پاسخنامه اولین میان‌ترم 2 درس نظریه بازی‌ها بهار 1401

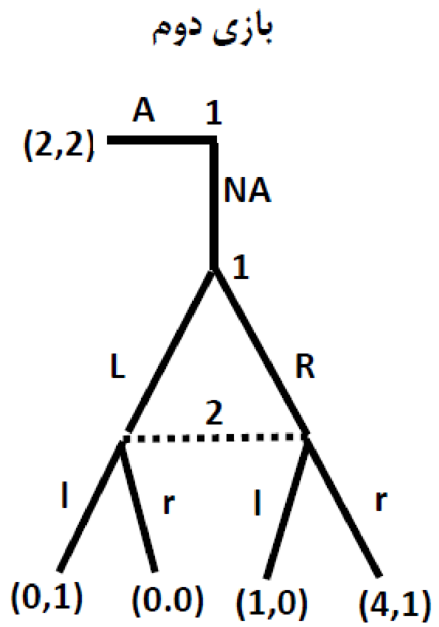
استاد درس: دکتر محمد حسین رحمتی

نویسندگان: سعید حجتی نژاد و محمدصدرا حیدری

سوال 1

برای یافتن مجموعه تعادل‌های رشته‌ای ابتدا تعادل‌های نش کامل زیربازی‌ها را پیدا می‌کنیم. سپس مجموعه تعادل‌های بیزی را پیدا می‌کنیم و از آن به مجموعه تعادل‌های رشته‌ای می‌رسیم.

ابتدا برای بازی اول که نمایش درختی زیر را دارد:

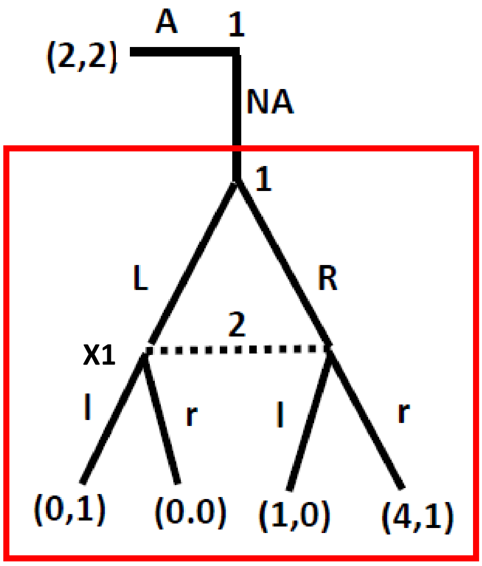


نمایش جدولی بازی به شکل زیر خواهد بود:

	l	r
AR	2 , 2	2 , 2
AL	2 , 2	2 , 2
NR	1 , 0	4 , 1
NL	0 , 1	0 , 0

برای آن که در تعادل کامل زیربازی‌ها هم باشند باید در زیربازی زیر هم تعادل باشند. در نتیجه:

بازی دوم



	l	r
L	0 , 1	0 , 0
R	1 , 0	4 , 1

تنها تعادل این زیربازی به شرح زیر است:

$$\sigma_1 = R \,, \sigma_2 = r$$

مجموعه تعادل‌های محض بازی به شرح زیر است:

$$\sigma_1 = AL \,, \sigma_2 = l$$

$$\sigma_1 = AR \,, \sigma_2 = l$$

$$\sigma_1 = NR \,, \sigma_2 = r$$

اما تنها تعادل (محض و ترکیبی) کامل زیربازی‌ها در این بازی درختی به شرح زیر است:

$$\sigma_1 = NR \,, \sigma_2 = r$$

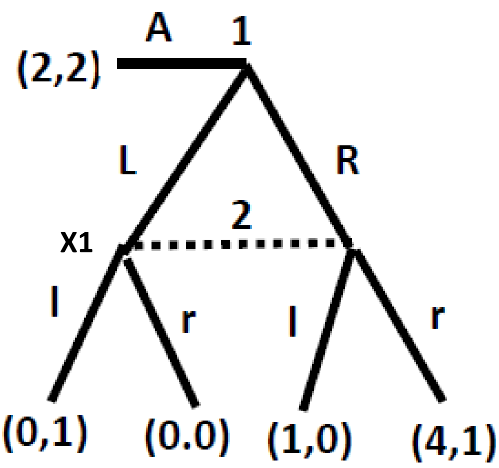
که تعادل بیزی آن به شرح زیر است:

$$\sigma_1 = NR, \sigma_2 = r, \mu(x_1|h) = 0$$

چون تمام مجموعه‌های اطلاعاتی داخل مسیر تعادل هستند و تعادل عقلایی رشته‌ای است، پس این تعادل، تعادل رشته‌ای نیز است.

حال برای بازی درختی دوم که به شرح زیر است:

بازی اول



نمایش جدولی بازی به شکل زیر است.

		بازیگر دوم	
		l	r
بازیگر اول	A	2 , 2	2 , 2
	L	0 , 1	0 , 0
	R	1 , 0	4 , 1

تعادل‌های نش محض بازی به شرح زیر هستند:

$$\sigma_1 = A\,, \sigma_2 = l$$

$$\sigma_1 = R\,, \sigma_2 = r$$

در تعادل اول برای آن که تعادل بیزی باشد باید باور بازیگر دوم به نحوی باشد که عقلایی رشته‌ای باشد. اگر $\mu(x_1|h) = \mu$:

$$\mu U_2(L,l) + (1-\mu)U_2(R,l) \geq \mu U_2(L,r) + (1-\mu)U_2(R,r)$$

$$\rightarrow \mu \geq 1-\mu \rightarrow\ 2\mu \geq 1 \rightarrow \mu \geq 0.5$$

پس مجموعه تعادل‌های بیزی بازی در مجموعه حرکات محض به شکل زیر است:

$$\sigma_1 = A, \sigma_2 = l, \mu(x_1|h) = [0.5,1]$$

$$\sigma_1 = R, \sigma_2 = r, \mu(x_1|h) = 0$$

اگر بازیگر دوم بخواهد بین حرکات خود ترکیب کند باید بین دو حرکت خود در مجموعه اطلاعاتی h بی‌تفاوت باشد، پس مطابق نامساوی قسمت قبل (این بار در حالت تساوی) باید $\mu = 0.5$ باشد. از آنجایی که حرکت L برای بازیگر اول اکیدا مغلوب است:

			بازیگر دوم	
			p	$1-p$
			l	r
بازیگر اول	$1-q$	A	2 , 2	2 , 2
	0	L	0 , 1	0 , 0
	q	R	1 , 0	4 , 1

$$U_1(A) = 2$$

$$U_1(L) = 0$$

$$U_1(R) = 4 - 3p$$

$$U_2(l) = 2 - 2q$$

$$U_2(r) = 2 - q$$

تنها تعادل منطبق بر عقاید (بیزی) ترکیبی بازی به شرح زیر است:

$$\sigma_1 = A, \sigma_2(l) = \left[\frac{2}{3}, 1\right), \mu(x_1|h) = 0.5$$

باید بررسی کنیم کدام یک از تعادل‌های بیزی به‌دست‌آمده تعادل رشته‌ای نیز هستند. مجموعه تمام تعادل‌های بیزی بازی به شکل زیر است:

$$\sigma_1 = A, \sigma_2 = l, \mu(x_1|h) = [0.5,1]$$

$$\sigma_1 = A, \sigma_2(l) = \left[\frac{2}{3}, 1\right), \mu(x_1|h) = 0.5$$

$$\sigma_1 = R, \sigma_2 = r, \mu(x_1|h) = 0$$

برای **تعادل اول** که به شرح زیر است، از آنجایی که مجموعه اطلاعاتی h داخل مسیر تعادل نیست، باید تعادل رشته‌ای بودن را بررسی کرد.

$$\sigma_1 = A, \sigma_2 = l, \mu(x_1|h) = [0.5,1]$$

برای $\mu(x_1|h) = [0.5,1)$ رشته حرکات را به شکل زیر می‌سازیم:

$$\tau_1^n(N) = 1 - (m+1)\epsilon^n;\ \tau_1^n(L) = \epsilon^n;\ \tau_1^n(R) = m\epsilon^n;\ \tau_2^n(l) = 1 - \delta^n;\ \tau_2^n(r) = \delta^n$$

که m به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$m = \frac{1}{\mu} - 1$$

رشته حرکات τ^n به σ همگرا می‌شود. طبق قانون بیز خواهیم داشت:

$$\mu^n = \frac{\tau_1^n(L)}{\tau_1^n(R) + \tau_1^n(L)} = \frac{\epsilon^n}{\epsilon^n + m\epsilon^n} = \frac{1}{m+1} = \mu$$

حرکات τ^n باورهای μ^n را القا می‌کند (توسط قانون بیز) و به ارزیابی (σ, μ) همگرا است. بنابراین این تعادل، تعادل رشته‌ای است.

برای $\mu(x_1|h) = 1$ رشته حرکات را به شکل زیر می‌سازیم:

$$\tau_1^n(N) = 1 - \epsilon^n - \epsilon^{2n};\ \tau_1^n(R) = \epsilon^{2n};\ \tau_1^n(L) = \epsilon^n;\ \tau_2^n(D) = 1 - \delta^n;\ \tau_2^n(S) = \delta^n$$

رشته حرکات τ^n به σ همگرا می‌شود. طبق قانون بیز خواهیم داشت:

$$\mu^n = \frac{\tau_1^n(L)}{\tau_1^n(R) + \tau_1^n(L)} = \frac{\epsilon^n}{\epsilon^n + \epsilon^{2n}} \to 1$$

حرکات τ^n باورهای μ^n را القا می‌کند (توسط قانون بیز) و به ارزیابی (σ, μ) همگرا است. بنابراین این تعادل، تعادل رشته‌ای است.

برای **تعادل دوم** که به شرح زیر است، از آنجایی که مجموعه اطلاعاتی h داخل مسیر تعادل نیست، باید تعادل رشته‌ای بودن را بررسی کرد.

$$\sigma_1 = A, \sigma_2(l) = \left[\frac{2}{3}, 1\right), \mu(x_1|h) = 0.5$$

$$\tau_1^n(N) = 1 - (m+1)\epsilon^n;\ \tau_1^n(L) = \epsilon^n;\ \tau_1^n(R) = m\epsilon^n;\ \tau_2^n(l) = \sigma_2(l) - \delta^n;\ \tau_2^n(r) = \sigma_2(r) + \delta^n$$

که m به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$m = \frac{1}{\mu} - 1 = 1$$

رشته حرکات τ^n به σ همگرا می‌شود. طبق قانون بیز خواهیم داشت:

$$\mu^n = \frac{\tau_1^n(L)}{\tau_1^n(R) + \tau_1^n(L)} = \frac{\epsilon^n}{\epsilon^n + m\epsilon^n} = \frac{1}{m+1} = \mu = 0.5$$

حرکات τ^n باورهای μ^n را القا می‌کند (توسط قانون بیز) و به ارزیابی (σ, μ) همگرا است. بنابراین این تعادل، تعادل رشته‌ای است.

برای **تعادل سوم** که به شرح زیر است، از آنجایی که تمام مجموعه‌های اطلاعاتی داخل مسیر تعادل هستند و تعادل به‌دست‌آمده عقلایی رشته‌ای است، پس این تعادل، تعادل رشته‌ای نیز است:

$$\sigma_1 = R, \sigma_2 = r, \mu(x_1|h) = 0$$

در نتیجه مجموعه تعادل‌های رشته‌ای به شرح زیر است:

$$\sigma_1 = A, \sigma_2 = l, \mu(x_1|h) = [0.5, 1]$$

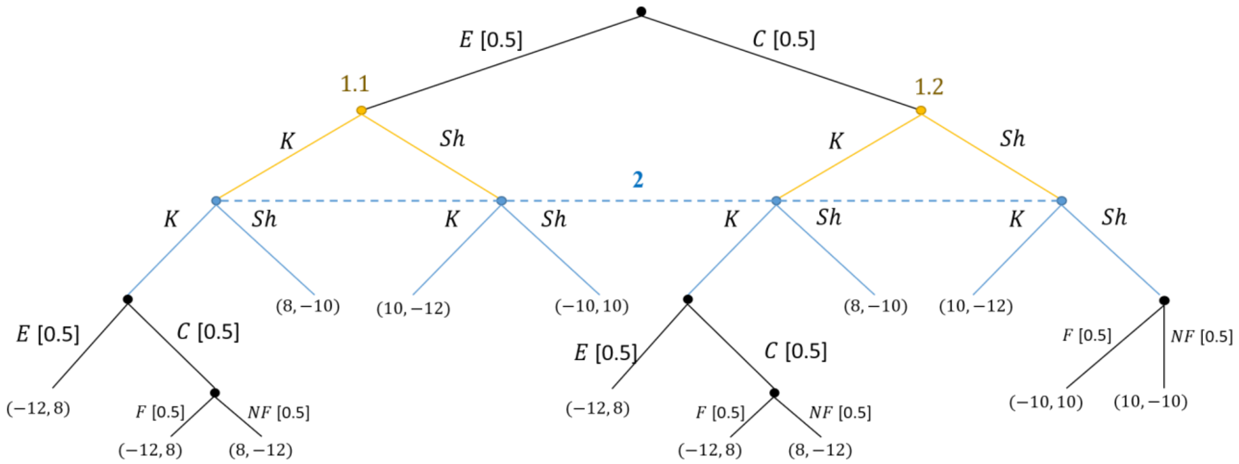
$$\sigma_1 = A, \sigma_2(l) = \left[\frac{2}{3}, 1\right), \mu(x_1|h) = 0.5$$

$$\sigma_1 = R, \sigma_2 = r, \mu(x_1|h) = 0$$

علت تفاوت در تعادل‌های رشته‌ای این است که این دو بازی در واقع دو بازی مختلف هستند و دو نمایش مختلف از یک بازی نیستند. در حالت اول بازیگر اول یک زیربازی مناسب دارد و در دو مرحله بازی می‌کند و در تعادل باید در تمام زیربازی‌ها هم در تعادل رفتار کند. اما در بازی دوم بازیگر اول در یک مرحله و بین سه حرکت خود انتخاب می‌کند و زیربازی مناسب دیگری به غیر از کل بازی ندارد که لازم باشد در آن هم به صورت بهینه رفتار کند.

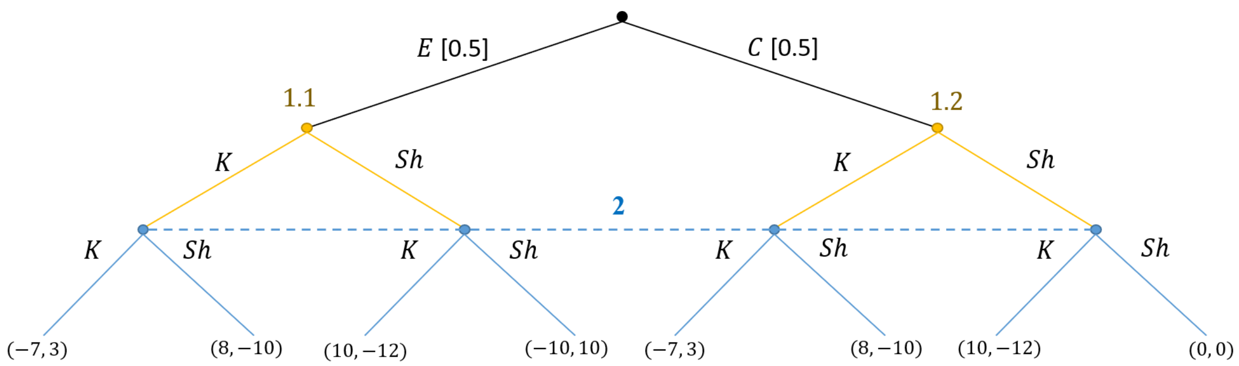
سوال 2

قسمت الف)



در نمایش درختی بالا، یال‌های سیاه‌رنگ تصمیم طبیعت، زردرنگ تصمیم مریم، و آبی رنگ تصمیم فاطمه را نمایش می‌دهد. ابتدا طبیعت شلوغ بودن (C) یا نبون (E) مترو شریف را مشخص کرده و مریم از آن آگاه می‌شود. سپس مریم در دو گره تصمیم‌گیری 1.1 و 1.2 بین رفتن به سمت کرج (K) و یا برگشت به شریف (Sh) انتخاب می‌کند. در این مرحله فاطمه که هیچ دانشی از تصمیم مریم و طبیعت ندارد نیز بین رفتن به سمت کرج یا شریف انتخاب می‌کند. در ادامه اگر مریم و فاطمه به ایستگاه‌های متفاوت رفته باشند بازی تمام شده و مریم برنده می‌شود. اگر هر دو به سمت شریف حرکت‌کنند و شریف خلوت باشد فاطمه برنده و در صورت شلوغ بودن ایستگاه شریف، فاطمه با احتمال نیم می‌تواند مریم را بگیرد. در صورتی که هر دو به‌سمت کرج حرکت کنند، طبیعت شلوغ بودن یا نبودن ایستگاه را مشخص کرده و مانند شریف، برد مریم و فاطمه مشخص می‌شود.

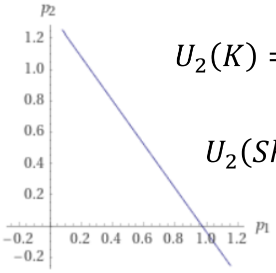
از آنجا که بعد از تصمیم فاطمه، سایر رخدادها توسط طبیعت مشخص می‌شود، می‌تواند امیدریاضی مطلوبیت بازیگرها را حساب کرده و نمایش درختی بازی را به شرح زیر ساده کرد.



قسمت ب)

به راحتی می‌توان استدلال کرد تعادلی که در آن بازیگرها حرکت محض بازی‌کنند وجود ندارد. چرا که اولاً به واسطه جمع صفر بودن پیامدهای بازی، هیچ تعادلی که در آن هر دو بازیگر محض بازی کنند وجود نخواهد داشت و از طرف دیگر اگر یکی از بازیگرها محض بازی کند، بازیگر دیگر حرکت غالب داشته و ترکیب نخواهد کرد. بنابراین هیچ تعادلی که در آن استراتژی کاملاً محض بازی شود نداریم.

حال برای پیدا کردن تعادل‌های ترکیبی، ابتدا از بی‌تفاوت کردن فاطمه شروع می‌کنیم. فرض می‌کنیم مریم در گره ***۱.۱*** با احتمال p_1 و در گره 1.2 با احتمال p_2 به سمت ایستگاه کرج حرکت می‌کند. در این صورت مطلوبیت فاطمه از حرکاتش برابر است با:



$$U_2(K) = \frac{1}{2}(15p_1 - 12) + \frac{1}{2}(15p_2 - 12) = \frac{15}{2}(p_1 + p_2) - 12$$

$$U_2(Sh) = \frac{1}{2}(10 - 20p_1) + \frac{1}{2}(-10p_2) = 5 - 5(2p_1 + p_2)$$

بنابراین:

$$U_2(K) = U_2(Sh) \implies 25p_2 = 34 - 35p_1$$

درنتیجه به‌ازای هر p_1 و p_2 کوچکتر از ۱ که در معادلهٔ بالا صدق کند، فاطمه میان رفتن به ایستگاه کرج یا شریف بی‌تفاوت خواهد شد.

حال برای بی‌تفاوت کردن مریم، فرض می‌کنیم فاطمه با احتمال q به ایستگاه کرج می‌رود. به‌ازای حرکات طبیعت داریم:

- ایستگاه شریف خلوت (E) باشد:

$$\begin{matrix} U_1(K|E) = 8 - 15q \\ U_1(Sh|E) = 20q - 10 \end{matrix} \Rightarrow q = \frac{18}{35}$$

- ایستگاه شریف شلوغ (C) باشد:

$$\begin{matrix} U_1(K|C) = 8 - 15q \\ U_1(Sh|C) = 10q \end{matrix} \Rightarrow q = \frac{8}{25}$$

نتایج بالا نشان می‌دهد به‌ازای هر حرکت ترکیبی فاطمه، مریم حداکثر در یکی از گره‌های تصمیم‌گیری‌اش ترکیب می‌کند و در گره دیگر حرکت محض بازی خواهد کرد. همچنین قبل‌تر رابطه میان حرکات ترکیبی مریم را نشان دادیم. به کمک نمودار رسم‌شده برای حرکات ترکیبی مریم به راحتی می‌توان دید تنها حالتی که در شرایط سؤال صدق می‌کند زمانی است که $p_2 = 1$ و در نتیجه $p_1 = \frac{34-25}{35} = \frac{9}{35}$ باشد. بنابراین تنها تعادل بازی به شرح زیر است:

$$1.1{:}\left\{\frac{9}{35}, \frac{26}{35}\right\} \quad 1.2{:}\{1, 0\} \quad 2{:}\left\{\frac{18}{35}, \frac{17}{35}\right\}$$

در این حالت باور فاطمه برای حضور در گره‌ها به ترتیب از چپ به راست برابراست با: $\left\{\frac{1}{2} \times \frac{9}{35}, \frac{1}{2} \times \frac{26}{35}, \frac{1}{2}, 0\right\}$

که باور فاطمه بر اساس قانون بیز با حرکاتش در تعادل سازگار بوده و تعادل موجود یک تعادل عقلایی رشته‌ای و بیزی است.