مطالعه‌ی آماری ساختارهای بزرگ مقیاس

سهراب راهوار

دانشکده‌ی فیزیکِ دانشگاه صنعتی شریف

آبان ۱۳۸۵

چکیده: در این فصل به بررسی ساختارهای بزرگ مقیاس به صورت کلان خواهیم پرداخت. در این جا سودمند ترین ابزار استفاده از روش های آماری برای توصیف توزیع جمعیتی ساختارها و تحول آن با زمان است. بعد از معرفی ابزارهای تئوری به معرفی روش های رصدی برای مساحی ساختارهای بزرگ مقیاس خواهیم پرداخت.

۱ مقدمه

به طوری که در بخش های پیشین دیدیم تباین چگالی $\delta = (\rho - \bar{\rho})/\bar{\rho}$ به عنوان معرف ساختار های بزرگ مقیاس می تواند مورد استفاده قرار بگیرد. با استفاده از معادلات حاکم بر گرانش و سیالات تحول تباین چگالی در گستره‌ی خطی مورد بررسی قرار گرفت. در تحول ساختارها، ساختارهای با مقیاس بزرگ دیرتر و مقیاس های کوچک زودتر وارد مرحله‌ی غیر خطی می شوند. هدف ما در این فصل بررسی آماری ساختارها و تحول کلان آنها می باشد. یکی از روشِ های عددی برای تحلیل فضایی افت و خیزها استفاده از تابع همبستگی است. معمولاً در مکانیک آماری برای به دست آوردن تابع همبستگی در یک نقطه، نمونه های زیادی از یک سیستم را درست کرده و برای یک نقطه‌ی خاص پارامترهای آماری را اندازه گیری می کنند. مثلاً برای اندازه گیری انحراف معیار تباین چگالی $<\delta^۲>$ به ترتیبی که گفته شد تعداد زیادی سیستم را می توان در نظر گرفت و برای نقطه‌ی مشخص، متوسط را محاسبه کرد. برای اینکه مسئله شفاف تر شود مثال زمانی مسئله را در نظربگیریم. فرض کنیم یک دونده در لحظه‌ی $t = ۰$ تا مثلاً $t = ۱۰۰۰s$

شروع به دویدن می کند و می خواهیم متوسط ضربان قلب را برای هر لحظه‌ای به دست آوریم. در این جا می توان دونده همین مسیر را با شرایط یکسان N بار دویده و یک آنسامبلی از نمونه‌ی آماری ($Realization$) درست می کنیم. متوسط گیری و انحراف معیار برای ضربان قلب در هر زمانی قابل محاسبه است. این امکان برای کیهان قابل حصول نیست چرا که ما در اصل تنها یک کیهان قابل مشاهده داریم. می توان مسئله را با توجه به همگن بودن کیهان در مقیاس های بزرگ ساده تر کرده و متوسط گیری را به عوض نمونه های تکراری بر روی یک سیستم بر روی حجم انجام داد. مسئله شبیه اندازه گیری متوسط و انحراف معیار ضربان قلب یک نفر در حال استراحت می باشد. با صرف نظر کردن از جزئیات تاثیر عوامل محیطی مانند ساعات روز، ضربان قلب فرد مورد مطالعه تقریباً وضعیت پایا ($Stationary$) دارد و برای متوسط گیری می توان متوسط گیری زمانی انجام داد. به این نوع سیستم ها $Ergodic$ نیز گویند. بنابراین با توجه به همگن بودن کیهان در مقیاس های بزرگ می توان آن را از نظر آماری پایا در نظر گرفته و متوسط گیری را در فضا انجام داد. یکی از ویژه گیهای سیستم های ناپایا بستگی واریانس به تابع پنجره می باشد. بدین معنی که با افزایش پنجره‌ی مربوط به رشته‌ی داده ها، اختلاف معیار افزایش می یابد در حالی که برای یک سیستم پایا انحراف معیار با پهنای پنجره افزایش یافته و در یک طول مشخصه به اشباع می رسد[۱]. (تمرین: برای رشته‌ی داده های پایا و ناپایای داده شده، (الف) انحراف معیار را بر حسب اندازه‌ی تابع پنجره به دست آورده و رسم بکنید. (ب) نشان دهید در حالت پایا انحراف معیار به اشباع می رسد. (ج) برای رشته‌ی پایا تابع همبستگی و طیف توان را به دست آورید.). برای ساختارهای بزرگ مقیاس کیهانی نیز می توان اشباع شدن انحراف معیار را برای تابع پنجره‌ی به اندازه کافی بزرگ نشان داد. بنابراین کیهان در مقیاس های بزرگ همگن و از نظر آماری پایا است. به همین ترتیب می توان پایا بودن داده های تابش زمینه ای کیهان را نیز نشان داد[۲]

۲ تبدیل فوریه تباین چگالی و طیف توان

هر تابع به صورت $f(x)$ را می توان بر حسب توابع متعامد بسط داد و ضرایب بسط نیز با ضرب داخلی طرفین تساوی به دست می آید. یکی از توابع متعامد متداول، توابع سینوس و کسینوس می باشند. برای یک تابع در جعبه‌ای به طول L، تابع $f(x)$ به صورت $f(x) = \sum g(k)e^{ikx}$ به دست می آید. در این جا عدد موج به صورت $\Delta k = ۲\pi n/L$ تغییر می کند، بنابراین می توان جمع فوق را به صورت $f(x) = L/۲\pi \sum f(k)e^{ikx}\Delta k$ نوشت . با تبدیل جمع به انتگرال تابع $f(x)$ به صورت زیر به دست می آید:

$$f(x) = \frac{L}{۲\pi}\int g(k)e^{ikx}dx \qquad (۱)$$

در حالتی که فضای مورد مطالعه ما N بعدی باشد انتگرال فوق ضریب $(\frac{L}{2\pi})^N$ خواهد داشت. با توجه به تعریف دلتای دیراک به صورت $\int e^{k(x-x')} d^N k = (2\pi)^N \delta(x-x')$ وارون تبدیل فوریه در یک بعد به صورت زیر خواهد بود:

$$g(k) = \frac{1}{L} \int f(x) e^{-ikx} dk \tag{2}$$

حال با توجه به همگن بودن افت و خیزهای چگالی در فضا، تابع همبستگی فضایی تباین چگالی به صورت زیر با حرکت بر روی فضای هندسی به صورت زیر به دست می آید:

$$\xi(x) = <\delta(x+y)\delta(y)> \tag{3}$$

با جاگذاری تبدیل فوریه تباین چگالی و متوسط گیری بر روی تمامی فضا عبارت فوق به صورت زیر به دست می آید:

$$\xi(x) = (\frac{L}{2\pi})^3 \int |\delta_k|^2 e^{(-ik.x)} d^3 k \tag{4}$$

عبارت $P(k) = |\delta_k|^2$ طیف توان نامیده می شود و برای ناهمگنی های کیهانی به صورت همسانگرد، $P(k)$ مستقل از مختصه‌ی زاویه خواهد بود. در این حالت تابع همبستگی به صورت زیر به دست می آید:

$$\xi(x) = (\frac{L}{2\pi})^3 \int |\delta_k|^2 \frac{\sin(kx)}{kx} 4\pi k^2 dk \tag{5}$$

معمولاً طیف توانی را به صورت $\Delta(k)^2 = (\frac{L}{2\pi})^3 4\pi k^3 |\delta_k|^2$ نیز بیان می کنند. در این حالت تابع همبستگی به صورت زیر بیان می شود:

$$\xi(x) = \int \Delta(k)^2 \frac{\sin(kx)}{kx} d\ln(k) \tag{6}$$

می توان طیف توان را بر حسب تابع همبستگی به صورت زیر نیز به دست آورد:

$$\Delta(k)^2 = \frac{2k^3}{\pi} \int \xi(x) \frac{\sin(kx)}{kx} x^2 dx \tag{7}$$

اندازه گیری طیف توان از روی داده های ساختار های بزرگ مقیاس به صورت $\xi(x) = (x/x_0)^{-\gamma}$ می باشد. با جاگذاری در عبارت طیف توان به صورت زیر به دست می آید:

$$\Delta^2(k) = \frac{2}{\pi} (kx_0)^\gamma \Gamma(2-\gamma) \sin(\pi\gamma/2) = \beta(\gamma)(kx_0)^\gamma \tag{8}$$

یکی از نکات مثبت در استفاده از طیف توان به صورت $\Delta(k)^2$ این است که برای تابع همبستگی توانی نمای توان با توان مربوط به طیف توانی برابر است. اندازه گیری در مقیاس

های کوچک کیهانی تابع همبستگی را به صورت $\xi(x) = (x/5Mpc)^{-1.8}$ به دست می دهد. طیف توان از مشاهدات رصدی و تئوری های تورمی به صورت $P(k) \propto k^n$ داده می شود. برای $\gamma = 1.8$ مقدار نمای طیف توانی برابر $n = -1.2$ است. با توجه به مدل تورمی توان $n = 1$ پیش بینی می شود. داده های رصدی در مقیاس های بزرگ این پیش بینی را تایید می کند و انحراف از این توان از اثرات غیر خطی در تحول ساختارها ناشی می شود. حال ببینیم چه محدودیت هایی بر روی n می تواند وجود داشته باشد. با توجه به تابع همبستگی $\xi(0)$ مبین واریانس چگالی،

$$\xi(0) =< \delta^2 >= 4\pi \int k^n k^2 dk \tag{9}$$

واریانس چگالی برابر با $< \delta^2 > \propto k^{(n+3)}$ به دست می آید. به ازای $n = -3$ کیهان در تمامی مقیاس ها پایا می باشد. به ازای $n < -3$ نیز کیهان در مقیاس های بزرگ دارای تکینگی درافت و خیز بوده و بر خلاف رصد ما در مقیاس های بزرگ مقیاس است. به طوری که از داده های رصدی دیدیم، نمای توان در مقیاس های خطی کوچکتر از یک است. برای مقیاس های بزرگ مقیاس حد بالای n با استفاده از محاسبه‌ی زلدوویچ به دست می آید. برای تبدیل فوریه‌ی تباین چگالی به صورت زیر، حول طول موج های بزرگ به معنی k های کوچک بسط می دهیم:

$$\delta_k = \frac{1}{V}\int \delta(x) e^{ik.x} d^3x \tag{10}$$

$$\delta_k = \frac{1}{V}\int \delta(x)(1 + ik.x - k^2x^2 + ...) d^3x \tag{11}$$

$$\tag{12}$$

جمله‌ی اول به دلیل پایستگی جرم و جمله‌ی دوم برای پایستگی تکانه‌ی خطی صفر می شود و تبدیل فوریه‌ی تباین چگالی از جمله‌ی k^2 به بعد شروع می شود. به دلیل بسط عبارت فوق حول $k = 0$ انتظار داریم سهم جملات با مرتبه‌ی بالاتر در مقابل k^2 قابل صرفنظر کردن باشد. بنابراین برای ساختارهای بزرگ مقیاس طیف توان در سریع ترین حالت به صورت $|\delta_k|^2 \propto k^4$ به صفر میل می کند.

۳ طیف زلدوویچ یا مقیاس ناوردا

یکی از طیف های معروف برای مقیاس های خطی $n = 1$ است. به این نوع حالت طیف هریسون–زلدوویچ و یا مقیاس ناوردا نیز گفته می شود. برای یک ساختار با طول x_0 در زمان حال، تباین چگالی به صورت $\delta \propto ax_0^{-(n+3)/2}$ رشد می کند. حال ببینیم این ساختار در چه زمانی وارد افق شده است. با توجه به برابری طول ساختار با

افق $x_\circ a = d_{H_\circ} a^{۳/۲}$ زمان ورود به افق برابر با $x_\circ = d_{H_\circ} a^{۱/۲}$ به دست می آید. با جای گذاری در معادله‌ی تحول تباین می توان تباین چگالی را در زمان ورود به افق به صورت $\delta_{enter} \propto aa^{-(n+۳)/۴}$ به دست می آید. برای $n = ۱$ تباین چگالی در زمان ورود به افق مستقل از مقیاس و ثابت خواهد بود. بنابراین اگر در زمان آخرین سطح پراکندگی افت و خیزهای به اندازه‌ی افق $۱۰^{-۵}$ است، انتظار داریم افت و خیز در مقیاس افق ما نیز همین مقدار باشد.

یکی از پیامدهای این طیف ناوردا شدن طیف پتانسیل نسبت به مقیاس است با استفاده ازمعادله‌ی پواسن، $\delta\phi_k = -۴\pi G\rho\delta_k/k^۲$ است. با قرار دادن طیف زدلوویچ $n = ۱$ طیف توان پتانسیل بدین ترتیب برای $\Delta_\phi \propto |\delta_k|^۲ k^{-۱}$ ثابت و مقیاس ناوردا خواهد بود.

۴ تهیه‌ی توزیع نرم شده از داده های تجربی

با توجه به داده های رصدی در ساختارهای بزرگ مقیاس برای به دست آوردن یک میدان چگالی بهتر است تباین چگالی با استفاده از یک تابع پنجره نرم بشود. برای داده های مربوط به تابش زمینه ای کیهان محدود بودن قدرت تفکیک زاویه‌ای خود داده های تجربی را نرم خواهد کرد. ابتدا ما یک تابع پنجره‌ی پله‌ای را معرفی می کنیم. این تابع بسته به ابعاد پله، نقاط موجود در آن را هموار می کند. برای تباین چگالی، داده های نرم شده را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\delta_R(x) = \frac{\int \Theta(|x'-x|-R)\delta(x')d^۳x'}{\int \Theta(x-x')dx'^۳} \quad (۱۳)$$

$$\delta_R(x) = \frac{۱}{R^۳}\int \Theta(|x'-x|-R)\delta(x')d^۳x' \quad (۱۴)$$

(تمرین: داده‌های مانا را با توابع پنجره به ابعاد ۵، ۱۰ و ۵۰ قدم نرم بکنید.)

می توان طیف توان را با توجه به تابع پنجره‌ی داده شده محاسبه کرد. برای این کار لازم است ابتدا تبدیل فوریه‌ی تابع پله را بدانیم. تبدیل فوریه در فضای سه بعدی به صورت زیر است:

$$\Theta_k(R) = \frac{۱}{V}\int \Theta(x-R)e^{-ik.x}d^۳x$$

$$\Theta_k(R) = \frac{۱}{V}\int \Theta(x-R)e^{-ikx\cos(\theta)}x^۲dx\sin(\theta)d\theta d\phi$$

$$\Theta_k(R) = \frac{۳}{R^۳k^۳}\left[\sin(kR)-(kR)\cos(kR)\right] \quad (۱۵)$$

تابع دیگری که برای نرم کردن می توان استفاده کرد تابع گوسی می باشد. در این صورت تباین چگالی نرم شده به صورت زیر ظاهر می شود:

$$\delta_c(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} R_c^3} \int \delta(x') e^{-(x-x')^2/(2R_c^2)} x'^2 dx' \qquad (16)$$

تبدیل فوریه‌ی تابع گوسین نیز به صورت زیر به دست می آید:

$$f_k = e^{-k^2 R_c^2/2} \qquad (17)$$

می توان هر توانی از تباین چگالی را بر حسب تابع پنجره به صورت

$$\delta_c^n(x) = \int \delta^n(x') f(x,x') d^3x' \qquad (18)$$

برای محاسبه‌ی تابع همبستگی تباین چگالی خواهیم داشت:

$$\xi(x) =< \delta_c(y)\delta_c(x+y) > \qquad (19)$$

برای $x = 0$ تابع همبستگی معنی انحراف معیار تباین چگالی معنی می دهد. در این حالت تابع $\xi(0)$ را می توان بر حسب فضای فوریه به صورت زیر به دست آورد:

$$\sigma^2 = \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int P(k) f_k^2 d^3k \qquad (20)$$

برای حالتی که از تابع توزیع گوسین به عنوان تابع پنجره استفاده کنیم، در این صورت واریانس تباین چگالی به صورت زیر به دست می آید:

$$\sigma_R^2 = \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int P(k) e^{(-k^2R^2)} d^3k \qquad (21)$$

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{2}\Delta^2(k = R^{-1})\Gamma(\frac{n+3}{2}) \qquad (22)$$

با اندازه گیری واریانس چگالی با استفاده از تابع پنجره‌ی داده شده طیف توان به دست می آید. می توان واریانس را با استفاده از تابع توزیع پله‌ای نیز به دست آورد. برای ابعاد $8Mpc$ انحراف معیار برابر با یک است. یکی دیگر از روابط مهم ارتباط تابع همبستگی با واریانس افت و خیز چگالی است. برای متوسط تابع همبستگی در شعاع R داریم:

$$\bar{\xi}(r) = \frac{1}{4/3\pi r^3} \int_0^r \xi(x) 4\pi x^2 dx \qquad (23)$$

$$\bar{\xi}(r) = \frac{3}{r^3} J_3(r) \qquad (24)$$

$J_{3}(r)$ را به صورت $J_{3}(r) = \frac{1}{4\pi}\int \xi(x)\Theta(x-r)d^{3}x$ تعریف می کنیم. این انتگرال را می توان به رفتن به فضای فوریه به دست آورد:

$$J_{3}(R) = \frac{1}{4\pi}\frac{V^{2}}{(2\pi)^{6}}\int |\delta_k|^{2}\Theta'_k(R)e^{(ik.x)}e^{(ik'x)}d^{3}xd^{3}kd^{3}k' \quad (25)$$

$$J_{3}(R) = \frac{1}{4\pi}\frac{V^{2}}{(2\pi)^{3}}\int |\delta_k|^{2}\Theta_k(R)d^{3}k \quad (26)$$

$$J_{3}(R) = \frac{V}{4\pi}\int \Delta_k^{2}\Theta_k(R)\frac{dk}{k} \quad (27)$$

در این حالت $\xi(x) = 0$ به معنی نداشتن همبستگی بین افت و خیز چگالی و تابع دو نقطه‌ای چگالی به صورت یک مقدار ثابت به دست می آید.

در این حالت معمولاً از تبدیل فوریه‌ی تابع همبستگی و تابع پنجره به صور زیر استفاده می شود:

برای یک رشته‌ی داده های نرم شده، تابع همبستگی را می توان از روی محاسبه‌ی چگالی به صورت مستقیم نیز به دست آورد. بدین ترتیب همبستگی دو نقطه‌ای چگالی را می توان بر حسب تابع همبستگی تباین چگالی نوشت:

$$<\rho(y)\rho(x+y)>_y = \rho_b^{2}(1+\xi(x)) \quad (28)$$

تابع همبستگی برای مقیاس های خطی با توجه به رشد خطی ساختارها به صورت $\xi(x) = a(t)^{2}x^{(n+3)}$ و یا بر حسب انتقال به سرخ به صورت $\xi \propto (1+z)^{2}$ تغییر خواهد کرد. با انتگرال گیری از طرفین عبارت فوق روی فضای x، سمت چپ عبارت فوق برابر با $M\rho_b$ به دست می آید بنابراین عبارت $M = \rho_b\int(1+\xi(x))$ برابر با جرم ساختار خواهد بود. حال اگر تابع همبستگی تابع زمان بوده و در طول زمان متحول بشود، در این صورت می توان برای آن معادله‌ی پیوستگی به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial\xi(x)}{\partial t} + \nabla\cdot[v(1+\xi(x))] = 0 \quad (29)$$

به طوری که v سرعت حرکت سیال می باشد.

تابع همبستگی را می توان برای N نقطه بسط داد و آن را به صورت زیر تعریف کرد:

$$<\rho_1\rho_2...\rho_N> = \rho_b^{N}(1+\xi^{N}) \quad (30)$$

تابع همبستگی N نقطه ای را می توان بر حسب توابع همبستگی دو نقطه‌ای بسط داد. برای نمونه تابع همبستگی سه نقطه‌ای به صورت زیر به دست می آید:

$$<\rho(y)\rho(x_{12}+y)\rho(y+x_{23}> = \quad (31)$$

۵ مرجع‌ها

[۱] از درس فرایندهای تصادفی درس رضا–رحیمی تبار ۱۳۸۵ دانشگاه شریف

[۲] Movahed, M. S., Ghasemi, F., Rahvar, S., Sreenivasan K. R., Rahimi Tabar, M, R., submitted in Phys. Rev. D (2006)

[۳] Peebles, Structure fromation ...

[۴] Peacock, J, A., Cosmological Physics, Cambridge university press 1999.

[۵] Fullana, M, J., Saez, D., New Astronomy 5, 2000, 109

[۶] Movahed, M. S., Rahvar, S., Phys. Rev. D 73, 083518 (2006)

[۷] Arbabi Bidgoli, S., Movahed, M. S., Rahvar, S., Int. J. Mod. Phys. D 15, 1455 (2006)