پاسخنامه دومین میان‌ترم 2 درس نظریه بازی‌ها بهار 1401

استاد درس: دکتر محمد حسین رحمتی

نویسندگان: سعید حجتی نژاد و سپیده عبداللهی

سوال 1

الف)

خیر- کافی است حالتی را نشان دهیم که یکی از بازیگران انگیزه انحراف داشته باشد. فرض می‌کنیم $\theta_B = 1$ باشد. اگر فرض کنیم خریدار و فروشنده از این استراتژی پیروی کنند، خریدار قیمت 1 را پیشنهاد می‌کند و مطلوبیت انتظاری خریدار $\frac{1}{4}$ خواهد شد (می‌توانید از معادله مطلوبیت انتظاری خریدار محاسبه شده برای بخش ب کمک بگیرید). حال فرض کنید با همین مقدار $\theta_B = 1$ خریدار قیمت $\frac{2}{3}$ را پیشنهاد کند. در این صورت مطلوبیت انتظاری او $\frac{1}{3}$ می‌شود که بیشتر از حالت قبلی است. در نتیجه خریدار انگیزه انحراف دارد که در نتیجه این استراتژی تعادل نیست. برای محاسبه مطلوبیت‌های انتظاری نیز از معادلات بخش ب استفاده کرده‌ام.

ب)

$$\begin{matrix} P_B = b + \beta\theta_B \\ P_S = s + \gamma\theta_S \end{matrix} \quad , \quad \beta, \gamma \geq 0$$

برای خریدار بهینه‌یابی را انجام می‌دهیم. خریدار با دانستن مقدار θ_B خود بیشینه سازی مطلوبیت انتظاری را انجام می‌دهد:

$$\begin{cases} P_B \leq P_S : \ (U_B = 0) \to b + \beta\theta_B \leq s + \gamma\theta_S \to A = \dfrac{(b-s)}{\gamma} + \dfrac{\beta}{\gamma}\theta_B \leq \theta_S \\ P_B > P_S \left(U_B = \theta_B - \dfrac{P_B + P_S}{2} \right) \to A > \theta_S \end{cases}$$

دقت شود که A متغیری دلخواه است که برای راحتی در نوشتار در ادامه راه حل، به شکل بالا تعریف کرده‌ام.

$$E[U_B|\theta_B] = \int_0^1 U_B(\theta_S|\theta_B) f(\theta_S) d\theta_S = \int_0^A \left(\left(1 - \frac{\beta}{2}\right)\theta_B - \frac{\gamma}{2}\theta_S - \frac{b+s}{2} \right) d\theta_S$$

$$= A\left(1 - \frac{\beta}{2}\right)\theta_B - \frac{\gamma}{4}A^2 - \frac{A(b+s)}{2}$$

خریدار این مطلوبیت انتظاری را در هر θ_B به وسیله ضرایب b و β بیشینه می‌کند:

$$\frac{\partial E[U_B|\theta_B]}{\partial b} = \left(\left(1 - \frac{\beta}{2}\right)\theta_B - \frac{\gamma}{2}A - \frac{b+s}{2} \right)\frac{\partial A}{\partial b} - \frac{A}{2} = 0$$

$$\to A = \frac{b-s}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma}\theta_B = \frac{1}{\gamma}\left(1 - \frac{\beta}{2}\right)\theta_B - \frac{b+s}{2\gamma}$$

$$\to \frac{3}{2}b = \left(1 - \frac{3}{2}\beta\right)\theta_B + \frac{s}{2} \to b = \frac{(2-3\beta)\theta_B + s}{3}$$

معادله $\frac{\partial E[U_B|\theta_B]}{\partial \beta} = 0$ نیز به معادله بالا ختم می‌شود با این تفاوت که در یک θ_B ضرب شده است. بنابراین معادله مستقل جدیدی به ما نمی‌دهد. حال از آنجا که b ثابت است و نباید تابع β باشد، داریم:

$$\beta = \frac{2}{3} \to b = \frac{s}{3}$$

برای فروشنده مقدار θ_S مشخص است:

$$\begin{cases} P_B \le P_S\ (U_S = \theta) \to b + \beta\theta_B \le s + \gamma\theta_S \to M = \dfrac{(s-b)}{\beta} + \dfrac{\gamma}{\beta}\theta_S \ge \theta_B \\ P_B > P_S\left(U_S = \dfrac{P_B + P_S}{2}\right) \to M < \theta_B \end{cases}$$

دقت شود که M متغیری دلخواه است که برای راحتی در نوشتار در ادامه راه حل، به شکل بالا تعریف کرده‌ام.

$$E[U_S|\theta_S] = \int_0^1 U_S(\theta_S|\theta_B) f(\theta_B) d\theta_B = M\theta_S + \int_M^1 \left(\frac{b + s + \beta\theta_B + \gamma\theta_S}{2}\right) d\theta_B$$

$$= \left(M + \frac{(1-M)\gamma}{2}\right)\theta_S + \frac{(1-M)(b+s)}{2} + \frac{\beta}{4}(1 - M^2)$$

فروشنده این مطلوبیت انتظاری را در هر θ_S به وسیله ضرایب s و γ بیشینه می‌کند:

$$\frac{\partial E[U_S|\theta_S]}{\partial s} = \left(\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)\theta_S - \frac{\beta}{2}M - \frac{b+s}{2}\right)\frac{\partial M}{\partial s} - \frac{1-M}{2} = 0$$

$$\to \frac{(2-\gamma)\theta_S}{\beta} - \frac{b+s}{\beta} - \frac{2(s-b)}{\beta} - \frac{2\gamma}{\beta}\theta_S + 1 = 0 \ \to s = \frac{(2 - 3\gamma)\theta_s + b + \beta}{3}$$

معادله $\frac{\partial E[U_S|\theta_S]}{\partial \gamma} = 0$ نیز به معادله بالا ختم می‌شود با این تفاوت که در یک θ_S ضرب شده است. بنابراین معادله مستقل جدیدی به ما نمی‌دهد. حال از آنجا که s تابع γ نیست، داریم:

$$\gamma = \frac{2}{3} \to s = \frac{b + \beta}{3}$$

تا به اینجا بهترین پاسخ هر بازیگر را به دست آورده‌ایم. حال این بهترین پاسخ‌ها را تقاطع می‌دهیم.

$$\beta = \frac{2}{3}, \gamma = \frac{2}{3}, b = \frac{s}{3}, s = \frac{b+\beta}{3} \to s = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{12}$$

پس پاسخ نهایی به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{cases} P_B = \dfrac{1}{12} + \dfrac{2}{3}\theta_B \\ P_S = \dfrac{1}{4} + \dfrac{2}{3}\theta_S \end{cases}$$

سوال 2

الف)

در بازی درختی زیر حرکات به شرح زیر است:

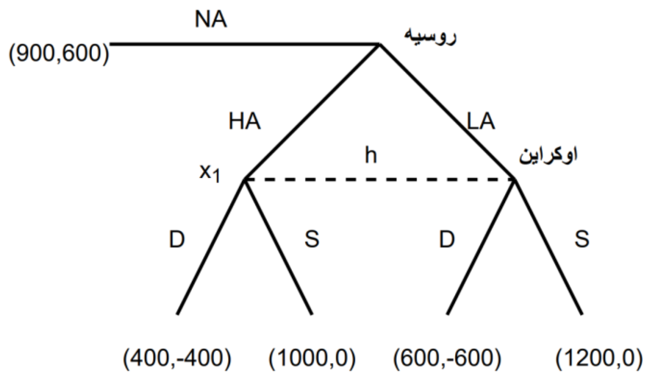
حرکت NA: حمله نکردن

حرکت HA: حمله قوی

حرکت LA: حمله ضعیف

حرکت D: دفاع

حرکت S: تسلیم



ب)

نمایش جدولی بازی به شکل زیر است.

		اوکراین	
		D	S
روسیه	NA	900, 600	900, 600
	HA	400, -400	1000, 0
	LA	-600, 600	1200, 0

تعادل نش محض: $\sigma_1 = NA \, , \sigma_2 = D$

برای آن که تعادل بیزی باشد باید باور اوکراین به نحوی باشد که عقلایی رشته‌ای باشد. اگر $\mu(x_1|h) = \mu$:

$$\mu U_2(HA, D) + (1-\mu)U_2(LA, D) \geq \mu U_2(HA, S) + (1-\mu)U_2(LA, S)$$

$$\rightarrow -400\mu + 600(1-\mu) \geq 0 \rightarrow \ 600 \geq 1000\mu \rightarrow \mu \leq 0.6$$

پس تنها تعادل بیزی بازی در مجموعه حرکات محض به شکل زیر است:

$$\sigma_1 = NA, \sigma_2 = D, \mu(x_1|h) = [0,0.6]$$

ج)

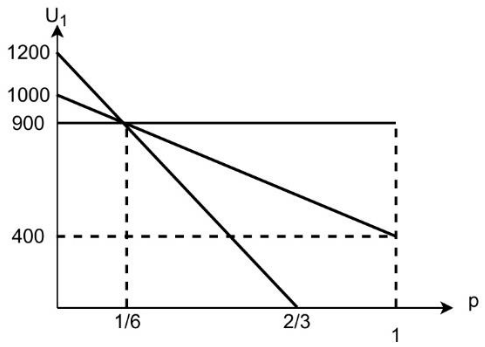
اگر اوکراین بخواهد بین حرکات خود ترکیب کند باید بین دو حرکت خود در مجموعه اطلاعاتی h بی‌تفاوت باشد، پس مطابق نامساوی قسمت قبل (این بار در حالت تساوی) باید $\mu = 0.6$ باشد. از آنجایی که روسیه نباید انگیزه تخطی داشته باشد:

		اوکراین	
		p	$1-p$
		D	S
روسیه	NA	900, 600	900, 600
	HA	400, -400	1000, 0
	LA	-600, 600	1200, 0

$$U_1(NA) = 900$$

$$U_1(HA) = 1000 - 600p$$

$$U_1(LA) = 1200 - 1800p$$



تنها تعادل منطبق بر عقاید (بیزی) که روسیه با احتمال 1 در خاک خود بماند و اوکراین بصورت غیربدیهی ترکیب کند به شرح زیر است:

$$\sigma_1 = NA, \sigma_2(D) = \left[\frac{1}{6}, 1\right), \mu(x_1|h) = 0.6$$

د)

برای این که روسیه بین حرکات خود ترکیب کند باید بین حرکات خود (حداقل دو حرکت) بی‌تفاوت باشد. با توجه به نمودار تقاطع هر منحنی U_1 در یک نقطه است و در نتیجه همین نقطه شرط جمله قبل را برآورده می‌کند و در $p = \frac{1}{6}$ هر سه حالت، مطلوبیت یکسان دارند و می‌توانند ترکیب شوند:

			اوکراین	
			D	S
روسیه	q_1	NA	900, 600	900, 600
	q_2	HA	400, -400	1000, 0
	$1 - q_1 - q_2$	LA	-600, 600	1200, 0

$$U_2(D) = 600q_1 - 400q_2 + 600(1 - q_1 - q_2) = 600 - 1000q_2$$

$$U_2(S) = 600q_1$$

$$U_2(D) = U_2(S) \rightarrow 600 = 600q_1 + 1000q_2 \rightarrow q_1 = 1 - \frac{5}{3}q_2$$

از طرفی طبق قانون بیز داریم:

$$\mu = \frac{\sigma_1(HA)}{\sigma_1(HA) + \sigma_1(LA)} = \frac{q_2}{q_2 + 1 - q_1 - q_2} = \frac{q_2}{1 - q_1} = 0.6 \rightarrow q_2 = 0.6 - 0.6q_1$$

که مشاهده می‌شود سازگار است.

در نتیجه تعادل بیزی که هر دو کشور ترکیب کنند به شرح زیر است:

$$\sigma_1(NA) = q, \sigma_1(HA) = 0.6 - 0.6q\ , q \in [0,1), \sigma_2(D) = \frac{1}{6}, \mu(x_1|h) = 0.6$$

ه)

باید بررسی کنیم کدام یک از تعادل‌های بیزی به‌دست‌آمده تعادل رشته‌ای نیز هستند. مجموعه تمام تعادل‌های بیزی بازی به شکل زیر است:

$$\sigma_1 = NA, \sigma_2 = D, \mu(x_1|h) = [0,0.6]$$

$$\sigma_1 = NA, \sigma_2(D) = \left[\frac{1}{6}, 1\right), \mu(x_1|h) = 0.6$$

$$\sigma_1(NA) = q, \sigma_1(HA) = 0.6 - 0.6q\ , q \in [0,1), \sigma_2(D) = \frac{1}{6}, \mu(x_1|h) = 0.6$$

برای **تعادل اول** که به شرح زیر است، از آنجایی که مجموعه اطلاعاتی h داخل مسیر تعادل نیست، باید تعادل رشته‌ای بودن را بررسی کرد.

$$\sigma_1 = NA, \sigma_2 = D, \mu(x_1|h) = [0,0.6]$$

برای $\mu(x_1|h) = (0,0.6]$ رشته حرکات را به شکل زیر می‌سازیم:

$$\tau_1^n(NA) = 1 - (m+1)\epsilon^n;\ \tau_1^n(HA) = \epsilon^n;\ \tau_1^n(LA) = m\epsilon^n;\ \tau_2^n(D) = 1 - \delta^n;\ \tau_2^n(S) = \delta^n$$

که m به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$m = \frac{1}{\mu} - 1$$

رشته حرکات τ^n به σ همگرا می‌شود. طبق قانون بیز خواهیم داشت:

$$\mu^n = \frac{\tau_1^n(HA)}{\tau_1^n(HA) + \tau_1^n(LA)} = \frac{\epsilon^n}{\epsilon^n + m\epsilon^n} = \frac{1}{m+1} = \mu$$

حرکات τ^n باورهای μ^n را القا می‌کند (توسط قانون بیز) و به ارزیابی (σ, μ) همگرا است. بنابراین این تعادل، تعادل رشته‌ای است.

برای $\mu(x_1|h) = 0$ رشته حرکات را به شکل زیر می‌سازیم:

$$\tau_1^n(NA) = 1 - \epsilon^n - \epsilon^{2n};\ \tau_1^n(HA) = \epsilon^{2n};\ \tau_1^n(LA) = \epsilon^n;\ \tau_2^n(D) = 1 - \delta^n;\ \tau_2^n(S) = \delta^n$$

رشته حرکات τ^n به σ همگرا می‌شود. طبق قانون بیز خواهیم داشت:

$$\mu^n = \frac{\tau_1^n(HA)}{\tau_1^n(HA) + \tau_1^n(LA)} = \frac{\epsilon^{2n}}{\epsilon^{2n} + \epsilon^n} \to 0$$

حرکات τ^n باورهای μ^n را القا می‌کند (توسط قانون بیز) و به ارزیابی (σ, μ) همگرا است. بنابراین این تعادل، تعادل رشته‌ای است.

برای **تعادل دوم** که به شرح زیر است، از آنجایی که مجموعه اطلاعاتی h داخل مسیر تعادل نیست، باید تعادل رشته‌ای بودن را بررسی کرد.

$$\sigma_1 = NA, \sigma_2(D) = \left[\frac{1}{6}, 1\right), \mu(x_1|h) = 0.6$$

$$\tau_1^n(NA) = 1 - (m+1)\epsilon^n;\ \tau_1^n(HA) = \epsilon^n;\ \tau_1^n(LA) = m\epsilon^n;\ \tau_2^n(D) = \sigma_2(D) - \delta^n;\ \tau_2^n(S) = \sigma_2(S) + \delta^n$$

که m به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$m = \frac{1}{\mu} - 1 = \frac{2}{3}$$

رشته حرکات τ^n به σ همگرا می‌شود. طبق قانون بیز خواهیم داشت:

$$\mu^n = \frac{\tau_1^n(HA)}{\tau_1^n(HA) + \tau_1^n(LA)} = \frac{\epsilon^n}{\epsilon^n + m\epsilon^n} = \frac{1}{m+1} = \mu = 0.6$$

حرکات τ^n باورهای μ^n را القا می‌کند (توسط قانون بیز) و به ارزیابی (σ, μ) همگرا است. بنابراین این تعادل، تعادل رشته‌ای است.

برای **تعادل سوم** که به شرح زیر است، از آنجایی که تمام مجموعه‌های اطلاعاتی داخل مسیر تعادل هستند و تعادل به‌دست‌آمده عقلایی رشته‌ای است، پس این تعادل، تعادل رشته‌ای نیز است:

$$\sigma_1(NA) = q, \sigma_1(HA) = 0.6 - 0.6q\ , q \in [0,1), \sigma_2(D) = \frac{1}{6}, \mu(x_1|h) = 0.6$$

در نتیجه مجموعه تعادل‌های رشته‌ای به شرح زیر است:

$$\sigma_1 = NA, \sigma_2 = D, \mu(x_1|h) = [0,0.6]$$

$$\sigma_1 = NA, \sigma_2(D) = \left[\frac{1}{6}, 1\right), \mu(x_1|h) = 0.6$$

$$\sigma_1(NA) = q, \sigma_1(HA) = 0.6 - 0.6q\ , q \in [0,1), \sigma_2(D) = \frac{1}{6}, \mu(x_1|h) = 0.6$$