کیهان‌شناسی - جلسه ۷   ۸۶/۱۲/۲۵

- ترمودینامیک کیهان‌شناسی

ماده کیهانی شامل الکترون، پروتون، فوتون، نوترینوها، X (Cold Dark Matter) و φ (Dark Energy)

در زمان حال ذرات تشکیل‌دهنده سیال کیهانی واجفتیده‌اند (decoupled)، برهم‌کنش ندارند.

البته در کیهان اولیه الکترون، پروتون، فوتون می‌توانند تبادل انرژی داشته باشند.

در کیهان اولیه   مولکول ← اتم‌های تشکیل ← پروتون، نوترون ← سوپ کوارک‌ها

به صورت پلاسما ← ماده

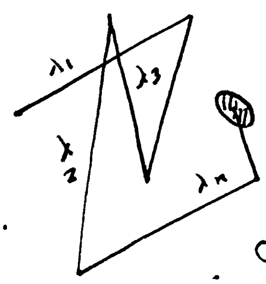
- سطح مقطع برهم‌کنش $\sigma(E)$ که از نظریه میدان‌های کوانتومی (S-Matrix) به دست می‌آید.

- پویش آزاد میانگین در برهم‌کنش ذرات: (λ)

اگر در سیستم عوامل ترمودینامیکی استاتیک باشند می‌توانیم طولی را به دست آوریم که نشان‌دهنده نرخ برهم‌کنش است در حالی که در کیهان، سیستم دچار انبساط می‌شود پس طول پویش آزاد تابعی از دینامیک کیهان است.

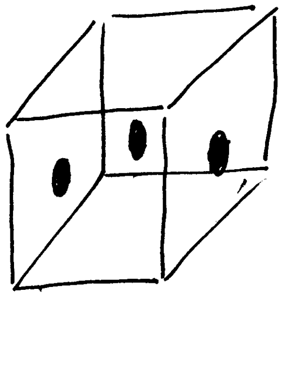
نکته مهم: کیهان چون همگن است در تعادل ترمودینامیکی قرار دارد.

تابع توزیع برای λ



$$\underbrace{\lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}_{\text{پویش آزاد میانگین}}$$

$$\lambda(\underbrace{n}_{\text{چگالی}} , \underbrace{\sigma}_{\text{سطح مقطع برخورد}})$$



زمانی برخورد رخ می‌دهد که مجموعه سطح مقطع‌های ذرات برابر با سطح حجم باشد. میزان طولی که ذره باید بپیماید تا اتفاق فوق بیفتد را طول پویش آزاد می‌گویند.

$$N = nA\lambda \xrightarrow{\text{تقاضای تقسیم}} N\sigma = A$$

تعداد ذرات — N ، سطح — A

$$N\sigma = nA\lambda\sigma$$

λ — طول پویش آزاد

$$A = nA\lambda\sigma$$

$$\boxed{\lambda = (n\sigma)^{-1}}$$

کیهان

افق اندازه $= H^{-1}$

اگر $\lambda > H^{-1} \longrightarrow$ ذره دیگر برهم‌کنش نمی‌کند. (decoupled particle

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda > H^{-1}\\ \lambda = (n\sigma)^{-1}\end{array}\right. \xrightarrow{\text{شرط واجفتیدگی}} \boxed{H > n\sigma}$$

- نرخ برخورد

حال می‌توانیم زمان برخورد را با عمر عالم مقایسه کنیم

$V =$ سرعت حرکت ذره

زمان لازم برهم‌کنش : $t = \dfrac{\lambda}{V} = \dfrac{1}{n\sigma V}$

$$t > H^{-1}$$

$$\Gamma \text{ نرخ برهم‌کنش} = \frac{1}{t} = n\sigma V \quad \left(\frac{1}{s}\right)$$

$$\hookrightarrow H > n\sigma V$$

V ← نسبت به سرعت نور

- چگالی نقاط در فضای فاز :

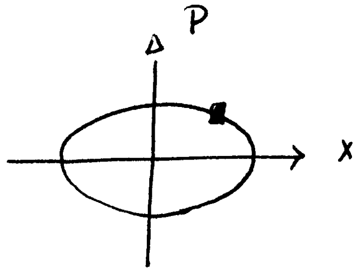
$$f(x, p, t) = \frac{dV}{d^3x\, d^3p}$$

f ← تابع توزیع در فضای فاز

نمودار در فضای فاز

نوسانگر ساده

$$\frac{1}{2}Kx^2 + \frac{P^2}{2m} = E$$



اندازه المان در فضای فاز $2\pi\hbar$ است (اصل عدم قطعیت) ←

$(2\pi\hbar)^3$ حجم المان

$$dN = f(x, p)\, d^3x\, d^3p \cdot \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}$$

dN ← تعداد ذرات ، $f(x,p)\,d^3x\,d^3p$ ← بدون بعد ، $\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}$ ← ضریب نرمالیزاسیون

$$dN = \frac{g}{e^{\frac{E-\mu}{T}} \pm 1} \cdot \frac{d_x^3\, d_p^3}{(2\pi\hbar)^3}$$

μ : انرژی پتانسیل شیمیایی

E : انرژی کل

$K = 1$

$\begin{cases} - & \text{بوزون ها} \\ + & \text{فرمیون} \end{cases}$

g : درجه آزادی ذرات

$$n = \int f(x,p;t)\, d_p^3$$ چگالی عددی ذرات

$$\rho = \int f(x,p;t)\, E\, d_p^3$$ چگالی انرژی

تمرین: فشار یک سیستم ذرات را بدست آورید

حل: فشار

$$P = \int f \frac{p^2}{3E}\, d_p^3$$

n, ρ, P ترمودینامیک $\longleftarrow$ مکانیک آماری

(تعادل)

$$d_p^3 = 4\pi p^2\, dp$$

$$E = \sqrt{p^2 + m^2}$$

$$n = \frac{g}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{T}} \pm 1}\, d_p^3$$

اگر $\mu \ll E \;\rightarrow\; n \propto g T^3 K$ $\begin{cases} K = 1 & \text{بوزون ها} \\ K = 7/8 & \text{فرمیون ها} \end{cases}$

حال ρ و P را محاسبه می‌کنیم و با حذف T می‌توانیم معادله حالت را بدست آوریم

* تمرین: معادله حالت ترمودینامیکی با روش فوق محاسبه کنید.

- توزیع بولتزمان

$$E = \sqrt{p^2 + m_0^2} = m_0\left(1 + \frac{p^2}{2m_0^2} + \cdots\right)$$

غیرنسبیتی

$$E \gg \mu \qquad f(x,p) = \frac{g}{e^{\left(m_0 + \frac{p^2}{2m_0}\right)/KT} \pm 1}$$ قابل صرف نظر ; $f(x,p) \propto e^{-\frac{m_0}{KT}}\, e^{-\frac{p^2}{2mKT}}$

4/

$$f(x,p) \propto e^{-m_0/KT}\, e^{-m_0 v^2/2KT}$$

$$f \propto \underbrace{e^{-m_0/KT}}_{\text{const}}\, e^{-E_K/KT} \rightarrow \underset{\text{بولتزمان}}{f} \propto e^{-E_K/KT}$$

$$\simeq \left(1 - \frac{m_0}{KT} + \dots\right)$$

برای حالت نسبیتی

$$p \gg m_0 \rightarrow E = p$$

چگالی ذرات $n = \displaystyle\int e^{-E/KT}\, d^3p$

$$n = \int_0^\infty e^{-p/KT}\, 4\pi p^2 dp \propto T^3$$

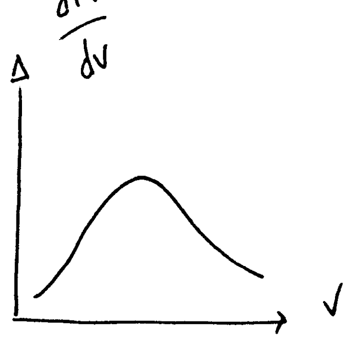
چگالی انرژی $\rho = \displaystyle\int e^{-p/KT}\, p \cdot 4\pi p^2 \propto T^4$

تعداد ذرات در حجم $N = V \displaystyle\int f\, d^3p = \text{cte}$; $f \sim e^{-\frac{m_0}{KT}} e^{-E_K/KT}$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{ثابت}}}{V A} \int_0^\infty e^{-p^2/2mT}\, 4\pi p^2 dp \sim V A T^{3/2}$$

$$f \sim \frac{1}{T^{3/2}} e^{-E/KT}, \quad dN = \frac{1}{T^{3/2}} e^{-\frac{v^2}{2mKT}} p^2 dp$$

$$\frac{dN}{dV} \sim \frac{1}{T^{3/2}} e^{-\frac{v^2}{2mKT}}\, v^2$$



تابش نسبیتی $\rho \propto T^4 \rightarrow \rho \propto a^{-4}$ - ماده نسبیتی مانند تابش رفتار می‌کند.

$$T \propto \frac{1}{a}$$

شمارش نسبیتی :

$$\rho = \frac{g\pi^2}{30} T^4 K \qquad K=1 \quad \text{بوزون‌ها} \qquad K=\frac{7}{8} \quad \text{فرمیون‌ها}$$

بدلیل افزایش انرژی در کیهان اولیه ، انتظار داریم تنوع زیادی از ذرات داشته باشیم.

در دمای بالا و نسبیتی ، $\rho = K\frac{g_1\pi^2}{30}T^4 + K\frac{g_2\pi^2}{30}T^4 + \cdots = \left(\sum_i Kg_i\right)\frac{\pi^2 T^4}{30}$

نتیجه $\quad \rho_{early-universe} = K g_t \frac{\pi^2}{30} T^4$

$$g_t = \sum_i K g_i \qquad T = 300\ GeV,\ g=100$$

* تابع g برحسب دما چگونه است؟

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho = \frac{8\pi G}{3} g(T) \frac{\pi^2}{30} T^4$$

$$t = H^{-1} = \left(\frac{3\times 30}{8\pi G g \pi^2}\right)^{\frac{1}{2}} T^{-2} \rightarrow t(T) \simeq \frac{m_{pl} T^{-2}}{\sqrt{g(T)}} \quad \text{واحد طبیعی}$$

$$m_{pl} = G^{-1/2}$$

$$m_{pl} = 10^{19}\ Gev$$

حساب با ... $\rightarrow$ $\boxed{t(T) = \left(\frac{1Mev}{T}\right)^2 1sec}$

$$t \sim \frac{E_{pl}}{KT}\cdot\frac{\hbar}{KT} \qquad \text{واحد } SI$$

$$\hbar \sim 10^{-15}\ eV$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{g(T)}}\left(\frac{T}{1Mev}\right)^{-2} \rightarrow t = \frac{1}{10}\left(\frac{3\times10^5 Mev}{Mev}\right)^{-2} \simeq 10^{-12} s$$

$$T = 300\ Gev \qquad T = 10^{19} Gev \rightarrow t_{pl} \cong 10^{-43} s$$

$$g(T) \sim 100$$