است که رابطه‌ای بین $\Gamma[\phi_J]$ و $W[J]$ برقرار می‌کند، تا وقتی $J\neq 0$ است:

$$\boxed{\Gamma[\phi_J] = W[J] - \int d^4x\, J(x)\phi_J(x)}$$

و همین رابطه با مرتبه‌های بالاتر $\hbar$ (loop expansion) از همین روش بدست می‌آیند.

سؤال: ϕ_J چیست؟

ادعا: $\phi_J = \langle\varphi(x)\rangle_J$

اثبات:

$$W[J] = \Gamma[\phi_J] + \int d^4y\, J(y)\phi_J(y)$$

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \int \frac{\delta\Gamma[J]}{\delta\phi_J(y)}\frac{\delta\phi_J(y)}{\delta J(x)}d^4y + \int d^4y\,\frac{\delta J(y)}{\delta J(x)}\phi_J(y)$$

$$+\int d^4y\, J(y)\frac{\delta\phi_J(y)}{\delta J(x)}$$

$$= \int d^4y\,\underbrace{\left(\frac{\delta\Gamma[J]}{\delta\phi_J(y)} + J(y)\right)}_{\text{معادله حرکت کوانتومی} = 0}\frac{\delta\phi_J(y)}{\delta J(x)} + \int d^4y\,\delta^4(x-y)\phi_J(y)$$

$$= \phi_J(x)$$

$$\rightarrow \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \phi_J(x)$$

(از طرفی می‌دانیم)

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \langle\varphi(x)\rangle_J$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} &= \phi_J(x)\\ \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} &= \langle\varphi(x)\rangle_J\end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{\phi_J(x) = \langle\varphi(x)\rangle_J}$$

• به این ترتیب اگر $J=0$ باشد:

$$\left.\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}\right|_{J=0} = \langle\varphi(x)\rangle_{J=0} = \phi_{J=0}(x) \equiv \phi_{cl}(x)$$

نامگذاری

رابطه بین $S[\varphi]$، $\Gamma[\phi_J]$ و همچنین φ_J، ϕ_J:

• ابتدا می‌خواهیم کنش کلاسیک $S[\varphi]$ را در نظر بگیریم و معادله حرکت را در حضور یک source خارجی بدست آوریم:

$$\underbrace{S[\varphi] + \int J(x')\,\varphi(x')\,d^4x'}_{\text{کنش کلاسیک + جمله source}} \longrightarrow \frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\left\{S[\varphi]+\int d^4y\, J(y)\,\varphi(y)\right\}\Bigg|_{\varphi_J} = 0$$

φ_J حل معادله کلاسیک

• مثلاً برای یک تئوری $\lambda\varphi^4$ خواهیم داشت:

$$\boxed{(\Box+m^2)\,\varphi_J(x) = -\frac{\lambda}{3!}\,\varphi_J^3(x) + J(x)}$$

می‌خواهیم برای بدست آوردن φ_J از یک بسط اختلالی استفاده کنیم:

$$\varphi_J(x) = \varphi_J^{(0)}(x) + \varphi_J^{(1)}(x) + \dots$$

a) $(\Box+m^2)\,\varphi_J^{(0)}(x) = J(x)$

b) $(\Box+m^2)\,\varphi_J^{(1)}(x) = -\frac{\lambda}{3!}\left(\varphi_J^{(0)}(x)\right)^3 + J(x)$

...

a) $\longrightarrow$ $\boxed{\varphi_J^{(0)}(x) = \int d^4y\; G(x-y)\; J(y)}$, $(\Box+m^2)\,G(x-y) = \delta^4(x-y)$

b) $\longrightarrow$ $\boxed{\varphi_J^{(1)}(x) = \varphi_J^{(0)}(x) + \left(\frac{-\lambda}{3!}\right)\int d^4y\; G(x-y)\;\left(\varphi_J^{(0)}(y)\right)^3}$

Check:

$$(\Box+m^2)\,\varphi_J^{(1)}(x) = (\Box_x+m^2)\,\varphi_J^{(0)}(x) + \left(\frac{-\lambda}{3!}\right)\int d^4y\; \delta^4(x-y)\;\left(\varphi_J^{(0)}(y)\right)^3$$

$$(\Box+m^2)\,\varphi_J^{(1)}(x) = J(x) - \frac{\lambda}{3!}\left(\varphi_J^{(0)}(x)\right)^3 \quad \checkmark$$

• با توجه به این جواب می‌توان جواب‌ها را به صورت نموداری نمایش داد:

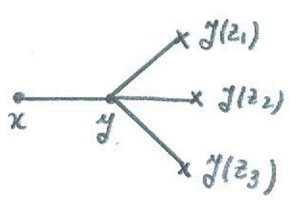
$\varphi_J^{(0)}(x) = \int d^4y\; G(x-y)\; J(y)$: 

(a)

$\varphi_J^{(1)}(x) = \varphi_J^{(0)}(x) - \frac{\lambda}{3!}\int d^4y\; G(x-y)\;\left(\varphi_J^{(0)}(y)\right)^3$ (b)

$$= \int d^4y\; G(x-y)\, J(y) - \frac{\lambda}{3!}\int d^4y\; G(x-y)\left(\int d^4z\; G(z-y)\, J(z)\right)^3$$

$\varphi_J(x) =$ 

$- \frac{\lambda}{3!}$ 

$+ O(\lambda^2)$

و غیره.

نتیجه: • به این ترتیب جواب φ_J (جواب معادله حرکت کلاسیک در حضور source خارجی) در یک بسط اختلالی بدست آمد.

می‌توان نشان داد که شبیه این بسط برای Φ_J هم وجود دارد: ←

• برای اثبات: در عبارت

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\varphi \; e^{\frac{i}{\hbar}\left\{S[\varphi] + \int J\varphi\, d^4x\right\}}$$

$$\xrightarrow[\text{approx.}]{\text{Saddle point}} \approx e^{\frac{i}{\hbar}\left\{S[\varphi_J] + \int J\varphi\, d^4x\right\}} = e^{\frac{i}{\hbar} W[J]}$$

$$\boxed{S[\varphi_J] + \int J\varphi_J\, d^4x = W[J]}$$

$W[J]$ ، باید با تبدیل Legendre یعنی $\Gamma[\phi_J]$

• اگر به جای کنش کلاسیک، کنش کوانتومی را جایگزین کنیم و همه جای φ_J ، ϕ_J را قرار دهیم به همان تبدیل Legendre قبلی می رسیم

$$\Gamma[\phi_J] + \int J\phi_J = W[J]$$

با توجه به این شباهت می توان برای ϕ_J بسط اختلالی مشابه بسطی که برای φ_J بدست آورده بودیم پیشنهاد کرد:

این شکل نمادین است. ⟵ $\phi_J = $ ●——× $+ \lambda$ (●<×××) $+ O(\lambda^2)$

که البته به ازای هر انتشارگر که با $G(x-y)$ آمده بود، باید انتشارگر دو نقطه‌ای را جایگزین نمود و به ازای هر راس باید راس کامل تصحیح شده را جایگزین نمود.

---

۳ موضوع در رابطه با Quantum effective action:

(1) Derivative Expansion

دیدیم که ϕ_{cl} حل معادله حرکت کوانتومی است وقتی $J=0$ باشد:

$$\left.\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x)}\right|_{\phi_{J=0}=\phi_{cl}} = 0 \qquad \phi_{cl} = \langle\varphi(x)\rangle_{J=0}$$

قدم اول:

• می توان $\phi(x)$ را حول یک مقدار ثابت $\phi_{cl}^{(0)}$ بسط داد، و $\Gamma[\phi]$ را به صورت یک بسط برحسب مشتقات ϕ نوشت:

$$\boxed{\phi_{cl}(x) = \phi_{cl}^{(0)} + \eta(x)}$$

$\phi_{cl}^{(0)} = \text{const}$ and نیز فرض min of $\Gamma[\phi]$

$$\Gamma[\phi_{cl}] = \Gamma[\phi_{cl}^{(0)}] + \underbrace{\cancel{\int \left.\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x)}\right|_{\phi_{cl}^{(0)}} \eta(x)\, d^4x}}_{=0} + \frac{1}{2!}\int d^4x\, d^4y \left.\frac{\delta^2\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x)\,\delta\phi(y)}\right|_{\phi_{cl}^{(0)}} \eta(x)\eta(y) + \cdots$$

فرض کرده ایم که $\phi_{cl}^{(0)}$ کنش $\Gamma[\phi]$ را min می کند. بنابراین این جمله مساوی صفر است.

$$\Gamma[\phi_{cl}] = \Gamma[\phi_{cl}^{(0)}] + \frac{1}{2!}\int d^4x\, d^4y \left.\frac{\delta^2\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x)\,\delta\phi(y)}\right|_{\phi_{cl}^{(0)}} \eta(x)\,\eta(y) + \cdots \qquad (A)$$
