به نام خداوند خالق انسان و آزادی او

نظریه‌ی بازی‌ها

بهار ۱۴۰۲
استاد: دکتر رحمتی
گردآورندگان: امیرمسعود باقری و علی امینی

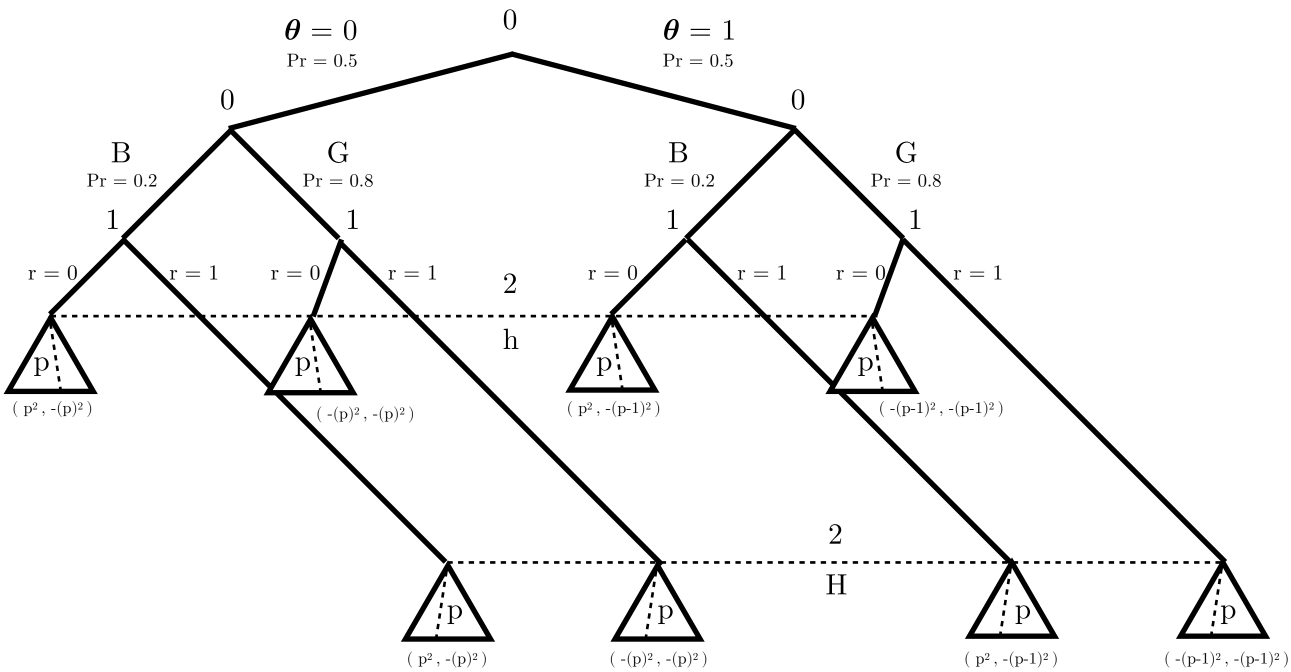
دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده‌ی مدیریت و اقتصاد

پاسخ میانترم دوم

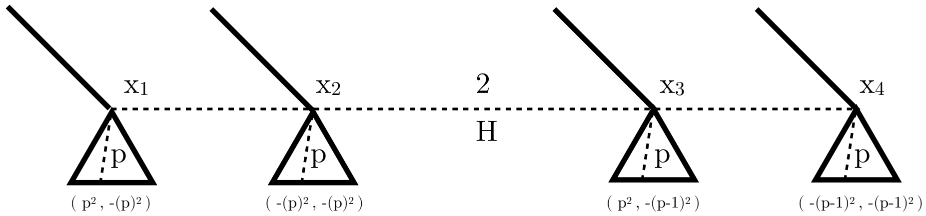
تاریخ امتحان: چهارشنبه ۲۵ اردیبهشت

سوال ۱.

مطابق صورت سوال، طبیعت دوبار دست به بازی می‌زند و در مرحله‌ی اول میزان $\boldsymbol{\theta}$ در دنیای واقع را تعیین و در مرحله‌ی دوم نیز دست به انتخاب نوع مشاور(خوب یا بد) می‌زند. سپس مشاور اقدام به ارسال سیگنال r کرده که می‌تواند مقادیر یک یا صفر را در بربگیرد و در نهایت، مدیر بدون اطلاع از بازی‌های طبیعت، تنها با دیدن سیگنال باید اقدام به تصمیم گیری پیوسته‌ی p در بازه‌ی بسته‌ی $[0,1]$ کند. شکل درختی بازی به صورت زیر است:



حال برای پیدا کردن تعادل‌های نش بیزی، از انتهای بازی، یعنی از مجموعه‌های اطلاعاتی H و h که سیاست گذار در آن‌ها ملزم به تصمیم‌گیری می‌باشد، شروع می‌کنیم. در هر مجموعه‌ی اطلاعاتی، سیاست گذار چهار عضو دارد. مطابق تعریف تعادل بیزی، سیاست گذار می‌بایست متناسب با باوری که در هر مجموعه‌ی اطلاعاتی نسبت به قرارگیری در هر یک از این چهار نقطه دارد، تصمیم بهینه‌ای برای p بگیرد که به این ترتیب مطلوبیت انتظاری خود را بیشینه کند. لذا برای مطلوبیت انتظاری سیاست گذار در مجموعه‌ی اطلاعاتی H داریم:

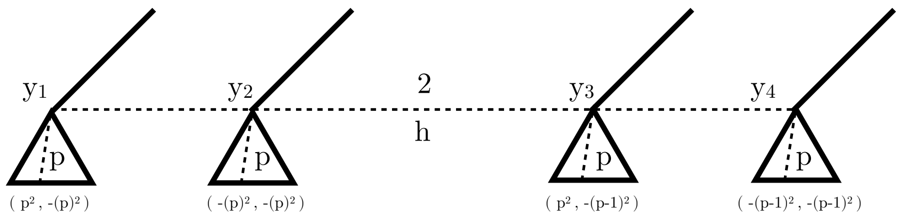


$EU_2(.|H) = (-p^2)(\mu_1(x_1|H) + \mu_2(x_2|H)) - ((1\text{-}p)^2(1 - \mu_1(x_1|H) - \mu_2(x_2|H))$

باتوجه به مقعر بودن تابع مطلوبیت انتظاری نسبت به p، برای بهینه سازی مطلوبیت سیاست‌گذار داریم:

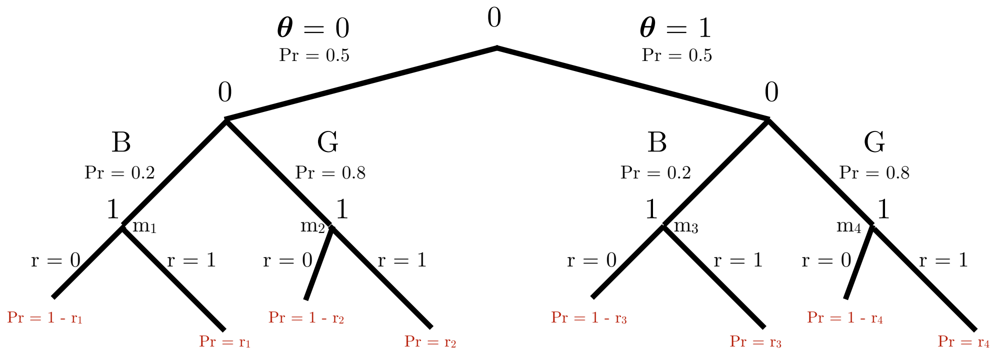
$\Longrightarrow \partial(EU_2(.|H))/\partial p) = 0 \Longrightarrow p_H = 1 - (\mu_1(x_1|H) + \mu_2(x_2|H)) = \mu_3(x_3|H) + \mu_4(x_4|H)$

با توجه به اینکه مطلوبیت‌های سیاست گذار در مجموعه‌ی اطلاعاتی h نیز عینا مشابه مجموعه‌ی اطلاعاتی H است، به طور مشابه می‌توان نوشت:



$EU_2(.|h) = (-p^2)(\alpha_1(y_1|h) + \alpha_2(y_2|h)) - ((1\text{-}p)^2(1 - \alpha_1(y_1|h) - \alpha_2(y_2|h))$
$\Longrightarrow \partial(EU_2(.|h))/\partial p) = 0 \Longrightarrow p_h = 1 - (\alpha_1(y_1|h) + \alpha_2(y_2|h)) = \alpha_3(y_3|h) + \alpha_4(y_4|h)$

حال پیش از اینکه به تعادل بیزی بپردازیم، ابتدا باورها را ساخته و سپس تابع مطلوبیت انتظاری دو بازیکن را می‌سازیم. برای این مهم، فرض می‌کنیم که مشاور، حرکات محض خود را با احتمالات زیر بازی کند:



مطابق احتمالات بالا، می‌توان باورهای هر دو مجموعه‌ی اطلاعاتی H و h را به صورت زیر ساخت:

$$\mu_1(x_1|H) = Pr(\boldsymbol{\theta} = 0)\times Pr(B)\times Pr(r = 1|m_1)/(Pr(\boldsymbol{\theta} = 0)\times Pr(B)\times Pr(r = 1|m_2) + Pr(\boldsymbol{\theta} = 1)\times Pr(B)\times Pr(r = 1|m_3) + Pr(\boldsymbol{\theta} = 1)\times Pr(G)\times Pr(r = 1|m_4))$$
$$\Longrightarrow \mu_1(x_1|H) = 0.1r_1/(0.1r_1 + 0.4r_2 + 0.1r_3 + 0.4r_4)$$

به همین ترتیب و برای سایر باورهای موجود در مجموعه‌ی اطلاعاتی H داریم:

$$\mu_2(x_2|H) = 0.4r_2/(0.1r_1 + 0.4r_2 + 0.1r_3 + 0.4r_4)$$
$$\mu_3(x_3|H) = 0.1r_3/(0.1r_1 + 0.4r_2 + 0.1r_3 + 0.4r_4)$$
$$\mu_4(x_4|H) = 0.4r_4/(0.1r_1 + 0.4r_2 + 0.1r_3 + 0.4r_4)$$

به همین ترتیب و برای باورهای موجود در مجموعه‌ی اطلاعاتی h داریم:

$$\alpha_1(y_1|h) = 0.1(1 - r_1)/(0.1(1 - r_1) + 0.4(1 - r_2) + 0.1(1 - r_3) + 0.4(1 - r_4))$$
$$\alpha_2(y_2|h) = 0.4(1 - r_2)/(0.1(1 - r_1) + 0.4(1 - r_2) + 0.1(1 - r_3) + 0.4(1 - r_4))$$
$$\alpha_3(y_3|h) = 0.1(1 - r_3)/(0.1(1 - r_1) + 0.4(1 - r_2) + 0.1(1 - r_3) + 0.4(1 - r_4))$$
$$\alpha_4(y_4|h) = 0.1(1 - r_4)/(0.1(1 - r_1) + 0.4(1 - r_2) + 0.1(1 - r_3) + 0.4(1 - r_4))$$

به این ترتیب و پس از ساخت باورها، می توانیم تابع مطلوبیت انتظاری مشاور و سیاست‌گذار را بسازیم:

$$\begin{aligned}
EU_1 = {} & \Pr(\boldsymbol{\theta} = 0)\times\Pr(B)\times(\Pr(r = 1|m_1) \times (p_H)^2 + \Pr(r = 0|m_1) \times (p_h)^2) \\
& - \Pr(\boldsymbol{\theta} = 0)\times\Pr(G)\times(\Pr(r = 1|m_2) \times (p_H)^2 + \Pr(r = 0|m_2) \times (p_h)^2) \\
& + \Pr(\boldsymbol{\theta} = 1)\times\Pr(B)\times(\Pr(r = 1|m_3) \times (p_H)^2 + \Pr(r = 0|m_3) \times (p_h)^2) \\
& - \Pr(\boldsymbol{\theta} = 1)\times\Pr(G)\times(\Pr(r = 1|m_4) \times (p_H - 1)^2 + \Pr(r = 0|m_2) \times (p_h - 1)^2) \\
\Longrightarrow EU_1 = {} & 0.1(r_1(p_H)^2 + (1 - r_1)(p_h)^2) - 0.4(r_2(p_H)^2 + (1 - r_2)(p_h)^2) \\
& + 0.1(r_3(p_H)^2 + (1 - r_3)(p_h)^2) - 0.4(r_4\ (p_H - 1)^2 + (1 - r_4)(p_h - 1)^2)
\end{aligned}$$

همچنین به طریق کاملا مشابه برای مطلوبیت انتظاری سیاست گذار داریم:

$$\begin{aligned}
EU_2 = {} & - 0.1(r_1(p_H)^2 + (1 - r_1)(p_h)^2) - 0.4(r_2(p_H)^2 + (1 - r_2)(p_h)^2) \\
& - 0.1(r_3(p_H - 1)^2 + (1 - r_3)(p_h - 1)^2) - 0.4(r_4\ (p_H - 1)^2 + (1 - r_4)(p_h - 1)^2)
\end{aligned}$$

حال متناسب با اینکه در صورت سوال تصریح شده،که به دنبال تعادل‌های محض بیزی هستیم، لذا متغیرهای r_1 تا r_4 تنها می‌توانند مقادیر صفر و یک را داشته باشند. با توجه به این موضوع، بازیگر ۱ (مشاور)، ۱۶ راهبرد محض می‌تواند داشته باشد که هر یک از این راهبردها متناسب با راهبرد بهینه‌ی سیاست‌گذار، منجر به payoff مجزا برای دو بازیکن می‌شود. مطابق توابع بالا، برای مثال برای راهبرد 0001، مطابق توابع قبلی برای باور و payoff داریم:

$$r_1 = r_2 = r_3 = 0\ ,\ r_1 = 1 \Longrightarrow \begin{array}{l} \mu_1(x_1|H) = \mu_2(x_2|H) = \mu_3(x_3|H) = 0\ ,\ \mu_4(x_4|H) = 1 \Longrightarrow p_H = 1 \\ \alpha_1(y_1|h) = \alpha_3(y_3|h) = 1/6\ ,\ \alpha_2(y_2|h) = 2/3 \qquad \Longrightarrow p_h = 1/6 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{l} EU_1 = -1/180 \\ EU_2 = -1/12 \end{array}$$

به همین ترتیب، ابتدا تمامی باورها را به ازای همه‌ی راهبردهای مشاور محاسبه می‌کنیم که حاصل جدول زیر خواهد بود:

Advisor Strategies				Policy Maker's Beliefs in H				Policy Maker's Beliefs in h			
r_1	r_2	r_3	r_4	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	α_1	α_2	α_3	α_4
0	0	0	0	بازی به H نمی‌رسد				1/10	2/5	1/10	2/5
0	0	0	1	0	0	0	1	1/6	2/3	1/6	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1/9	4/9	0	4/9
0	1	0	0	0	1	0	0	1/6	0	1/6	2/3
1	0	0	0	1	0	0	0	0	4/9	1/9	4/9
0	0	1	1	0	0	1/5	4/5	1/5	4/5	0	0
0	1	0	1	0	1/2	0	1/2	1/2	0	1/2	0
0	1	1	0	0	4/5	1/5	0	1/5	0	0	4/5
1	1	0	0	1/5	4/5	0	0	0	0	1/5	4/5
1	0	1	0	1/2	0	1/2	0	0	1/2	0	1/2
1	0	0	1	1/5	0	0	4/5	0	4/5	1/5	0
1	1	1	0	1/6	2/3	1/6	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	4/9	1/9	4/9	1	0	0	0
1	0	1	1	1/6	0	1/6	2/3	0	1	0	0
1	1	0	1	1/9	4/9	0	4/9	0	0	1	0
1	1	1	1	1/10	2/5	1/10	2/5	بازی به h نمی‌رسد			

باتوجه به باورهای به دست آمده و واکنش‌های بهینه‌ی سازگار با باور سیاست‌گذار، داریم:

Advisor Strategies				Policy Maker's Best Response	
r_1	r_2	r_3	r_4	p_H	p_h
0	0	0	0	بازی به H نمی‌رسد	1/2
0	0	0	1	1	1/6
0	0	1	0	1	4/9
0	1	0	0	0	5/6
1	0	0	0	0	5/9
0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1/2	1/2
0	1	1	0	1/5	4/5
1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1/2	1/2
1	0	0	1	4/5	1/5
1	1	1	0	1/6	1
0	1	1	1	5/9	0
1	0	1	1	5/6	0
1	1	0	1	4/9	1
1	1	1	1	1/2	بازی به h نمی‌رسد

لذا در نهایت با توجه به p_h و p_H به دست آمده، برای مطلوبیت‌های انتظاری داریم:

Advisor Strategies				Expected Payoffs	
r_1	r_2	r_3	r_4	Eu_1	Eu_2
0	0	0	0	- 1/20	- 1/4
0	0	0	1	- 1/180	- 1/12
0	0	1	0	- 67/810	- 2/9
0	1	0	0	23/180	- 1/12
1	0	0	0	- 139/810	- 2/9
0	0	1	1	1/10	0
0	1	0	1	- 3/20	- 1/4
0	1	1	0	9/250	- 4/25
1	1	0	0	1/10	0
1	0	1	0	- 3/20	- 1/4
1	0	0	1	9/250	- 4/25
1	1	1	0	- 1/180	- 1/12
0	1	1	1	- 139/810	- 2/9
1	0	1	1	23/180	- 1/12
1	1	0	1	- 67/810	- 2/9
1	1	1	1	- 3/20	- 1/4

به طور خلاصه داریم:

Advisor Strategies				Manager Beliefs in H				Manager Beliefs in h				Manager Best Response		Expected Payoffs	
r_1	r_2	r_3	r_4	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	α_1	α_2	α_3	α_4	p_H	p_h	Eu_1	Eu_2
0	0	0	0	بازی به H نمی‌رسد				1/10	2/5	1/10	2/5	بازی به H نمی‌رسد	1/2	- 1/20	- 1/4
0	0	0	1	0	0	0	1	1/6	2/3	1/6	0	1	1/6	- 1/180	- 1/12
0	0	1	0	0	0	1	0	1/9	4/9	0	4/9	1	4/9	- 67/810	- 2/9
0	1	0	0	0	1	0	0	1/6	0	1/6	2/3	0	5/6	23/180	- 1/12
1	0	0	0	1	0	0	0	0	4/9	1/9	4/9	0	5/9	- 139/810	- 2/9
0	0	1	1	0	0	1/5	4/5	1/5	4/5	0	0	1	0	1/10	0
0	1	0	1	0	1/2	0	1/2	1/2	0	1/2	0	1/2	1/2	- 3/20	- 1/4
0	1	1	0	0	4/5	1/5	0	1/5	0	0	4/5	1/5	4/5	9/250	- 4/25
1	1	0	0	1/5	4/5	0	0	0	0	1/5	4/5	0	1	1/10	0
1	0	1	0	1/2	0	1/2	0	0	1/2	0	1/2	1/2	1/2	- 3/20	- 1/4
1	0	0	1	1/5	0	0	4/5	0	4/5	1/5	0	4/5	1/5	9/250	- 4/25
1	1	1	0	1/6	2/3	1/6	0	0	0	0	1	1/6	1	- 1/180	- 1/12
0	1	1	1	0	4/9	1/9	4/9	1	0	0	0	5/9	0	- 139/810	- 2/9
1	0	1	1	1/6	0	1/6	2/3	0	1	0	0	5/6	0	23/180	- 1/12
1	1	0	1	1/9	4/9	0	4/9	0	0	1	0	4/9	1	- 67/810	- 2/9
1	1	1	1	1/10	2/5	1/10	2/5	بازی به h نمی‌رسد				1/2	بازی به h نمی‌رسد	- 3/20	- 1/4

حال با توجه به نتایج به دست آمده، می‌دانیم که در هر حالتی، سیاست‌گذار انگیزه‌ی تخطی ندارد و حرکتش همواره بهینه‌ترین حرکت سازگار با باور است. پس برای تعادل بیزی بودن هر یک از راهبردهای بالا، کافی‌ست انگیزه‌ی تخطی مشاور را چک کنیم. در ارتباط با انگیزه‌ی تخطی مشاور برای مورد اول و شانزدهم(0000 و 1111) که به ترتیب بازی به مجموعه‌ی اطلاعاتی H و h نمی‌رسد، باید دید که آیا می‌توان باوری برای سیاست‌گذار فرض کرد که به ازای این باورها، مشاور انگیزه‌ی تخطی نداشته باشد. اما برای سایر حالات، کافی‌ست چک کنیم که با فرض ثابت بودن حرکت سیاست‌گذار، آیا مشاور انگیزه دارد که یکی از حرکات موجود در راهبرد خود را عوض کند یا خیر. بدیهتا به ازای هر راهبرد، چهار تخطی را باید چک کنیم. لذا متناسب با توابع قبلی، برای مطلوبیت‌های ناشی از Deviate کردن مشاور خواهیم داشت:

Advisor Strategies				Expected Payoffs		Eu_1 in Deviation			
r_1	r_2	r_3	r_4	Eu_1	Eu_2	Deviation in r1	Deviation in r2	Deviation in r3	Deviation in r4
0	0	0	1	- 1/180	- 1/12	11/120	- 71/180	11/120	- 17/60
0	0	1	0	- 67/810	- 2/9	- 1/405	- 109/270	- 22/135	11/270
0	1	0	0	23/180	- 1/12	7/120	- 3/20	7/120	- 47/180
1	0	0	0	- 139/810	- 2/9	- 19/135	- 13/270	- 82/405	- 133/270
0	0	1	1	1/10	0	1/5	- 3/10	0	- 3/10
0	1	0	1	- 3/20	- 1/4	- 3/20	- 3/20	- 3/20	- 3/20
0	1	1	0	9/250	- 4/25	- 3/125	- 51/250	12/125	- 51/250
1	1	0	0	1/10	0	1/5	- 3/10	0	- 3/10
1	0	1	0	- 3/20	- 1/4	- 3/20	- 3/20	- 3/20	- 3/20
1	0	0	1	9/250	- 4/25	- 3/125	- 51/250	12/125	- 51/250
1	1	1	0	- 1/180	- 1/12	11/120	- 71/180	11/120	- 17/60
0	1	1	1	- 139/810	- 2/9	- 19/135	- 13/270	- 82/405	- 133/270
1	0	1	1	23/180	- 1/12	7/120	- 3/20	7/120	- 47/180
1	1	0	1	- 67/810	- 2/9	- 1/405	- 109/270	- 22/135	11/270

در payoff های قرمز شده، مشاور انگیزه‌ی تخطی دارد. برای مثال در راهبرد دوم در جدول(0010) مشاور انگیزه دارد که به جای $r_4 = 0$، عدد 1 را سیگنال بدهد و به مطلوبیت بالاتر (270)/11 برسد که بالاتر از 67/810- است. لذا در سایر راهبردهای مشاور که به ازای آنها مشاور هیچ انگیزه‌ی تخطی ندارد(مطلوبیت‌های ناشی از تخطی به رنگ قرمز درنیامده. است!)، یک تعادل محض بیزی داریم.

اما در ارتباط با انگیزه‌ی تخطی مشاور برای راهبرد اول و شانزدهم(0000 و 1111)، باید دید می‌توان باورها و استراتژی سیاست‌گذار در مجموعه‌ای که بازی به آن نمی‌رسد را به گونه‌ای چید که انگیزه‌ی تخطی برای مشاور وجود نداشته باشد. لذا برای راهبرد 0000 داریم:

Deviation in r_1:

$$0.1(p_h)^2 - 0.4(p_h)^2 + 0.1(p_h)^2 - 0.4(p_h - 1)^2 \geq 0.1(p_H)^2 - 0.4(p_h)^2 + 0.1(p_h)^2 - 0.4(p_h - 1)^2$$
$$\Longrightarrow (p_h)^2 \geq (p_H)^2 \Longrightarrow p_H \leq 1/2$$

Deviation in r_2:

$$0.1(p_h)^2 - 0.4(p_h)^2 + 0.1(p_h)^2 - 0.4(p_h - 1)^2 \geq 0.1(p_h)^2 - 0.4(p_H)^2 + 0.1(p_h)^2 - 0.4(p_h - 1)^2$$
$$\Longrightarrow (p_h)^2 \leq (p_H)^2 \Longrightarrow p_H \geq 1/2$$

Deviation in r_3:

$$0.1(p_h)^2 - 0.4(p_h)^2 + 0.1(p_h)^2 - 0.4(p_h - 1)^2 \geq 0.1(p_h)^2 - 0.4(p_h)^2 + 0.1(p_H)^2 - 0.4(p_h - 1)^2$$
$$\Longrightarrow (p_h)^2 \geq (p_H)^2 \Longrightarrow p_H \leq 1/2$$

Deviation in r_4:

$$0.1(p_h)^2 - 0.4(p_h)^2 + 0.1(p_h)^2 - 0.4(p_h - 1)^2 \geq 0.1(p_h)^2 - 0.4(p_h)^2 + 0.1(p_h)^2 - 0.4(p_H - 1)^2$$
$$\Longrightarrow (p_h - 1)^2 \leq (p_H - 1)^2 \Longrightarrow p_H \leq 1/2$$

با توجه به نتایج، داریم که به ازای باورهای مجموعه‌ی اطلاعاتی H با شرایط زیر، بی‌نهایت تعادل بیزی داریم:

$$p_H = 1/2 \Longrightarrow 1 - (\mu_1(x_1|H) + \mu_2(x_2|H)) = \mu_3(x_3|H) + \mu_4(x_4|H) = 1/2$$

به صورت مشابه، برای راهبرد 1111 داریم:

Deviation in r_1:
$0.1(p_H)^2 - 0.4(p_H)^2 + 0.1(p_H)^2 - 0.4(p_H - 1)^2 \geq 0.1(p_h)^2 - 0.4(p_H)^2 + 0.1(p_H)^2 - 0.4(p_H - 1)^2$
$\Longrightarrow (p_H)^2 \geq (p_h)^2 \Longrightarrow p_h \leq 1/2$

Deviation in r_2:
$0.1(p_H)^2 - 0.4(p_H)^2 + 0.1(p_H)^2 - 0.4(p_H - 1)^2 \geq 0.1(p_H)^2 - 0.4(p_h)^2 + 0.1(p_H)^2 - 0.4(p_H - 1)^2$
$\Longrightarrow (p_h)^2 \geq (p_H)^2 \Longrightarrow p_h \geq 1/2$

Deviation in r_3:
$0.1(p_H)^2 - 0.4(p_H)^2 + 0.1(p_H)^2 - 0.4(p_H - 1)^2 \geq 0.1(p_H)^2 - 0.4(p_H)^2 + 0.1(p_h)^2 - 0.4(p_H - 1)^2$
$\Longrightarrow (p_H)^2 \geq (p_h)^2 \Longrightarrow p_h \leq 1/2$

Deviation in r_4:
$0.1(p_H)^2 - 0.4(p_H)^2 + 0.1(p_H)^2 - 0.4(p_H - 1)^2 \geq 0.1(p_H)^2 - 0.4(p_H)^2 + 0.1(p_H)^2 - 0.4(p_h - 1)^2$
$\Longrightarrow (p_H - 1)^2 \leq (p_h - 1)^2 \Longrightarrow p_h \leq 1/2$

با توجه به نتایج، داریم که به ازای باورهای مجموعه‌ی اطلاعاتی h با شرایط زیر، بی‌نهایت تعادل بیزی داریم:

$p_h = 1/2 \Longrightarrow p_h = 1 - (\alpha_1(y_1|h) + \alpha_2(y_2|h)) = \alpha_3(y_3|h) + \alpha_4(y_4|h) = 1/2$

اما برای یافتن تعادل‌های رشته‌ای از بین این تعادل‌های بیزی، تمامی تعادل‌های بیزی که به ازای راهبردی به غیر از 0000 و 1111 به دست آمده‌اند، چون تمامی مجموعه‌های اطلاعاتی در مسیر تعادل هستند و تعادل نیز عقلایی رشته‌ای است، لذا تعادل‌های بیزی به دست آمده، رشته‌ای نیز می‌باشند. اما برای تعادل‌های بیزی به دست آمده به ازای راهبردهای 0000 و 1111، کافی‌ست مشاور در چهار نقطه‌ی تصمیم‌گیری خود به گونه‌ای بلغزد، که در مجموعه‌ی اطلاعاتی‌ای که در مسیر تعادل قرار ندارد، مجموع باورهای نقاط اول و دوم با مجموع نقاط سوم و چهارم برابر شود(زیرا در هر دو حالت بهترین p انتخابی توسط سیاست‌گذار برابر 0.5 است). برای مثال در یکی از تعادل‌های بیزی ناشی از راهبرد 0000 داریم:

$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 0$
$\mu_1(x_1|H) = 0.25$, $\mu_2(x_2|H) = 0.25$, $\mu_3(x_3|H) = 0.3$, $\mu_4(x_4|H) = 0.2$
$\alpha_1(y_1|h) = 0.1$, $\alpha_2(y_2|h) = 0.4$, $\alpha_3(y_3|h) = 0.1$, $\alpha_4(y_4|h) = 0.4$
$p_h = p_H = 0.5$

پس راهبرد تماما ترکیبی Γ برای مشاور فرض می‌کنیم، به گونه‌ای که:

$\Gamma^n(r_1) = 2.5\zeta^n$, $\Gamma^n(r_2) = 0.625\zeta^n$, $\Gamma^n(r_3) = 3\zeta^n$, $\Gamma^n(r_1) = 0.5\zeta^n$

واضح است که این راهبرد تماما ترکیبی، زمانی که $n\to\infty$ میل کند، به راهبرد محض 0000 میل خواهد کرد. علاوه بر این موضوع، برای باورهای مجموعه‌ی اطلاعاتی H نیز داریم:

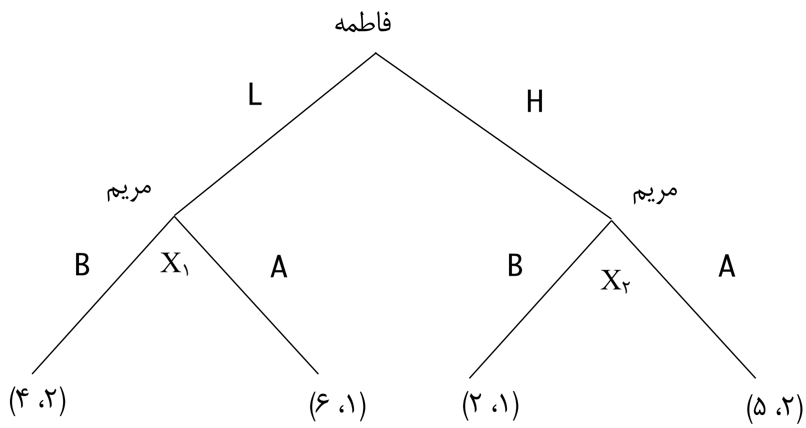
$\mu_1(x_1|H) = (0.1\times2.5\zeta^n)/(0.1\times2.5\zeta^n + 0.4\times0.625\zeta^n + 0.1\times3\zeta^n + 0.4\times0.5\zeta^n) = 0.25$
$\mu_1(x_2|H) = (0.4\times0.625\zeta^n)/(0.1\times2.5\zeta^n + 0.4\times0.625\zeta^n + 0.1\times3\zeta^n + 0.4\times0.5\zeta^n) = 0.25$
$\mu_1(x_3|H) = (0.1\times3\zeta^n)/(0.1\times2.5\zeta^n + 0.4\times0.625\zeta^n + 0.1\times3\zeta^n + 0.4\times0.5\zeta^n) = 0.3$
$\mu_1(x_4|H) = (0.4\times0.5\zeta^n)/(0.1\times2.5\zeta^n + 0.4\times0.625\zeta^n + 0.1\times3\zeta^n + 0.4\times0.5\zeta^n) = 0.2$

پس به همین ترتیب به ازای تمامی باورهای فرض شده در مجموعه‌های خارج از تعادل در تعادل‌های بیزی ناشی از راهبردهای محض 0000 و 1111، می‌توان راهبرد تماما ترکیبی Γ را یافت که رشته‌ای بودن تعادل را نتیجه دهد.

پاسخ سوال دوم میان‌ترم دوم نظریه بازی‌ها – بهار ۱۴۰۲

الف)

مطابق نمودار یک بازی با اطلاعات کامل خواهیم داشت:



مجموعه راهبردهای مریم به ترتیب به‌ازای بازی H و L فاطمه به‌صورت $\{AA, AB, BA, BB\}$ است.
بنابراین نمایش جدولی به‌صورت زیر خواهد بود:

مریم

		AA	AB	BA	BB
فاطمه	H	(5, 2)	(5, 2)	(2, 1)	(2, 1)
	L	(6, 1)	(4, 2)	(6, 1)	(4, 2)

بهترین واکنش فاطمه با رنگ سبز و بهترین واکنش مریم با رنگ زرد مشخص شده‌است. بنابراین تعادل نش محض در این بازی برابر است با:

$$\boxed{NE = \{H, AB\}}$$

$$\boxed{NE = \{L, BB\}}$$

ب)

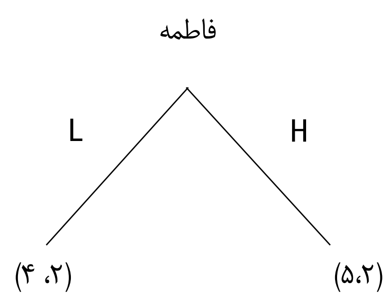
مطابق جدول زیر با حذف حرکات اکیدا و نسبتا مغلوب خواهیم داشت:

		مریم			
		AA	AB	BA	BB
فاطمه	H	(5, 2)	(5, 2)	(2, 1)	(2, 1)
	L	(6, 1)	(4, 2)	(6, 1)	(4, 2)

بنابراین تعادل در صورت حذف حرکات نسبتا مغلوب برابر است با:

$$\boxed{IEWDS = \{H, AB\}}$$

با توجه به نمودار، دو زیر بازی در گره‌های x1 و x2 و کل بازی نیز یک زیربازی است، در نتیجه به‌طور کلی سه زیر بازی وجود دارد. در زیربازی که از گره x1 شروع می‌شود، مریم حرکت A انتخاب می‌کند. در گره x2 مریم حرکت B را انتخاب می‌کند. بنابراین انتخاب فاطمه مطابق شکل زیر خواهد بود:

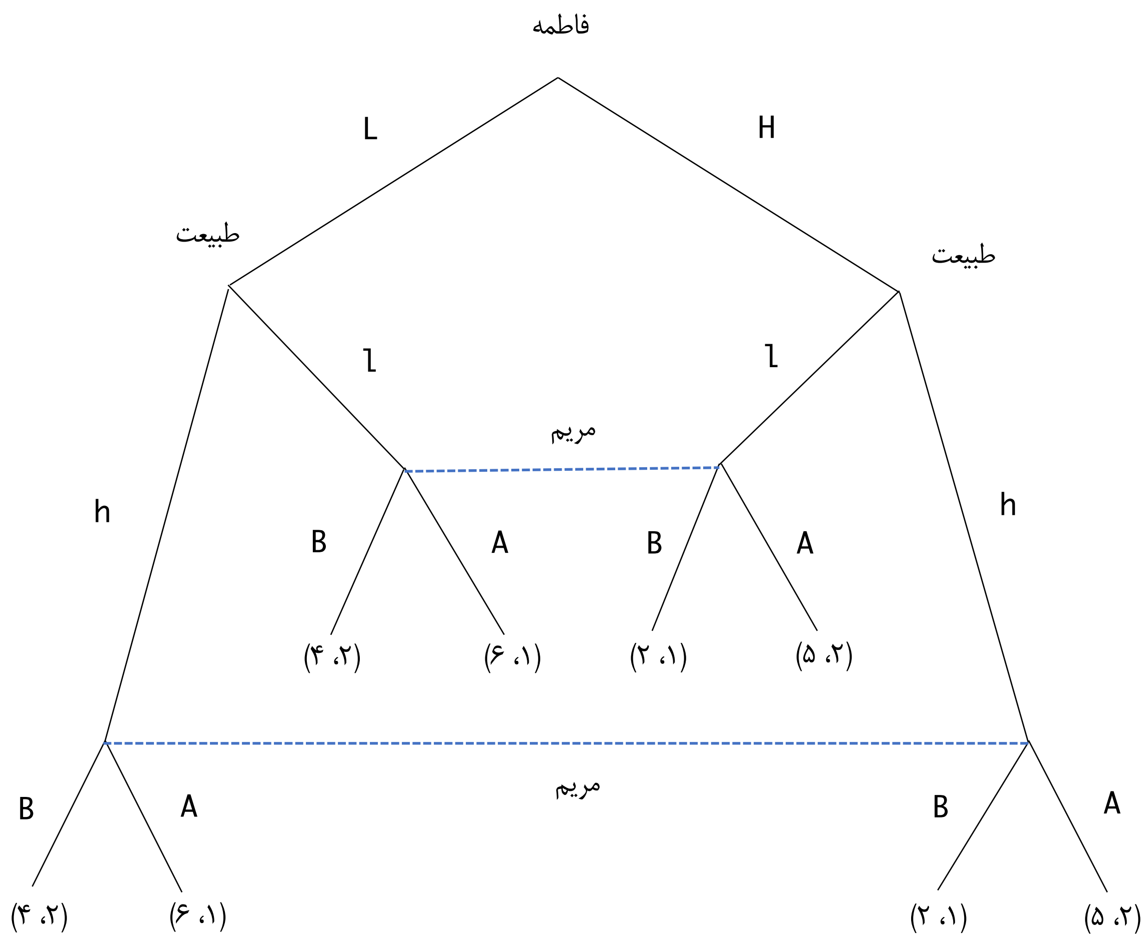


بنابراین تعادل کامل زیربازی‌ها برابر است با:

$$\boxed{SPNE = \{H, AB\} = (5,2)}$$

ج)

در این حالت برای فاطمه و مریم مطلوبیت انتظاری را محاسبه می‌کنیم. راهبردهای مریم در صورتی که سیگنال h و l را دریافت کند به صورت {AA, AB, BA, BB} است.



- مریم راهبرد AA و فاطمه H را اتخاذ کند

$$U_1(AA, H) = p(h|H) \times 5 + p(l|H) \times 5 = 5p + 5(1-p) = 5$$

$$U_2(AA, H) = p(h|H) \times 2 + p(l|H) \times 2 = 2p + 2(1-p) = 2$$

- مریم راهبرد AA و فاطمه L را اتخاذ کند

$$U_1(AA, L) = p(h|L) \times 6 + p(l|L) \times 6 = 6q + 6(1-q) = 6$$

$$U_2(AA, L) = p(h|L) \times 1 + p(l|L) \times 1 = q + (1-q) = 1$$

- مریم راهبرد AB و فاطمه H را اتخاذ کند

$$U_1(AB, H) = p(h|H) \times 5 + p(l|H) \times 2 = 5p + 2(1-p) = 2 + 3p$$

$$U_2(AB, H) = p(h|H) \times 2 + p(l|H) \times 1 = 2p + (1-p) = 1 + p$$

- مریم راهبرد AB و فاطمه L را اتخاذ کند

$$U_1(AB, L) = p(h|L) \times 6 + p(l|L) \times 4 = 6q + 4(1-q) = 4 + 2q$$

$$U_2(AB, L) = p(h|L) \times 1 + p(l|L) \times 2 = q + 2(1-q) = 2 - q$$

- مریم راهبرد BA و فاطمه H را اتخاذ کند

$$U_1(BA, H) = p(h|H) \times 2 + p(l|H) \times 5 = 2p + 5(1-p) = 5 - 3p$$

$$U_2(BA, H) = p(h|H) \times 1 + p(l|H) \times 2 = p + 2(1-p) = 2 - p$$

- مریم راهبرد BA و فاطمه L را اتخاذ کند

$$U_1(BA, L) = p(h|L) \times 4 + p(l|L) \times 6 = 4q + 6(1-q) = 6 - 2q$$

$$U_2(BA, L) = p(h|L) \times 2 + p(l|L) \times 1 = 2q + (1-q) = 1 + q$$

- مریم راهبرد BB و فاطمه H را اتخاذ کند

$$U_1(BB, H) = p(h|H) \times 2 + p(l|H) \times 2 = 2p + 2(1-p) = 2$$

$$U_2(BB, H) = p(h|H) \times 1 + p(l|H) \times 1 = p + (1-p) = 1$$

- مریم راهبرد BB و فاطمه L را اتخاذ کند

$$U_1(BB, L) = p(h|L) \times 4 + p(l|L) \times 4 = 4q + 4(1-q) = 4$$

$$U_2(BB, L) = p(h|L) \times 2 + p(l|L) \times 2 = 2q + 2(1-q) = 2$$

با توجه به مقادیر به‌دست آمده نمایش جدولی به‌صورت زیر است.

مریم

فاطمه		AA	AB	BA	BB
	H	(5, 2)	(2 + 3p, 1 + p)	(5 – 3p, 2 - p)	(2, 1)
	L	(6, 1)	(4 + 2q, 2 - q)	(6 - 2q, 1 + q)	(4, 2)

با توجه به صورت مساله و این نکته که $p > \frac{1}{2} > q$ بنابراین BA اکیدا مغلوب AB است.

فاطمه		AA	AB	BB
	H	(5, 2)	(2 + 3p, 1 + p)	(2, 1)
	L	(6, 1)	(4 + 2q, 2 - q)	(4, 2)

بهترین واکنش فاطمه با رنگ سبز و بهترین واکنش مریم با رنگ زرد مشخص شده‌است. بنابراین تعادل نش محض در این بازی برابر است با:

$$\boxed{NE = \{L, BB\}}$$

اگر مقادیر p و q به‌ترتیب به ۱ و صفر میل کنند، مادامی که **دقیقا** برابر با این مقدار نیستند، نتیجه مانند قبل خواهد بود یعنی:

$$\boxed{NE = \{L, BB\}}$$

تعادل کامل زیربازی‌ها نمی‌تواند در این حالت استفاده شود زیرا فاطمه نمی‌تواند سیگنال تصادفی که به مریم ارسال می‌شود را به‌طور دقیق پیش‌بینی کند. در نتیجه زیربازی مناسبی به‌جز کل بازی وجود ندارد و نمی‌توان از استنتاج پسرو استفاده کرد.

د)

نمایش جدولی در این حالت به‌صورت زیر است:

		مریم			
		AA	AB	BA	BB
فاطمه	H	(5, 2)	(5, 2)	(2, 1)	(2, 1)
	L	(6, 1)	(4 + 2q, 2 - q)	(6 – 2q, 1 + q)	(4, 2)

باید دقت داشته باشیم که مطابق فرض صورت سوال می‌دانیم که همواره $q < \frac{1}{2}$ است.

بهترین واکنش فاطمه با رنگ سبز و بهترین واکنش مریم با رنگ زرد مشخص شده‌است. بنابراین تعادل نش محض در این بازی برابر است با:

$$\boxed{NE = \{H, AB\}}$$

$$\boxed{NE = \{L, BB\}}$$

برای یافتن تعادل کامل زیربازی‌ها، نمودار درختی در این حالت را رسم می‌کنیم. مشاهده می‌کنیم که در این حالت نیز مانند قسمت ج، نمی‌توان از استنتاج پسرو استفاده کرد.