1,

کیهان‌شناسی - جلسه ۳   ۸۶/۱۱/۲۹

نسبیت عام

طول فضا-زمان یک کمیت ناوردا است. ناوردا ds^2 ← تبدیلات لورنتس

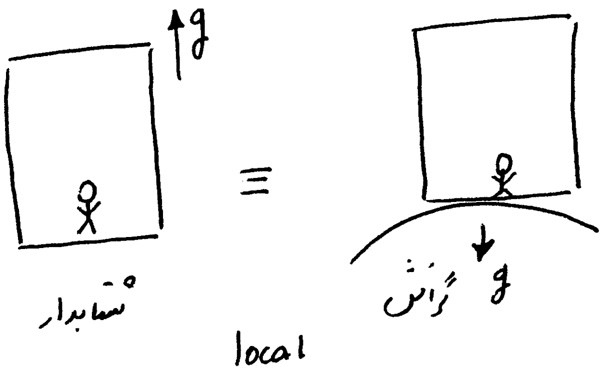
خاص) تبدیل بین دستگاه‌های لخت ← دستگاه‌های نالخت (عام)

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad \rightarrow \quad ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$$

نشانگان $(-,+,+,+)$

در نسبیت عام به صورت موضعی (local)   گرانش $\equiv$ دستگاه نالخت : اصل هم‌ارزی

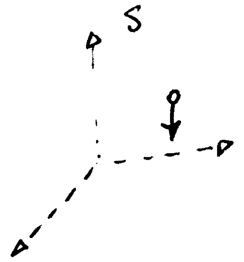
مثال: آسانسوری که با شتاب g به سمت بالا حرکت می‌کند معادل گرانش است.



در حالی که به صورت سراسری معادل نیستند.

ایده: گرانش باعث خمش فضا-زمان می‌شود.

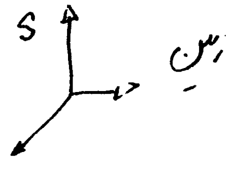
هر دستگاهی که سقوط آزاد می‌کند دستگاه (ناظر) لخت است.



در دستگاه S' :

$$\frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2} = 0 \qquad \text{فرض I}$$

حال می‌خواهیم معادله ذره را در دستگاه S بدست آوریم.



تبدیلات عام

$$x^\mu = x^\mu(x')$$

نگاشت ۱-۱ ، از دستگاه S به S'

2,

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx'^{\mu}}{d\tau}\right) = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\right) =$$

$$x^{\mu} = x^{\mu}(x') \rightarrow dx^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} dx'^{\alpha}$$

$$\left(\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\right)\frac{dx^{\alpha}}{d\tau} + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \cdot \frac{d^2 x^{\alpha}}{d\tau^2} = 0\right)\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\mu}}$$

دینامیک ذره

$$\rightarrow \underbrace{\frac{d^2 x^{\gamma}}{d\tau^2}}_{\text{شتاب}} + \underbrace{\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\mu}} \cdot \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\lambda}}}_{\text{تابعی از هندسه مسئله}\ \Gamma} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} \cdot \frac{dx^{\alpha}}{d\tau} = 0$$

۴ - سرعت

II فرض: $ds'^2 = ds^2$

$$-dt'^2 + dl'^2 = \eta_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} \qquad \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix}$$

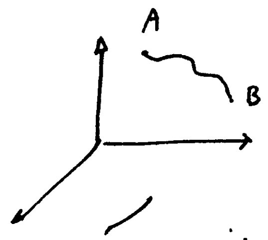
$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\alpha}} dx^{\alpha} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} dx^{\beta} = \eta_{\mu\nu}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\alpha}} \cdot \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} dx^{\alpha} dx^{\beta}$$

$$= g_{\alpha\beta}\, dx^{\alpha} dx^{\beta}$$

نشان دهنده خمش فضا در نقطه

دستگاه لخت

$$ds^2 = -dt^2 + dl^2$$



طول بازه فضا-زمانی AB - همان فاصله‌ای است که ذره طی کرده است) ژئودزی

$$\overset{\text{طول}}{S} = \int \sqrt{dl^2 - dt^2} = \int \sqrt{\left(\frac{dl}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2}\, d\tau$$

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \underset{\text{لاگرانژی}}{\mathcal{L}}\, d\tau \qquad , \qquad S = S(t, x)$$

معادله اویلر-لاگرانژ:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \xrightarrow{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = C$$

زمان حرکت ابدی:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \xrightarrow{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = C'$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\dot{x}}{\mathcal{L}} = C \\ \frac{\dot{t}}{\mathcal{L}} = C' \end{cases} \qquad \mathcal{L} = 1 \Rightarrow \frac{\frac{dx}{d\tau}}{\frac{dt}{d\tau}} = \frac{dx}{dt} = \text{ثابت}$$

- کوتاه‌ترین فاصله مسیر ذره را نشان می‌دهد.

ناظر لخت، هندسه را تخت، ناظر نالخت، هندسه را خمیده می‌بینند.

نتایج

- معادله حرکت برای ناظر S' از کمینه کردن S (طول فضا-زمان) بدست آید. : کمینه بودن طول برای ناظر دوم

- S (طول فضا-زمان) کمیت ناوردا است پس $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ را باید کمینه کرد.

- " ° " مشتق نسبت به زمان ویژه

$$S = \int \left(g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu\right)^{1/2} d\tau$$

$$\mathcal{L} = \left(g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu\right)^{\frac{1}{2}}$$

تمرین ۱: معادله اویلر-لاگرانژ را برای لاگرانژی فوق حل کنید.

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0$$

نتیجه:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{1}{2} g^{\mu\alpha}\left(g_{\alpha\nu,\lambda} + g_{\alpha\lambda,\nu} - g_{\lambda\nu,\alpha}\right) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0$$

فقط با داشتن تقارن و کمینه کردن طول فضا - زمان می توانیم معادله ژئودزی را بدست آوریم .

تمرین ۲ : با قرار دادن $g_{\mu\nu}$ بر حسب $\eta_{\mu\nu}$ و رابطه تبدیل نشان دهید معادله بدست آمده اگر از دو رهیافت (کمینه کردن کنش - تبدیل مختصه) یکسان است .

geodesics equation

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \underbrace{\frac{1}{2} g^{\mu\alpha} \left(g_{\alpha\nu,\lambda} + g_{\alpha\lambda,\nu} - g_{\lambda\nu,\alpha} \right)}_{\text{نماد کریستوفل - لوی چیویتا}} \frac{dx^\nu}{d\tau} \cdot \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0$$

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\lambda \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} \left(g_{\alpha\nu,\lambda} + g_{\alpha\lambda,\nu} - g_{\lambda\nu,\alpha} \right)$$

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\tau} \cdot \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0$$

سوال : فضا زمان در اطراف یک جرم چگونه خمیده است ؟

چشمه : انرژی - جرم $\longrightarrow$ باعث بوجود آمدن گرانش (خمش فضا - زمان) $g_{\mu\nu}$

" مرجع مناسب برای نسبیت عام

" Fields : Landau - Lifshitz

در الکترودینامیک : بار $\longrightarrow$ B, E $(F^{\mu\nu})$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

معادلات ماکسول

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\underset{\text{field}}{F^{\mu\nu}{}_{,\nu}} = \underset{\text{Source}}{4\pi J^\mu}$$

معادلات توصیف کننده گرانش

$$\underset{\text{field}}{G_{\mu\nu}} = 8\pi G\, T_{\mu\nu} \rightarrow \text{Source}$$

$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$ با دانستن $T_{\mu\nu}$ - $g_{\mu\nu}$ را باید بدست آورد.

جواب دقیق معادله انیشتین محدود است. (ویدین - شوارتزشیلد، نات، ...)

"Exact Solutions of general Relativity" Hans Stephani

■ تصور هندسی متریک:

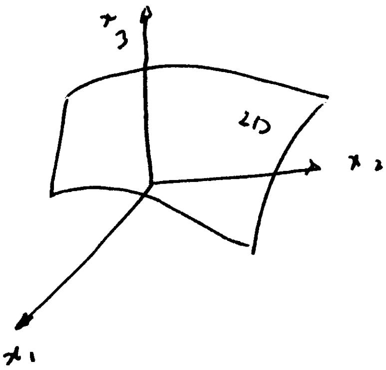
خمینه D بعدی غوطه‌ور در $D+1$ بعدی:

$$x_{D+1} = f(x_1, x_2, \dots, x_D)$$

- خم دوبعدی غوطه‌ور در فضای سه‌بعدی.

$$Z = f(x, y)$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$



فاصله بین دو نقطه روی خم را می‌خواهیم بدست آوریم.

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \quad \to \quad ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial x_3}{\partial x_2} dx_2\right)^2$$

$$\Big\{ \; x_3 = f(x_1, x_2)$$ قید

$$ds^2 = dx_1^2 \left(1 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_1}\right)^2\right) + 2 \frac{\partial x_3}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial x_2} dx_1 dx_2 + \left(1 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_2}\right)^2\right) dx_2^2$$

$$ds^2 = (dx_1 \quad dx_2) \begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_1}\right)^2 & \frac{\partial x_3}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial x_3}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial x_2} & 1 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_2}\right)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix}$$

$$= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

تمرین ۳) برای خم $x^2+y^2+z^2=1$ (کره) و $x^2+y^2-z^2=1$ (هذلولوی) تنسورها را بدست آورید.

■ متریک فریدمن - رابرتسون - واکر

کیهان همگن : جواب معادله اینشتین برای کیهان همگن

$$G_{\mu\nu}=8\pi G T_{\mu\nu} \leftarrow \text{چشمه} \begin{cases} \text{چگالی } \rho \\ \text{فشار } P \end{cases}$$

فرض می‌کنیم ρ و P فقط تابع از زمان باشد و متریک را طوری انتخاب می‌کنیم که نرخ انبساط مستقل از x باشد.

چون چرخش نداریم پس $g_{0i}=0$ همسانگرد است. (متریک همواره قطری است)

- بدلیل همگنی dt بدون ضریب است.

$$ds^2=-dt^2+dl^2$$

$$dl^2=f(r)\,dr^2+r^2\,d\Omega^2$$ همسانگرد : ← فضای همگنی

* تمرین ۱۴) با محاسبه اسکالر ریچی و با قرار دادن آن با یک مقدار ثابت، نشان دهید.

$$f(r)=\frac{1}{1-Kr^2}$$

متریک برای توصیف جهان همگن، همسانگرد در حال انبساط :

$$ds^2=-dt^2+\underset{\downarrow}{a^2}\,dl^2$$

فاکتور مقیاس : توضیح انبساط کیهان

$$\text{FRW}:\quad ds^2=-dt^2+a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-Kr^2}+r^2\,d\Omega\right]$$

متریک فوق را در $G_{\mu\nu}$ و ρ و P را در $T_{\mu\nu}$ قرار داده و با حل معادله اینشتین معادلات فریدمن را بدست می‌آوریم.

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\dot a}{a}\right)^2+\dfrac{K}{a^2}=\dfrac{8\pi G}{3}\rho \\ \dfrac{\ddot a}{a}=-\dfrac{4\pi G}{3}(\rho+3P) \end{cases}$$