

امتحان میان ترم دوم، مبانی نظریه بازی‌ها

بهار ۱۴۰۳ – محمدحسین رحمتی

زمان امتحان ۹۰ دقیقه است. واضح، کوتاه و ترجیحا بدون خط‌خوردگی بنویسید

1. (خیاطی) فاطمه می‌خواهد به یک خیاط سفارش دوخت لباس بدهد! در محله آنها دو خیاط زینت و زهره فعالیت می‌کنند. اگر مانتویی که دوخته می‌شود کیفیت خوبی داشته باشد فاطمه مطلوبیت $v > 0$ بدست می‌آورد و در غیر این صورت مطلوبیت فاطمه برابر صفر خواهد بود. برای زمان‌بندی بازی داریم: **مرحله اول** زینت و زهره همزمان قیمتی p را برای دوخت لباس پیشنهاد می‌دهند. البته در قرارداد آمده است که اگر فاطمه بتواند ثابت کند که کیفیت مانتو بد است، هیچ پرداختی به خیاط انجام نمی‌شود.

مرحله دوم فاطمه تصمیم می‌گیرد به کدام خیاط سفارش دهد. اگر فاطمه هیچ کدام را انتخاب نکند بازی تمام می‌شود و همه مطلوبیت صفر دارند. ولی اگر یکی را انتخاب کرد با وی ادامه می‌دهد.

مرحله سوم خیاطی که از فاطمه سفارش گرفته است انتخاب می‌کند آیا برای دوخت مانتو تلاش $e \in \{0,1\}$ بخرج دهد یا خیر. کیفیت مانتو ev است. **مرحله چهارم** در این مرحله فاطمه با دیدن مانتو بدون اشتباه کیفیت مانتو را می‌فهمد و می‌تواند ایرادات آن را بگوید. (این مرحله فاقد تصمیم‌گیری است) **مرحله پنجم** اگر فاطمه مانتو با کیفیت بد را فهمیده باشد می‌تواند تصمیم بگیرد که ادامه دهد و خرید را کامل کند، ولی اگر شواهدی اثبات‌کننده برای کیفیت بد مانتو نداشته باشد مکلف است خرید را کامل کند. اگر فاطمه مانتو بد را نخواهد مطلوبیت وی صفر است و مطلوبیت خیاط برابر $-ce$ است که $0 < c < v$ است. اگر خرید انجام شود مطلوبیت فاطمه $ev - p$ و مطلوبیت خیاط برابر $p - ce$ است.

(a) تعادل کامل زیربازی‌های این بازی را حل کنید! می‌توانید صرفاً بر حرکات محض تمرکز کنید. دقت کنید باید تعادل را کامل توصیف کنید لذا در هر مرحله دقیقاً داخل مسیر تعادل و خارج مسیر تعادل به دقت بیان کنید که چه تصمیمی گرفته می‌شود. آیا اتفاق بازی برتراند اینجا هم رخ می‌دهد؟ به این معنی که رقابت دو خیاط قیمت دوخت را تا هزینه دوخت کاهش می‌دهد؟

مریم خواهر فاطمه است و برای دوخت مانتو کاملاً مستقل از فاطمه، بازی مشابه بازی فوق را با زینت و زهره انجام می‌دهد. تنها فرق این دو خواهر آن است که مریم از خیاطی سر رشته ندارد و مرحله چهارم زیر را باید بازی کند. سایر مراحل بازی مریم دقیقاً مشابه فاطمه است.

مرحله چهارم-مریم مریم کیفیت مانتو را نمی‌تواند تشخیص دهد و اگر بخواهد کیفیت مانتو را تشخیص دهد باید هزینه M را خرج کند (مثلاً از یک خیاط دیگر نظر بخواهد) تا کیفیت مانتو را دقیقاً بداند. این استعمال دقیقاً درست است و قابل اثبات است. این هزینه غیر قابل بازگشت است. فرض کنید $0 < c < M < \frac{v}{4}$.

(b) در بازی مریم تعادل کامل زیربازی‌ها را از زیربازی که از مرحله سوم شروع می‌شود بدست آورید؟ (در این مرحله قیمت p مشخص شده است و قرارداد بسته شده است) حل شما تابعی از قیمت p است. دقت کنید تمام حرکات محض و ترکیبی را در نظر بگیرید. پیامدهای بازی را برای مریم و خیاط حساب کنید.

(c) پاسخ خودتان در بخش (b) را در نظر بگیرید، تعادل کامل زیربازی‌ها در کل بازی را حساب کنید. آیا نتیجه تعادل برتراند در اینجا برقرار است؟ توضیح دهید!

(d) تعادل بازی مریم و فاطمه را بدست آورید اگر تنها یک خیاط انحصارگر در محله باشد!

2. (سردرگمی) بازی علامت‌دهی زیر را فرض کنید که طبیعت ابتدا بازی می‌کند و نوع بازی را که تباری یا سکه است انتخاب می‌کند! بازی تباری با احتمال p و بازی سکه با احتمال $1 - p$ بازی می‌شود. بازیگر اول ابتدا حرکت طبیعت را می‌بیند و سپس بازی می‌کند ولی بازیگر دوم تنها حرکت بازیگر اول را می‌بیند و نمی‌داند طبیعت چه بازی کرده است. بازیگر اول بالا و پایین $\{U, D\}$ و بازیگر دوم چپ و راست $\{L, R\}$ را بازی می‌کنند ولی پیامدها بر حسب نوع بازی متفاوت است.

	بازی سکه‌ها		بازی تباری	
	L	R	L	R
U	1,-1	-1,1	3,3	0,0
D	-1,1	1,-1	0,0	2,2

(a) نشان دهید این بازی تعادل بیزی ناهم‌سو (Separating PBE) ندارد!

(b) برای چه مقادیری از p بازی دارای تعادل بیزی هم‌سو (pooling PBE) است؟

(c) برای چه مقادیری از p تعادل بیزی وجود دارد که بازیگر اول در بازی سکه‌ها با احتمال 1 بالا را بازی کند و در بازی تباری به هر دو حرکت خود احتمال اکیدا مثبت تخصیص دهد؟