درس اصول نظریه بازی

دکتر محمدحسین رحمتی (۱-۴۴۶۲۵)

مرضیه علی‌اکبرپور، ملیکا عبدی

پاسخ‌نامه امتحان میان‌ترم اول

سوال ۱

در یک شهر دو پشمک‌فروش ریسک خنثی (مطلوبیت خطی) پشمک را می‌سازند و در مرکز شهر توسط گاری می‌فروشند. پشمک کالای کاملا همگنی است که با هزینه c>۰ تولید می‌شود. در این شهر تنها یک خریدار پشمک زندگی می‌کند که هر روز صبح بر اساس قیمت‌ها یک پشمک می‌خرد یا آبنبات می‌خرد. اگر مشتری پشمک نخرد، آبنبات برای وی ارزش v>c دارد. بنابراین تا قیمت p=v مشتری پشمک را خواهد خرید. پشمک‌فروش پس از آن که مشتری گاری او را انتخاب کرد دستگاه را روشن و پشمک را با هزینه c تولید می‌کند.

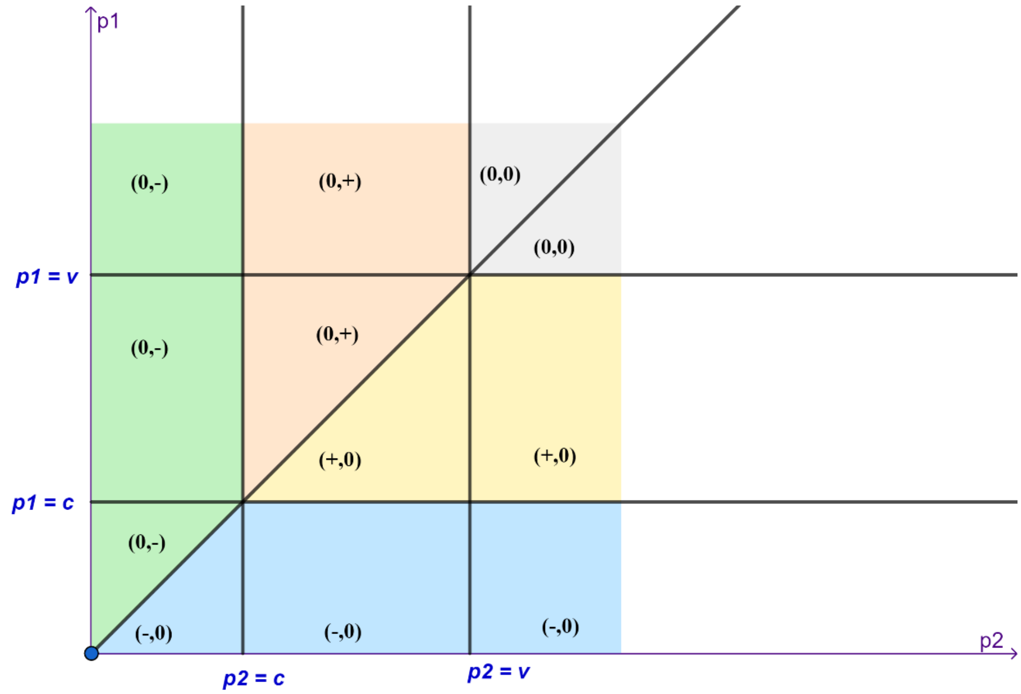
A. فرض کنید هر دو پشمک‌فروش همزمان قیمت $p_i \geq 0$ را انتخاب می‌کنند. مشتری از پشمک‌فروش با قیمت کمتر خرید می‌کند (البته به شرطی که بیشتر از v نباشد) اگر هر دو پشمک‌فروش یک قیمت را انتخاب کرده باشند مشتری با احتمال برابر یکی را انتخاب می‌کند.

فرض می‌کنیم جز مشتری پشمک، افراد دیگری وجود داشته باشند که مشتری آبنبات باشند (در نتیجه آبنبات‌فروش برای گرفتن سهم بازار رقابتی با پشمک‌فروش‌ها ندارد و درگیر رقابت کاهش قیمت آن‌ها نمی‌شود) اگر آبنبات‌فروش بداند که کالایش برای مشتری ارزش v دارد هر قیمتی پایین‌تر از v برای آن حرکت مغلوب محسوب می‌شود. بنابراین آبنبات‌فروش کالایش را با قیمت v عرضه می‌کند. پس خریدار پشمک که براساس قیمت‌ها بین آبنبات و پشمک انتخاب می‌کند، اگر قیمت پشمک بیشتر از v باشد آبنبات را انتخاب می‌کند و در غیر این صورت پشمک را انتخاب می‌کند.

a. آیا هیچ‌کدام از پشمک‌فروش‌ها حرکت (یا حرکت‌های) اکیداً مغلوب دارند؟ اگر آری، آن را مشخص کنید.

b. آیا هیچ‌کدام از پشمک‌فروش‌ها حرکت (یا حرکت‌های) نسبتاً مغلوب دارند؟ اگر آری، آن را مشخص کنید.

با توجه به شکل، تنها حالتی که اکیداً مغلوب است، انتخاب قیمت ۰ است. قیمت‌های پایین‌تر از c و نیز قیمت‌های بیشتر از v حرکت‌های نسبتا مغلوب محسوب می‌شوند.



c. برای تعادل نش در فضای حرکات محض بازی پشمک‌فروش‌ها را حل کنید. استدلال کنید چرا هیچ تعادل نش محض دیگری وجود ندارد.

نشان می‌دهیم تنها در حالتی که قیمت پیشنهادی هر دو پشمک‌فروش c باشد انگیزه انحراف برای هیچ یک از آن‌ها وجود ندارد و در حالات دیگر حداقل یکی از پشمک‌فروش‌ها انگیزه انحراف دارند.
ابتدا توجه می‌کنیم که در حالت تعادل قیمت پیشنهادی دو پشمک‌فروش باید برابر باشد. چون اولا مساله متقارن است. به شکل دیگری نیز می‌توان این نتیجه را استدلال کرد. فرض کنید تعادل نشی داشته باشیم که قیمت پیشنهادی دو فروشنده در آن برابر نباشد. بدون کاستن از کلیت فرض کنید پشمکی اول قیمت کمتری پیشنهاد داده است:

- اگر $c < p1 \leq v$ ، همواره پشمک‌فروش دوم انگیزه دارد قیمت پیشنهادی‌اش را به p۱ تغییر دهد. چون در حالت اول سود صفر به دست می‌آورد اما در این حالت سود مثبت $\frac{p1-c}{2}$ را به دست خواهد آورد.
- اگر $p1 > v$ نیز هر دو فروشنده انگیزه انحراف دارند چون در این حالت مشتری نخواهند داشت و سود قطعی صفر به دست می‌آورند در حالی که با انحراف به قیمت‌های پایین‌تر از v می‌توانند سود مثبت به دست بیاورند.
- اگر $p1 \leq c$ ، پشمک‌فروش اول انگیزه انحراف خواهد داشت چون در این حالت سود این فروشنده نامثبت است در حالی که با انحراف به $p2 - \epsilon$ سود بیشتری به دست خواهد آورد.

پس تا اینجا نشان دادیم که قیمت‌های تعادلی برابر هستند. حال فرض کنید که قیمت تعادلی p^* باشد:

- اگر $c < p^*$، در این صورت هر دو فروشنده انگیزه انحراف به $p^* - \epsilon$ را دارند. چرا که اگر ϵ را به قدر کافی کوچک بگیریم، سود انتظاری در حالت انحراف $p^* - c - \epsilon$، از سود انتظاری در حالت اول $(\frac{p^*-c}{2})$ بیشتر خواهد بود.

- اگر $p^* < c$، در این صورت هر دو فروشنده انگیزه انحراف به قیمت‌های بالاتر را دارند چون سود انتظاری در این حالت منفی است.

پس باید داشته باشیم: $p^* = c$. هیچ‌کدام از بازیگرها انگیزه انحراف از این تعادل را ندارند چون انحراف به قیمت‌های پایین‌تر سود منفی به دست می‌دهد و انحراف به قیمت‌های بالاتر تفاوتی در سود ۰ ایجاد نمی‌کند.

B. حال فرض کنید پشمک‌فروش‌ها برای اعلام قیمت باید داد بزنند که هزینه‌ی k برایشان دارد. البته پشمک‌فروش می‌تواند داد نزند و در نتیجه هزینه‌ی k را لازم نیست پرداخت کند و در این صورت قیمتی اعلام نکرده و مشتری ندارد. فرض کنید $0 < k < v - c$ است.

d. نشان دهید این بازی تعادل نش محض ندارد.

حرکتی که یک فروشنده قیمتی اعلام نکند: در این حالت اگر قیمت انتخابی توسط فروشنده‌ی دیگر هر عددی غیر از c+k باشد، حداقل یکی از فروشنده‌ها انگیزه دارد منحرف شود:

- اگر قیمت انتخابی بازیگر دیگر کمتر از c+k باشد، در این حالت سود این بازیگر منفی خواهد بود پس انگیزه دارد به عدم اعلام قیمت و سود صفر منحرف شود.
- اگر قیمت انتخابی بازیگر دیگر بیشتر از v باشد، در این حالت سود این بازیگر صفر خواهد بود پس انگیزه دارد به قیمت v و سود مثبت منحرف شود.
- اگر قیمت انتخابی بازیگر دیگر بیشتر از c+k و کمتر یا مساوی v باشد، در این صورت بازیگری که قیمتی انتخاب نکرده انگیزه دارد به $p_{-i} - \epsilon$ منحرف شود چون در این حالت سود مثبت به دست می‌آورد.

حرکتی که هر دو فروشنده قیمتی اعلام نکنند: در این حالت هر دو بازیگر انگیزه دارند به اعلام قیمت v منحرف شوند.
حرکتی که هر دو فروشنده قیمتی را اعلام کنند: دقت کنید تفاوت این حالت با حالتی که اعلام قیمت برای پشمک‌فروش‌ها هزینه نداشت، در این است که اگر پشمک‌فروش توسط خریدار انتخاب نشود، سود منفی نصیب او می‌شود و نه سود صفر. پس بر خلاف حالت قبل که اعلام قیمت c تعادل نش بود، اینجا c+k تعادل نش نیست. چون اگر هر دو قیمت c+k را انتخاب کنند سود انتظاری آن‌ها برابر خواهد بود با:

$$\frac{1}{2} \times u_{sell} + \frac{1}{2} \times u_{no\ sell} = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times (-k) = -\frac{k}{2}$$

که در این حالت فروشنده انگیزه دارد به حرکت «عدم اعلام قیمت» با سود ۰ منحرف شود. پس مشابه استدلال بخش قبل می‌توان نشان داد که تعادل نش نداریم. با این حال اگر بخواهیم دقیقتر بنویسیم داریم:
به دلیل تقارن قیمت‌های تعادلی باید برابر باشند. حال فرض کنید که قیمت تعادلی p^* باشد:

- اگر $p^* > v$، خریدار پشمک نخواهد خرید و سود هر دو فروشنده صفر خواهد بود پس هر دو بازیگر انگیزه دارند به قیمت v منحرف شوند.

- اگر $c+k<p^*\leq v$، در این صورت هر دو فروشنده انگیزه انحراف به $p^* - \epsilon$ را دارند. چرا که اگر ϵ را به قدر کافی کوچک بگیریم، سود انتظاری در حالت انحراف $(p^*-c-k-\epsilon)$، از سود انتظاری در حالت اول $(\frac{p^*-c-k}{2})$ بیشتر خواهد بود.
- اگر $p^*=c+k$، در بالا نشان دادیم که به دلیل سود منفی فروشندگان انگیزه انحراف وجود دارد.
- اگر $p^*<c+k$، در این صورت هر دو فروشنده انگیزه انحراف به قیمت‌های بالاتر را دارند چون سود انتظاری در این حالت منفی است.

پس تعادل نش محضی وجود ندارد.

e. نشان دهید در هر تعادلی هر دو پشمک‌فروش باید سود انتظاری صفر به دست بیاورند.

واضح است در حالتی که سود انتظاری بازیگر منفی باشد، برای این بازیگر انگیزه انحراف به عدم اعلام هیچ قیمتی و به دست آوردن سود صفر وجود دارد. پس این حالت نمی‌تواند در تعادلی وجود داشته باشد. از طرفی با توجه به چارچوب بازی، اگر کسی در تعادلی سود مثبت به دست آورد، بازیگر دیگر حتما سود نامثبت (منفی یا صفر) به دست آورده است. بدون کاستن از کلیت مساله فرض میکنیم بازیگر اول سود مثبت به دست آورده است. همانطور که اشاره کردیم اگر بازیگر دوم سود انتظاری منفی داشته باشد انگیزه انحراف به عدم اعلام قیمت دارد پس فقط حالتی باقی می‌ماند که بازیگر دوم سود انتظاری صفر داشته باشد. در این حالت بازیگر دوم انگیزه انحراف به استراتژی بازیگر اول را دارد تا سود مثبت به دست آورد. پس تنها حالتی که برای تعادل ممکن است این است که سود انتظاری هر دو فروشنده ۰ باشد.

f. نشان دهید پشمک‌فروش‌ها قیمت بالاتر از v و پایین‌تر از c+k را با احتمال ۰ بازی می‌کنند.

قیمت‌های بالاتر از v: مستقل از نحوه بازی بازیگر دیگر سود انتظاری منفی به دست می‌دهند چون خریدار پشمکی نخواهد خرید اما فروشنده مبلغ k برای اعلام قیمت هزینه کرده است. پس این حرکت توسط حرکت عدم اعلام قیمت (که مستقل از نحوه بازی بازیگر دیگر سود ۰ به دست می‌دهد) اکیداً مغلوب می‌شود.
قیمت‌های پایین‌تر از c+k : این قیمت اگر منجر به خرید پشمک شود سود p–c–k)/۲) یا p–c–k نصیب فروشنده می‌کند که در هر دو حالت عددی منفی است. اگر هم منجر به خرید نشود سود انتظاری k– خواهد بود. پس این‌جا نیز مستقل از نحوه بازی حریف بازیگر سود منفی به دست می‌آورد. پس این استراتژی نیز توسط حرکت عدم اعلام قیمت مغلوب می‌شود.
همان‌طور که می‌دانیم حرکت‌های اکیدا مغلوب با احتمال ۰ بازی می‌شوند.

g. برای حل حرکت ترکیبی در تعادل فرض کنید تعادل متقارن است. در این صورت اگر پشمک‌فروشی قیمت p را اعلام کرده باشد، سود انتظاری وی را براساس متغیرهای p و توزیع F و احتمال π به دست آورید.

سود انتظاری را برای بازیگر i با u_i نمایش می‌دهیم و قیمت انتخابی بازیگر i و بازیگر دیگر را به ترتیب با p_i و p_{-i} نشان می‌دهیم:

$$u_i(p_i) = prob(\text{قیمتی را اعلام کند } i) \times prob(\text{قیمتی را اعلام کند } -i) \times \left[prob(p_i < p_{-i}) \times (p_i - c - k) + prob(p_i = p_{-i}) \times \frac{p_i - c - k}{2} + prob(p_i > p_{-i}) \times -k\right] + prob(\text{قیمتی را اعلام کند } i) \times prob(\text{قیمتی را اعلام نکند } -i) \times [p_i - c - k] + prob(\text{قیمتی را اعلام نکند } i) \times [0] \rightarrow$$

$$u_i(p_i) = \pi^2 \left[\left(1 - F(p_i)\right) \times (p_i - c - k) + 0 \times \frac{p_i - c - k}{2} + F(p_i) \times -k\right] + \pi(1-\pi) \times [p_i - c - k] \rightarrow$$

$$u(p) = \pi^2\left[\left(1 - F(p)\right) \times (p - c - k) + F(p) \times -k\right] + \pi(1-\pi) \times [p - c - k] \rightarrow$$

$$u(p) = \pi^2\left[\left(1 - F(p)\right) \times (p - c) - k\right] + \pi(1-\pi) \times [p - c - k] \rightarrow$$

$$u(p) = \pi^2\left[\left(-F(p)\right) \times (p - c)\right] + \pi \times [p - c - k]$$

h. بر اساس پاسخ بخش g مقدار π و تابع F را به صورت تابعی از p,k,c به دست آورید. (در خصوص بستر F لازم به اثبات نیست و می‌توانید از بخش‌های قبل حدس بزنید.)

با توجه به بخش‌های قبل می‌دانیم که دامنه F (بستر F) بین c+k و v است. چون طبق بخش f فروشنده‌ها قیمت‌های خارج این بازه را با احتمال ۰ بازی می‌کنند. این بازه را D می‌نامیم.
می‌دانیم برای این که بازیگر بین چند حرکت ترکیب کند، باید بین آن حرکات بی‌تفاوت باشد. این یعنی به ازای هر $p' \in D$ و p باید داشته باشیم $u(p) = u(p') = u$. از سوی دیگر، در قسمت e نشان دادیم در هر تعادل دو پشمک‌فروش باید سود صفر به دست آورند. سود هر پشمک‌فروش در این تعادل ترکیبی از انتگرال $\int u(p).f(p)\,dp$ محاسبه می‌شود. در نتیجه داریم:

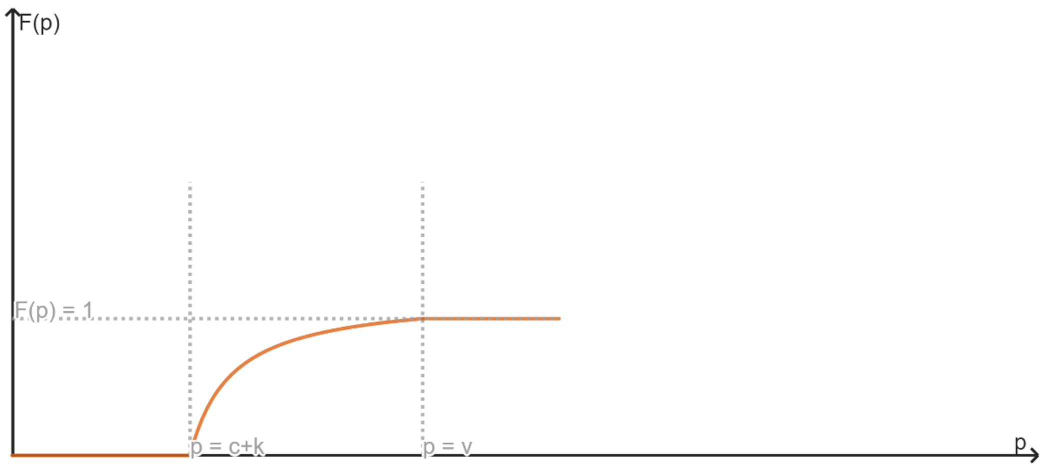
$$payoff = \int u(p).f(p)\,dp = \int u.f(p)\,dp = u\int f(p)\,dp = u.1 = u \;, payoff = 0 \rightarrow u = 0$$

بنابراین می‌توانیم $u(p)$ را از محاسبات بخش قبل جاگذاری کنیم و بنویسیم:

$$u(p) = \pi^2\left[\left(-F(p)\right) \times (p - c)\right] + \pi \times [p - c - k] = 0 \rightarrow F(p) = \frac{p - c - k}{(p - c) \times \pi}$$

از آنجایی که F(p) تابع توزیع تجمعی است، و دامنه آن $D = [c + k, v]$ است؛ پس باید داشته باشیم:

$$F(v) = 1 \rightarrow \frac{v-c-k}{(v-c)\times\pi} = 1 \rightarrow \pi = \frac{v-c-k}{v-c} \rightarrow F(p) = \frac{(v-c)(p-c-k)}{(p-c)(v-c-k)}$$



i.حرکت ترکیبی زمانی که $k \rightarrow 0$ چه مقداری به دست می‌آید؟

$$k \rightarrow 0 \;\Rightarrow\; \pi \rightarrow 1, F(p) \rightarrow 1$$

یعنی در این حالت تابع توزیع تجمعی F به شکل زیر در می‌آید که به این معنی است که بازیگرها استراتژی $p^* = c$ را با احتمال ۱ بازی می‌کنند. این همان تعادل نش محضی است که در حالتی که اعلام قیمت هزینه‌ای نداشت (k=۰) به آن رسیده بودیم (بخش c)

سوال ۲

I. باتوجه به تقارن بازی بین مریم و فاطمه، بدون کاستن از فرض مسئله نشان می‌دهیم که حرکت ۱ برای مریم اکیدا مغلوب است.

		فاطمه								
		۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
مریم	۱	۹, ۹	۶, ۱۲	۹, ۹	۶, ۱۲	۶, ۱۲	۸, ۱۰	۹, ۹	۸, ۱۰	۹, ۹
	۵	۱۲, ۶	۱۲, ۶	۱۲, ۶	۱۲, ۶	۹, ۹	۱۲, ۶	۱۲, ۶	۱۲, ۶	۱۲, ۶

II. باتوجه به تقارن صفحه بازی، حرکت‌های ۳، ۷ و ۹ نیز همانند حرکت ۱ نسبت به حرکت ۵ اکیدا مغلوب هستند. درنتیجه، سطر و ستون‌های ۱، ۳، ۷ و ۹ از جدول بازی حذف می‌شوند و جدول بازی به شکل زیر تقلیل میابد.

	۲	۴	۵	۶	۸
۲	۹, ۹	۹, ۹	۶, ۱۲	۹, ۹	۹, ۹
۴	۹, ۹	۹, ۹	۶, ۱۲	۹, ۹	۹, ۹
۵	۱۲, ۶	۱۲, ۶	۹, ۹	۱۲, ۶	۱۲, ۶
۶	۹, ۹	۹, ۹	۶, ۱۲	۹, ۹	۹, ۹
۸	۹, ۹	۹, ۹	۶, ۱۲	۹, ۹	۹, ۹

باتوجه به جدول تقلیل یافته می‌توان دید که حرکت‌های ۲، ۴، ۶ و ۸ نسبت به حرکت ۵ اکیدا مغلوب هستند. درنتیجه حرکت‌های ۲، ۴، ۶ و ۸ حذف خواهند شد و از آنجایی که تنها حرکات اکیدا مغلوب را حذف کرده‌ایم، $(5,5)$ تعادل نش است.

III. طبق جدول زیر، حرکت ۲ نسبت به حرکت ۵ مغلوب است اما اکیدا مغلوب نیست. درنتیجه تعادل $(5,5)$ اکیدا غالب نیست.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۲	۱۲, ۶	۹, ۹	۱۲, ۶	۹, ۹	۶, ۱۲	۹, ۹	۱۰, ۸	۹, ۹	۱۰, ۸
۵	۱۲, ۶	۱۲, ۶	۱۲, ۶	۱۲, ۶	۹, ۹	۱۲, ۶	۱۲, ۶	۱۲, ۶	۱۲, ۶