

امتحان میان ترم دوم، اصول نظریه بازی‌ها

بهار 1401 – محمدحسین رحمتی

زمان امتحان 120 دقیقه است

1. (مبادله) دو بازیگر خریدار (B) و فروشنده (S) را فرض کنید که یک کالا را می‌خواند مبادعه کنند. هر بازیگر دارای یک اطلاعات نهانی در خصوص ارزش آن کالا برای خود است. فرض کنید ارزش کالا برای خریدار را با θ_B و برای فروشنده را با θ_S نشان دهیم. هر کدام از این ارزش‌های نهانی و شخصی خریدار و فروشنده بصورت مستقل و مجزا از توزیع احتمالی یکنواخت $U[0,1]$ برداشت شده است. کالا بر اساس قاعده زیر توزیع می‌شود.

هر دو بازیگر بصورت همزمان قیمت‌های P_B و P_S را به ترتیب خریدار و فروشنده پیشنهاد می‌دهند. بنابراین حرکت هر بازیگر بصورت همزمان یک عدد است که اعلام می‌کند. اگر $P_S \geq P_B$ باشد یعنی قیمتی که فروشنده طلب می‌کند بیشتر از قیمتی باشد که خریدار آمادگی پرداخت دارد، هیچ مبادله‌ای رخ نمی‌دهد و کالا در اختیار فروشنده می‌ماند. در صورتیکه $P_B > P_S$ در این صورت خریدار حاضر از قیمتی بیشتر از قیمت مورد تقاضای فروشنده بگوید و در نتیجه کالا به خریدار داده می‌شود و وی متوسط قیمت‌های اعلامی یعنی $\frac{P_B + P_S}{2}$ را به فروشنده می‌پردازد. بنابراین اگر $P_S \geq P_B$ باشد مطلوبیت خریدار صفر و اگر $P_B > P_S$ باشد مطلوبیت خریدار $\theta_B - \frac{P_B + P_S}{2}$ است. مطلوبیت فروشنده θ_S اگر $P_S \geq P_B$ باشد و اگر $P_B > P_S$ باشد مطلوبیت فروشنده $\frac{P_B + P_S}{2}$ است

(الف) آیا تعادلی وجود دارد که خریدار و فروشنده مقادیر $P_S = \theta_S$ و $P_B = \theta_B$ را اعلام کنند؟ توضیح دهید!

(ب) بر اساس سازوکار فوق آیا تعادل منطبق بر عقاید، تعادل بیزی، وجود دارد که خریدار زمانیکه مطلوبیت بیشتری دارد، همواره کالا را بدست آورد؟

(ج) آیا سازوکار فوق تعادل بیزی در قالب راهبردهای خطی محض دارد؟ راهبردهای این تعادل را بدست آورید یا اثبات کنید وجود ندارد! راهبرد خطی هر بازیگر بصورت $P_B = b + \beta\theta_B$ و $P_S = s + \gamma\theta_S$ است که b, β, s, γ پارامترهایی است که اگر ادعا می‌کنند تعادل بیزی با راهبرد خطی وجود دارد باید بدست آورید یا اثبات کنید چنین تعادلی وجود ندارد!

2. (جنگ اوکراین و روسیه) روسیه در نوامبر سال 2021 دارد سبک-سنگین می‌کند که به اوکراین حمله کند یا خیر! روسیه سه گزینه برای انتخاب دارد (1) تجهیزات قوی نظامی برای جنگ و گرفتن اوکراین ارسال کند (2) تجهیزات نظامی ضعیف را برای حمله بفرستد (3) حمله نکند و در خانه بماند. تجهیزات قوی و سنگین هزینه بیشتری از تجهیزات ضعیف دارد ولی احتمال برنده شدن در جنگ را افزایش می‌دهد. اگر روسیه تصمیم به حمله بگیرد، اوکراین دو تصمیم دارد. اوکراین می‌تواند روی موضع قبلی خود بایستد و پیوستن به ناتو را پیگیری کند و در نتیجه باید با روسیه بجنگد. تصمیم دوم اوکراین آن است که تسلیم شود و رسماً اعلام کند که قصد پیوستن به ناتو را ندارد. در این صورت حتماً آلمان داوطلبانه میانجیگری خواهد کرد و عملاً کشور اوکراین از آسیب در امان خواهد ماند. نکته کلیدی آن است که در زمان حمله روسیه، برای اوکراین مشخص نیست قدرت نظامی روسیه چقدر است و آیا تجهیزات قوی نظامی را برای جنگ ارسال کرده و یا تجهیزات ضعیف را ارسال کرده است. اینکه اوکراین نمی‌داند قدرت تجهیزات روسیه چقدر است برای همه دانسته است و همچنین پیامدهای بازی که به شرح زیر است:

اگر روسیه در خاک خودش بماند برای وی 900 و برای اوکراین 600 ارزش دارد.

اگر روسیه با تجهیزات مدرن و قوی حمله کند و اوکراین بجنگد مطلوبیت‌ها برای روسیه 400 و برای اوکراین 400- است.

اگر روسیه با تجهیزات ضعیف حمله کند و اوکراین بجنگد مطلوبیت‌ها به ترتیب 600- و 600 است.

اگر روسیه تجهیزات قوی را ارسال کند و اوکراین تسلیم شود مطلوبیت‌ها به ترتیب 1000 و 0 است.

اگر روسیه تجهیزات ضعیف را ارسال کند و اوکراین تسلیم شود مطلوبیت‌ها به ترتیب 1200 و 0 است.

(الف) بازی درختی این بازی را ترسیم کنید.

(ب) تمام تعادل‌های منطبق بر عقاید (بیزی) در مجموعه حرکات محض را پیدا کنید!

(ج) تعادل منطبق بر عقاید (بیزی) را پیدا کنید که روسیه با احتمال 1 در خاک خود بماند و اوکراین بصورت غیربدهی ترکیب کند!

(د) تعادل بیزی را بیابید که هر دو کشور ترکیب کنند؟

(ه) تمام تعادل‌های رشته‌ای این بازی را بیابید؟