

# امتحان میان ترم اول، اصول نظریه بازی‌ها

## بهار 1402 – محمدحسین رحمتی

زمان امتحان 90 دقیقه است. واضح، کوتاه و ترجیحا بدون خط خوردگی بنویسید

1. (پشمکی) در یک شهر، دو پشمک‌فروش ریسک خنثی  $i = 1, 2$  (مطلوبیت خطی) پشمک را می‌سازند و در مرکز شهر توسط گاری می‌فروشند. پشمک کالای کاملاً همگنی است که با هزینه  $c > 0$  تولید می‌شود (عمده هزینه شکر است). در این شهر تنها یک خریدار پشمک زندگی می‌کند که هر روز صبح بر اساس قیمت‌ها یک پشمک می‌خرد یا آبنبات می‌خرد. اگر مشتری پشمک نخرد، آبنبات برای وی ارزش  $v > c$  دارد. بنابراین تا قیمت  $p = v$  مشتری پشمک را خواهد خرید. پشمک‌فروش پس از آنکه مشتری گاری وی را انتخاب کرد دستگاه را روشن پشمک را با هزینه  $c$  تولید می‌کند.

A. فرض کنید هر دو پشمک‌فروش همزمان قیمت  $p_i \geq 0$  را انتخاب می‌کنند. مشتری از پشمک‌فروش با قیمت کمتر خرید می‌کند (البته بشرطی که بیشتر از  $v$  نباشد) اگر هر دو پشمک‌فروش یک قیمت را انتخاب کرده باشند، مشتری با احتمال برابر یکی را انتخاب می‌کند.

a. آیا هیچ کدام از پشمک‌فروش‌ها حرکت (یا حرکت‌های) اکیدا مغلوب دارند؟ اگر آری، آن را مشخص کنید.

b. آیا هیچ کدام از پشمک‌فروش‌ها حرکت (یا حرکت‌های) نسبتاً مغلوب دارند؟ اگر آری، آن را مشخص کنید.

c. برای تعادل نش در فضای حرکات محض بازی پشمک‌فروش‌ها را حل کنید؟ استدلال کنید چرا هیچ تعادل نش محض دیگری وجود ندارد!

B. حال فرض کنید پشمک‌فروش‌ها برای اعلام قیمت باید داد بزنند که هزینه  $K$  برای ایشان دارد. البته پشمک‌فروش می‌تواند داد نزند و در نتیجه هزینه  $K$  را لازم نیست پرداخت کند و در این صورت قیمتی اعلام نکرده و مشتری ندارد. فرض کنید  $0 < K < v - c$  است.

d. نشان دهید این بازی تعادل نش محض ندارد!!

حال یک حرکت ترکیبی فرض کنید که هر پشمک‌فروش با احتمال  $\pi \in (0, 1)$  قیمتی را اعلام می‌کند، اگر وی قیمتی را اعلام کند هزینه  $K$  را نیز پرداخت می‌کند. مشروط به اینکه قیمت را اعلام کند، این قیمت از یک توزیع تجمی  $F$  (اثبات خواهد شد این توزیع فاقد وزن متمرکز است) برداشت می‌شود.

e. نشان دهید در هر تعادلی، هر دو پشمک‌فروش باید سود انتظاری صفر بدست بیاورند!!

f. نشان دهید پشمک‌فروش‌ها قیمت کمتر از  $c + K$  و بالاتر از  $v$  را با احتمال صفر بازی می‌کنند.

g. برای حل حرکت ترکیبی در تعادل، فرض کنید تعادل متقارن است. در این صورت اگر پشمک‌فروشی قیمت  $p$  را اعلام کرده باشد، سود انتظاری وی را بر اساس متغیرهای  $p$  و توزیع  $F$  و احتمال  $\pi$  بدست آورید!

h. بر اساس پاسخ بخش (g) مقدار  $\pi$  و تابع  $F$  را بصورت تابعی از  $p$ ،  $K$  و  $c$  بدست آورید. (در خصوص بستر  $F$  لازم به اثبات نیست و می‌توانید بر اساس بخش‌های قبل حدس بزنید).

i. حرکت ترکیبی زمانیکه  $K \rightarrow 0$  چه مقداری بدست می‌آید؟

2. (بازی خانگی) امسال بدلیل برف زیادی که در بهمن آمد، مریم و فاطمه مجبورند در خانه با هم بازی کنند. آنها بازی زیر را کشف می‌کنند. هر کدام یک مهره دارند که می‌توانند مهره را در یکی از خانه‌های جدول زیر بصورت همزمان قرار دهند! هر خانه دو امتیاز دارد و به کسی می‌رسد که در مسیر افقی یا عمودی مهره نزدیک‌تری به وی گذاشته باشد. اگر مهره هر دو بازیگر به یک اندازه از یک خانه فاصله داشته باشد، به هر کدام یک امتیاز می‌رسد. توجه کنید نزدیکی فقط افقی و عمودی است و مسیر قطری اصلاً ملاک نیست. برای مثال اگر مریم مهره‌اش را در خانه (5) و فاطمه مهره‌اش را در خانه (3) قرار داده باشد، در این صورت خانه (9) به هر دو مهره به یک اندازه و به میزان 2 واحد فاصله دارد.

(1)	(2)	(3)
(4)	(5)	(6)
(7)	(8)	(9)

a. با ترسیم نمایش جدولی نشان دهید که قراردادن مهره در خانه (1) اکیدا مغلوب است! (توجه کنید برای اثبات این بخش نیاز نیست بصورت کامل نمایش جدولی را بکشید)

b. تعادل(های) نش را از طریق حذف پیاپی حرکات مغلوب بدست آورید!

c. آیا تعادل نشی وجود دارد که اکیدا غالب باشد؟