نظریه‌ی بازی‌ها

حسن ابوذرپور

امتحان میان‌ترم دوم - پاسخنامه

سؤال ۱:

a) راهبردهای هر بازیگر به شرح زیر می‌باشد.

بازیگر ۱ انتخاب‌های $\{(NT,B),(T,B),(NT,M),(T,M)\}$ را پیش روی خود می‌بینند. بازیگر ۲ نیز انتخاب‌های $\{(R,L)\}$ و بازیگر ۳ انتخاب‌های $\{(D,U)\}$ را پیش رو دارند.

بازیگر ۳: U

بازیگر ۱ \ بازیگر ۲	R	L
NT,B	(1,2,2)	(2,0,0)
T,B	(3,1,1)	(3,1,1)
NT,M	(1,2,2)	(0,0,0)
T,M	(3,1,1)	(3,1,1)

بازیگر ۳: D

بازیگر ۱ \ بازیگر ۲	R	L
NT,B	(1,2,2)	(2,0,0)
T,B	(0,0,0)	(0,0,0)
NT,M	(1,2,2)	(1,1,1)
T,M	(0,0,0)	(0,0,0)

(b

بازیگر ۳: U

بازیگر ۱ \ بازیگر ۲	R	L
NT,B	(1,2,2)	(2,0,0)
T,B	(3,1,1)	(3,1,1)
NT,M	(1,2,2)	(0,0,0)
T,M	(3,1,1)	(3,1,1)

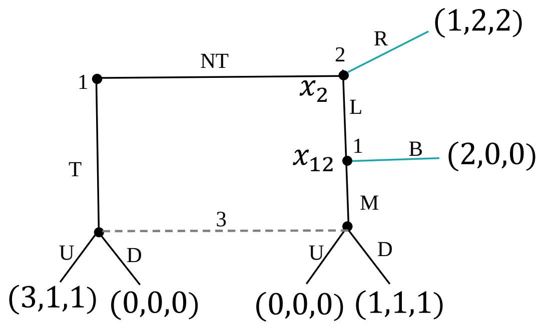
بازیگر ۳: D

بازیگر ۱ \ بازیگر ۲	R	L
NT,B	(1,2,2)	(2,0,0)
T,B	(0,0,0)	(0,0,0)
NT,M	(1,2,2)	(1,1,1)
T,M	(0,0,0)	(0,0,0)

همانطور که مشخص است این بازی دارای ۶ تعادل نش محض می‌باشد که عبارتند از :

$\{(NT,B),R,D\},\{(NT,M),R,D\}$
$,\{(T,B),R,U\},\{(T,M),R,U\},\{(T,B),L,U\},\{(T,M),L,U\}$

c) این بازی، یک زیر بازی دارد که آن هم معادل کل بازی است. لذا هر ۶ تعادل نش مرحله گذشته تعادل کامل زیربازی نیز تلقی می‌شوند.



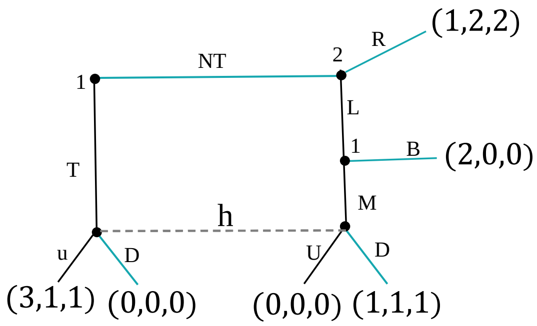
همانطور که در فرم جدولی مشخص شده است. در گره x_2 بازیگر دوم انتخاب R را به L ترجیح می‌دهد. لذا تعادل‌های لذا تعادل‌های $\{(T,B),L,U\},\{(T,M),L,U\}$ رشته‌ای عقلایی نیستند. بعلاوه درگره x_{12} بازیگر ۱ انتخاب B را به M ترجیح می‌دهد. پس تعادل‌های $\{(NT,M),R,D\},\{(T,M),R,U\}$ نیز رشته‌ای عقلایی تلقی نمی‌شوند چراکه باور بازیگر ۱ را زیر سوال می‌برند. لذا این تعادل‌ها بیزی نیستند.

(d

در ابتدا بیزی بودن دو تعادل دیگر را بررسی می‌کنیم. $\{(NT,B),R,D\}$ و $\{(T,B),R,U\}$

همانطور که در قسمت قبل توضیح داده شد این دو تعادل تنها تعادل‌های عقلایی رشته‌ای هستند. برای بیزی بودن باید باورهای سازگار آن‌هارا تعیین کنیم.

تعادل . $\{(NT,B),R,D\}$ را در نظر بگیرید.



$$\mu(x_{31}|h)(1) + \left(1-\mu(x_{31}|h)\right)(0) < \mu(x_{31}|h)(0) + \left(1-\mu(x_{31}|h)\right)(1)$$

$$\mu(x_{31}|h) < \frac{1}{2}$$

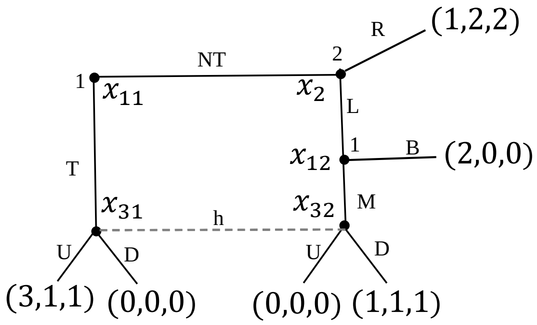
پس تعادل بیزی می‌باشد. همچنین اگر$(\alpha > 1)$ $\sigma_1(T) = \epsilon^{2n}, \sigma_1(M) = \epsilon^n, \sigma_1(L) = \alpha\epsilon^n$
داریم:

$$\mu(x_{31}|h) = \frac{\epsilon^{2n}}{\epsilon^{2n} + (1-\epsilon^{2n})\alpha\epsilon^n\epsilon^n}$$

$$\xrightarrow{\alpha>1} \mu(x_{31}|h) < 1$$

که سازگار می‌باشد. لذا این تعادل رشته‌ای نیز است. برای تعادل $\{(T,B),R,U\}$ نیز به همین صورت می‌توانیم عمل کنیم که این تعادل هم رشته‌ای خواهد بود. لذا تعادل بیزی که رشته‌ای نباشد وجود ندارد.

e)



برای بیزی قوی بودن در جایی که امکان استفاده از قانون بیز وجود دارد، آن را اعمال می‌کنیم. تعادل $\{(T,B),R,U\}$ چون $\{\mu(x_{31}|h)\}$=1 در مسیر تعادل است پس بیزی قوی است. برای تعادل . $\{(NT,B),R,D\}, \mu(x_{31}|h)\epsilon[0,\frac{1}{2}]$ نیز داریم:

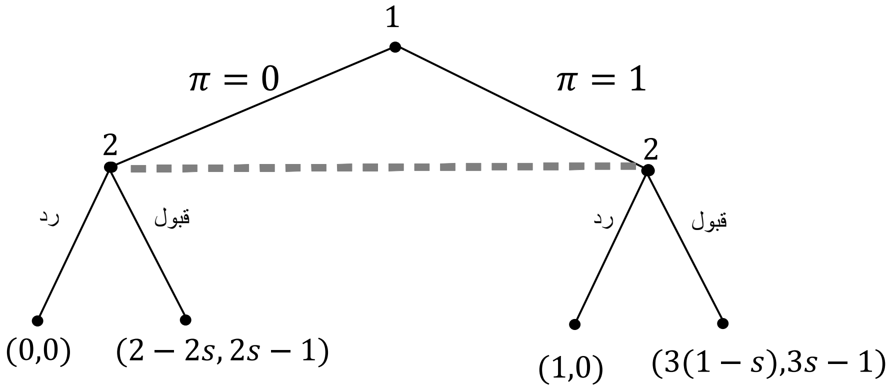
$$\mu(x_{31}|h) = \frac{\sigma_1(T)}{\sigma_1(T) + \sigma_1(N)\sigma_2(L)\sigma_1(M)} = \frac{1}{2}$$

لذا تعادل بیزی که بیزی قوی نباشد نداریم.

f) تعادل $\{(T,B),R,U\}$ یک تعادل رشته‌ای به حساب می‌آید اما تعادل رشته‌ای نیست. چرا که برای نمونه اگر بازیگر ۱ در گره x_{11} اگر اعوجاجی ایجاد کند و به اصطلاح دستش بلغزد بازیگر ۲ باور نمی‌کند که او می‌خواسته به تعادل $\{(NT,M),R,D\}$ برود. دقت کنید که انتخاب‌های L,M اکیدا مغلوب نیستند و نمی‌توان ادعا کرد که بازیگر ۱ هرگز آن را انتخاب نخواهد کرد

سؤال ۲:

a)



مطلوبیت فرد ۲ ناشی از رد و قبول کردن را نوشته و بایکدیگر مقایسه می‌کنیم. دقت شود که در این قسمت مستقل از باور فرد ۲ نسبت به بازیگر ۱ اتفاق می‌افتد و از احتمال $\frac{1}{2}$ طبیعت نمی‌توان بهره برد.

$$U_2(\text{رد}) = 0$$

$$U_2(\text{قبول}) = P(2S-1) + (1-P)(3S-1) = 2PS - P + 3S - 3PS - 1 + P =$$

$$= S(3-P) - 1$$

برای قبول کردن باید :

$$U_2(\text{رد}) < U_2(\text{قبول})$$

$$S4$$

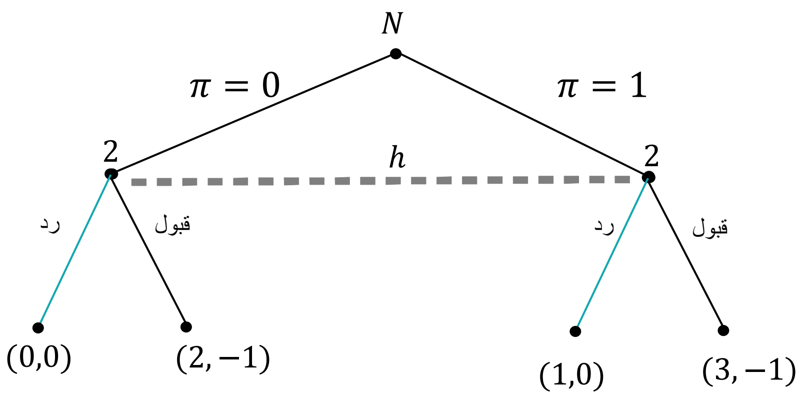
$$1$$

$$] - 1 > 0 \xrightarrow{P \le 1} 2S - 1 > 0 \longrightarrow S > \frac{1}{2}$$

پس بازیگر ۲ مستقل از باوری که از بازیگر ۱ دارد، هر پیشنهاد به ازای $S > \frac{1}{2}$ را قبول می‌کند.

(b

چنانچه $S = 0$ باشد، خواهیم داشت:



رد کردن اکیدا غالب است، لذا به ازای هر باوری که در h وجود دارد، اما دقت شود که در این حالت بازیگر ۱ انگیزه تخطی دارد. چرا که می‌تواند با تغییر پیشنهاد به نحوی که بازیگر ۲ قبول کند، وضعیت خود را بهبود ببخشد.

(c

برای آن‌که بازیگر ۲ پیشنهاد را قبول کند باید داشته باشیم:

$$\frac{1}{2}(2S-1) + \frac{1}{2}(3S-1) > 0 \longrightarrow S > \frac{2}{5}$$

لذا باید $S > \frac{2}{5}$ باشد.

اما توجه شود که شرط بیزی بودن تعادل به معنای سازگاری باورها می‌باشد. لذا بازیگر ۱ با این باور که بازیگر ۲ پیشنهاد را قبول می‌کند، پیشنهاد S را می‌دهد. لذا باید:

$$2-2s \geq 0 \longrightarrow S \leq 1, 3-3S \geq 1 \longrightarrow S \leq \frac{2}{3}$$

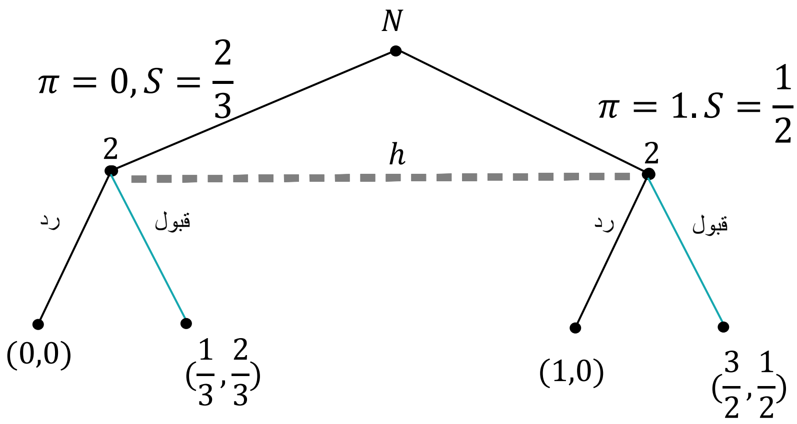
لذا تعادل بیزی محضی که به ازای سهم یکسان در دونوع بازیگر ۱، مورد قبول بازیگر ۲ باشد در حالت زیر رخ می‌دهد.

$$\frac{2}{5} < S \leq \frac{2}{3}$$

دقت شود که بازیگر ۲ باوری مبنی بر احتمال هر حالت برابر نیم را دارد. اما سوددهی شرکت برای بازیگر ۱ اطلاعات مخفی است و باید در هر حالت جداگانه بررسی را انجام دهد.

(d

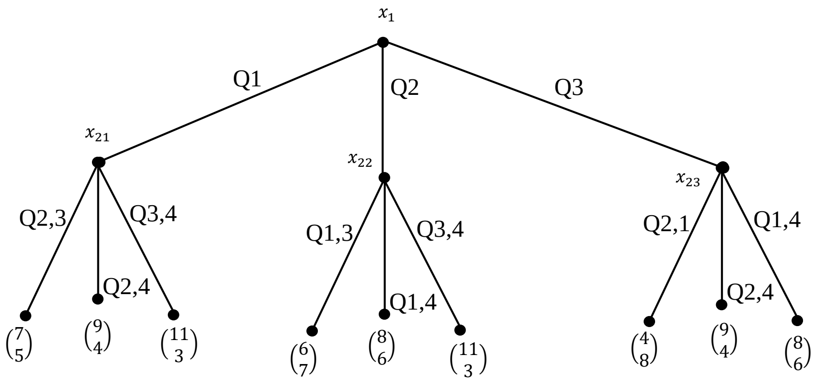
فرض کنید در حالتی که سود صفر باشد، بازیگر ۱ پیشنهاد $S = \frac{2}{3}$, و درحالتی که سود برابر ۱ است پیشنهاد $S = \frac{1}{2}$را به بازیگر دوم دهد. در اینصورت خواهیم داشت:



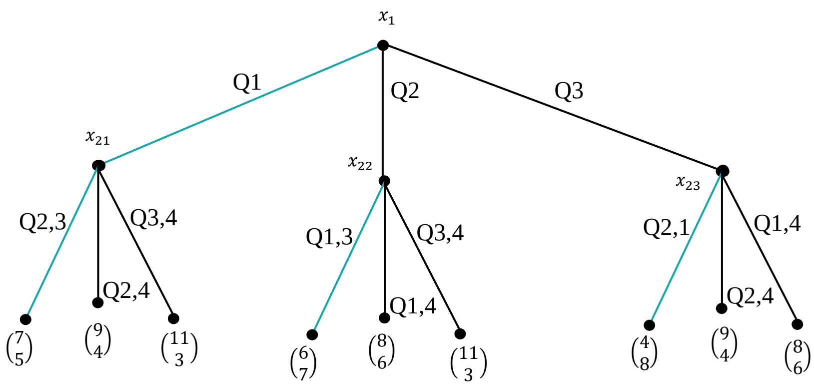
همچنین از آنجاکه بازیگر ۱ باور دارد که بازیگر ۲ پیشنهاد را قبول می‌کند، لذا پیشنهادی را ارائه می‌دهد که خود را در وضعیت بهتری بیابد و این به معنی سازگاری باورها می‌باشد.

سؤال ۳

a) بدون کاستن از کلیات مساله، از آنجا که کالای ۴ برای هر دو بازیگر کمترین مطلوبیت را دارد، واضح است که انتخاب اول بازیگر ۱ نمی‌تواند کالای ۴ باشد. لذا از گزینه‌های وی حذف می‌شود. حال فرم گسترده بازی را به شکل زیر رسم می‌کنیم.



درگام بعد تعادل هر زیر بازی را یافته و از آن به تعادل کامل زیربازی‌ها می‌رسیم.



لذا تعادل کامل زیربازی‌ها برابر $\{Q_1Q_4, Q_2Q_3\}$ می‌باشد که در آن مطلوبیت (۷،۵) به بازیگران می‌رسد.

$b)$ پرواضح است که انتخاب $\{Q_2Q_3, Q_1Q_4\}$ به بازیگران مطلوبیت (۸،۶) را می‌دهد. یعنی وضعیتی پیدا شده که درآن بدون کاسته شدن از مطلوبیت بازیگری، مطلوبیت بازیگر دیگر افزایش یافته. لذا حاصل تعادل کامل زیربازی‌ها نمی‌تواند بهینه پرتو باشد.