پاسخنامه امتحان میان ترم اول، اصول نظریه بازی‌ها

بهار 1401، استاد درس: محمدحسین رحمتی

سوال 1

الف) اگر استقلالی مقدار bet را شرطبندی کند در صورت برد استقلال مقدار $\frac{q}{p}\ bet$ را می‌برد و اگر ببازد مقدار bet را از دست داده است. میزان مطلوبیت فرد به پولی که در اختیار دارد به صورت $\ln C$ مربوط است.

فرد استقلالی تصور می‌کند که تیمش با احتمال $0/8$ می‌برد و $0/2$ می بازد پس مطلوبیت انتظاری یک طرفدار استقلال اگر کسر α_{ss} از درآمدش را شرطبندی کرده باشد به صورت زیر خواهد بود:

$$E(U_{ss}|bet=\alpha_{ss}W_{ss})=0/2\ln\big((1-\alpha_{ss})W_{ss}\big)+0/8\ln\left(W_{ss}\left(1+\frac{q}{p}\alpha_{ss}\right)\right)$$

برای فرد پرسپولیسی به صورت مشابه داریم:

$$E\big(U_{ps}\big|bet=\alpha_{ps}W_{ps}\big)=0/4\ln\Big(\big(1-\alpha_{ps}\big)W_{ps}\Big)+0/6\ln\left(W_{ps}\left(1+\frac{p}{q}\alpha_{ps}\right)\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\alpha_{ss}}\big(E(U_{ss}|bet=\alpha_{ss}W_{ss})\big)&=\frac{0/2}{1-\alpha_{ss}}\ (-1)+\frac{0/8\ \left(\frac{q}{p}\right)}{1+\frac{q}{p}\alpha_{ss}}\\&=\frac{-0/2-0/2\frac{q}{p}\ \alpha_{ss}+0/8\frac{q}{p}-0/8\frac{q}{p}\alpha_{ss}}{(1-\alpha_{ss})\left(1+\frac{q}{p}\alpha_{ss}\right)}=0\end{aligned}$$

$$\alpha_{ss}=\frac{-0/2+0/8\frac{q}{p}}{\frac{q}{p}}=-0/2\frac{p}{q}+0/8$$

به صورت مشابه برای طرفدار پرسپولیس داریم:

$$\alpha_{ps}=-0/4\frac{q}{p}+0/6$$

ب) حالت تعادل زمانی است که میزان پولی که طرفداران یک دسته در شرطبندی می‌بازند برابر با میزانی باشد که دسته‌ی دیگر می‌برند؛ در صورت برد استقلال:

$$\frac{q}{p}\alpha_{ss}W_{ss}=\alpha_{ps}W_{ps}$$

و در صورت برد پرسپولیس:

$$\alpha_{ss}W_{ss} = \frac{p}{q}\alpha_{ps}W_{ps}$$

که دو معادله با هم نظیرند.

از این تساوی با جایگذاری مقادیر α_{ss} و α_{ps} به مقدار تعادلی $\frac{q}{p}$ می‌رسیم.

$$-0/2 + 0/8\frac{q}{p} = -0/4\frac{q}{p} + 0/6$$

$$\frac{q}{p} = \frac{2}{3}$$

ج) با جایگذاری مقدار $\frac{q}{p} = \frac{2}{3}$ مقادیر α_{ss} و α_{ps} به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\alpha_{ss} = -0/2\frac{p}{q} + 0/8 = 0/5$$

$$\alpha_{ps} = 0/6 - 0/4\frac{q}{p} = 0/33$$

د) اگر بنا باشد شاخص تعادل ۲:۱ به نفع استقلالی‌ها باشد:

$$\frac{q}{p} = \frac{۱}{۲}$$

$$\alpha_{ss} = \frac{p}{q}\alpha_{ps}\frac{W_{ps}}{W_{ss}}$$

$$-0/2\frac{p}{q} + 0/8 = \frac{p}{q}\left(0/6 - 0/4\frac{q}{p}\right)\frac{W_{ps}}{W_{ss}}$$

$$-0/2 \times ۲ + 0/8 = ۲\left(0/6 - 0/4 \times \frac{۱}{2}\right)\frac{W_{ps}}{W_{ss}}$$

$$\frac{W_{ps}}{W_{ss}} = \frac{0/4}{۰/۸} = \frac{1}{2}$$

سؤال 2

قسمت الف) ابتدا تعادل‌های محض را مشخص می‌کنیم.

	L	R
T	$\underline{1}, \underline{1}$	$\underline{0}, \underline{1}$
B	$\underline{1}, \underline{0}$	-1, -1

بنابراین بازی ۳ تعادل نش محض دارد:

$$EQ_1 = \{T.L\}.\ EQ_2 = \{T.R\}.\ EQ_3 = \{B.L\}$$

برای یافتن حرکات ترکیبی فرض می‌کنیم بازیگر اول با احتمال p حرکت T و بازیگر دوم با احتمال q حرکت L را بازی کند.

	L	R	
T	1, 1	0, 1	p
B	1, 0	-1, -1	$1-p$
	q	$1-q$	

برای آنکه بازیگر ۱ ترکیب کند باید میان دو حرکتش بی‌تفاوت باشد.

$$\begin{matrix} u_1(T) = q \\ u_1(B) = 2q - 1 \end{matrix} \Longrightarrow q = 2q - 1 \Rightarrow q = 1$$

که یعنی بازیگر دو حرکت محض L را بازی کند. برای این کار مطلوبیت این حرکت برای بازیگر دوم باید بیشتر از حرکت دیگرش باشد و داریم:

$$\begin{matrix} u_2(L) = p \\ u_2(R) = 2p - 1 \end{matrix} \Longrightarrow p \geq 2p - 1 \Rightarrow 1 \geq p$$

که تمام فضای احتمال ما را شامل می‌شود. بنابراین به‌ازای هر بازی ترکیبی بازیگر اول و بازی L بازیگر دوم تعادل نش داریم. به کمک تقارن مسئله برای دو بازیگر می‌توان نتیجه گرفت برعکس این حالت نیز صادق بوده و به‌ازای هر بازی ترکیبی بازیگر دوم و بازی T بازیگر اول تعادل نش داریم.

قسمت ب) به‌ازای حالت‌های مختلف بررسی می‌کنیم.

- **مقدار x کمتر از ۰ باشد $(x < 0)$**

	L	R	
T	$\underline{1}, \underline{1}$	$\underline{0}, 0$	p
B	$0, \underline{0}$	x, x	$1-p$
	q	$1-q$	

بنابراین بازی دارای یک تعادل نش محض $\{T, L\}$ است. برای تعادل‌های ترکیبی نیز داریم:

$$\begin{matrix} u_1(T) = q \\ u_1(B) = x(1 - q) \end{matrix} \Longrightarrow q = x - xq \Rightarrow q = \frac{x}{1 + x}$$

از آنجا که $x < 0$ است، برای مقادیر $-1 < x < 0$ مقدار $\frac{x}{1+x}$ منفی خواهد شد، به‌ازای $x = -1$ بی‌نهایت شده و به‌ازای مقادیر $x < -1$ مقدار کسر بزرگ‌تر از ۱ می‌شود که هیچ کدام از این حالات پاسخ معتبر برای احتمال یک حرکت نمی‌باشد. از تقارن بازی همین نتیجه را برای بازیگر دوم می‌گیریم و به این نتیجه می‌رسیم که بازی در این حالت تعادل ترکیبی ندارد.

- **مقدار x برابر با ۰ باشد $(x = 0)$**

	L	R	
T	1, 1	0, 0	p
B	0, 0	0, 0	$1-p$
	q	$1-q$	

در این حالت دو تعادل محض $\{T.L\}$ و $\{B.R\}$ داریم. برای تعادل ترکیبی:

$$\begin{matrix} u_1(T) = q \\ u_1(B) = 0 \end{matrix} \Longrightarrow q = 0$$

و از تقارن باید $p = 0$ باشد که تعادل محض $\{B, R\}$ است و بازی در این حالت تعادل ترکیبی ندارد.

- **مقدار x بزرگ‌تر از ۱ باشد $(x > 1)$**

	L	R	
T	1, 1	0, 0	p
B	0, 0	x, x	$1-p$
	q	$1-q$	

در این حالت دو تعادل نش محض $\{T.L\}$ و $\{B.R\}$ داریم و برای تعادل‌های ترکیبی داریم:

$$\begin{matrix} u_1(T) = q \\ u_1(B) = x(1-q) \end{matrix} \Longrightarrow q = x - xq \Rightarrow q = \frac{x}{1+x}$$

همچنین از تقارن داریم:

$$p = \frac{x}{1+x}$$

بنابراین تعادل ترکیبی در این حالت از بازی برابراست با:

$$\left\{\left(\frac{x}{1+x}.\frac{1}{1+x}\right).\left(\frac{x}{1+x}.\frac{1}{1+x}\right)\right\}$$

سوال 3

الف) تمام حالات را به دو ناحیه به وسیله b تقسیم می‌کنیم:

1. $\mathbf{0 \leq b \leq 500}$

$$u_i(w_i, w_j, f_i, f_j) = 2b - (w_i + w_j) + 0.1(f_i + f_j) \\ = (w_i + w_j) - 1.9(f_i + f_j) \qquad (1)$$

طبق رابطه بالا $\frac{\partial u_i}{\partial \mathrm{f}_i} < 0$ و $\frac{\partial u_i}{\partial w_i} > 0$ است.

$$\left|\frac{\partial u_i}{\partial \mathrm{f}_i}\right| > \left|\frac{\partial u_i}{\partial w_i}\right|$$

$$b = (w_i + w_j) - (f_i + f_j)$$

به ازای هر $(w_i . f_i)$ که در قبال حرکت $(w_j . f_j)$ بازیگر دیگر داخل شرط این حالت قابل قبول باشد و $w_i > 0$ و $f_i > 0$ خواهیم داشت:

$$(w_i - f_i) \leq 500 - (w_j - f_j) = M_j$$

a) اگر $\boldsymbol{M_j \geq 0}$ خواهیم داشت:

$$u_i(w_i' = \min(M_j + f_i, 1600)\ , w_j, f_i, f_j) \geq u_i(w_i, w_j, f_i, f_j)$$

و همچنین خواهیم داشت:

$$u_i(w_i" = \ w_i' - f_i\ , w_j, f_i" \ = 0, f_j) > u_i(w_i' = M_j + f_i, w_j, f_i, f_j)$$

و همچنین خواهیم داشت:

$$u_i(w_i = \ \min(M_j, 1600)\ \ , w_j, f_i"" \ = 0, f_j) > u_i(w_i" = \ w_i' - f_i\ , w_j, f_i" \ = 0, f_j)$$

که البته همه $(w_i"", f_i"")$ همچنان در شرط این حالت صدق خواهند کرد. در نتیجه (w_i, f_i) اکیدا مطلوبیت کمتری نسبت به $(w_i"", f_i"")$ است.

b) اگر $\boldsymbol{M_j < 0}$ خواهیم داشت:

$$u_i(w_i\ , w_j, f_i' = w_i - M_j, f_j) \geq u_i(w_i, w_j, f_i, f_j)$$

و همچنین خواهیم داشت:

$$u_i(w_i"= 0\ , w_j, f_i" = f_i' - w_i = -M_j\ , f_j) > u_i(w_i\ , w_j, f_i' = w_i - M_j, f_j)$$

که البته همه $(w_i", f_i")$ همچنان در شرط این حالت صدق خواهند کرد. در نتیجه (w_i, f_i) اکیدا مطلوبیت کمتری نسبت به $(w_i", f_i")$ است.

2. $b \geq 500$

$$u_i(w_i, w_j, f_i, f_j) = 1000 - (w_i + w_j) + 0.1(f_i + f_j) \qquad (2)$$

طبق رابطه بالا $\frac{\partial u_i}{\partial \mathrm{f}_i} > 0$ و $\frac{\partial u_i}{\partial w_i} < 0$ است.

$$\left|\frac{\partial u_i}{\partial \mathrm{f}_i}\right| < \left|\frac{\partial u_i}{\partial w_i}\right|$$

$$b = (w_i + w_j) - (f_i + f_j)$$

به ازای هر (w_i, f_i) که در قبال حرکت (w_j, f_j) بازیگر دیگر داخل شرط این حالت قابل قبول باشد و $w_i > 0$ و $f_i > 0$ خواهیم داشت:

$$(w_i - f_i) \geq 500 - (w_j - f_j) = M_j$$

a) اگر $\boldsymbol{M_j \geq 0}$ خواهیم داشت:

$$u_i(w_i' = \min(M_j + f_i, 1600)\ , w_j, f_i, f_j) \geq u_i(w_i, w_j, f_i, f_j)$$

و همچنین خواهیم داشت:

$$u_i(w_i" = \ w_i' - f_i\ , w_j, f_i"\ = 0, f_j) > u_i(w_i' = M_j + f_i, w_j, f_i, f_j)$$

و همچنین خواهیم داشت:

$$u_i(w_i = \ \min(M_j, 1600)\ \ , w_j, f_i""\ = 0, f_j) > u_i(w_i" = \ w_i' - f_i\ , w_j, f_i"\ = 0, f_j)$$

که البته همه $(w_i"", f_i"")$ همچنان در شرط این حالت صدق خواهند کرد. در نتیجه (w_i, f_i) اکیدا مطلوبیت کمتری نسبت به $(w_i"", f_i"")$ است.

b) اگر $\boldsymbol{M_j < 0}$ خواهیم داشت:

$$u_i(w_i\ , w_j, f_i' = w_i - M_j, f_j) \geq u_i(w_i, w_j, f_i, f_j)$$

و همچنین خواهیم داشت:

$$u_i(w_i"= 0\ , w_j, f_i" = f_i' - w_i = -M_j\ , f_j) > u_i(w_i\ , w_j, f_i' = w_i - M_j, f_j)$$

که البته همه $(w_i", f_i")$ همچنان در شرط این حالت صدق خواهند کرد. در نتیجه (w_i, f_i) اکیدا مطلوبیت کمتری نسبت به $(w_i", f_i")$ است.

از آنجایی که دو بازیگر داریم و مقادیر (w_i, f_i) که $w_i > 0$ و $f_i > 0$ هیچگاه در مجموعه بهترین پاسخ‌ها نیستند، طبق قضیه، این مقادیر مغلوب اکید هستند.

بهتر بود که راه حل به شکلی نوشته می‌شد که حالت بندی اولیه بر اساس M_j های مختلف صورت می‌گرفت و سپس زیرحالت‌های مختلف b برای آن حالت بررسی می‌شد. اما به این علت که نوشتن راه به این شیوه قابل درک‌تر است، راه حل را به این شیوه نوشته‌ام.

راه دیگر برای این قسمت این است که مطلوبیت (w_i, f_i) که $w_i > 0$ و $f_i > 0$ را برای تمام حالات b بنویسیم و نشان دهیم که در تمام این حالات یک $\varepsilon > 0$ وجود دارد که همچنان $w_i' = w_i - \epsilon > 0$ و $f_i' = f_i - \epsilon > 0$ بماند و قید b در آن حالت تغییر نکند ولی:

$$u(w_i', f_i') > u(w_i, f_i)$$

در نتیجه (w_i, f_i) به (w_i', f_i') مغلوب اکید است.

ب) ج) د)

اگر $\boldsymbol{M_j \geq 0}$ باشد، در هر دو حالت $b \geq 500$ و $b \leq 500$ ، حالت بهینه $b = 500$ می‌شود و خواهیم داشت:

$$u_i^*(w_j, f_j) = 500 - 0.9f_j$$

همچنین بهترین پاسخ عضو i به شرح زیر خواهد بود:

$$BR_i(M_j) = (w_i = \min(M_j, 1600) \ \ , f_i = 0)$$

$$M_j \geq 0 \quad \rightarrow \quad (w_j - f_j) \leq 500$$

$$\rightarrow \quad M_i(M_j) = \max(500 - M_j \ , -1100)$$

اگر $\boldsymbol{M_j < 0}$ باشد، در هر دو حالت $b \geq 500$ و $b \leq 500$ ، حالت بهینه $b = 500$ می‌شود و خواهیم داشت:

$$u_i^*(w_j, f_j) = 1.9 \times 500 - 0.9w_j = 950 - 0.9w_j$$

همچنین بهترین پاسخ عضو i به شرح زیر خواهد بود:

$$BR_i(M_j) = (w_i = 0 \ \ , f_i = -M_j)$$

$$M_j < 0 \quad \rightarrow \quad (w_j - f_j) > 500$$

$$\rightarrow \quad M_i(M_j) = 500 - M_j$$

در نتیجه به طور کلی و مستقل از اینکه مقدار M_j در چه بازه‌ای قرار می‌گیرد، مقدار M_i که بهترین پاسخ بازیگر i بوجود می‌آورد برابر خواهد بود با:

$$M_i(M_j) = \max(500 - M_j , -1100)$$

مقادیر (w_i, f_i) که در مقدارهای بالا نباشند، هیچگاه در مجموعه بهترین پاسخ‌های بازیگر i نیستند و طبق قضیه از آنجایی که دو بازیگر داریم، این مقادیر مغلوب اکید هستند.

در واقع این دو تابع که به نحوی نشان‌دهنده بهترین پاسخ هر بازیگر نسبت به رفتار بازیگر دیگر است، در بی‌نهایت نقطه اشتراک و یا تقاطع دارند و بی‌نهایت تعادل نش محض دارند. به ازای هر M_i ممکن که در بازه $-1100 \leq M_i \leq 1600$ باشد، این دو معادله تقاطع دارند و $M_j = 500 - M_i$ خواهد بود و دو بازیگر در تعادل نش محض هستند. در M_i خارج از این بازه تعادل نش محض نخواهیم داشت. بنابراین می‌توان مجموعه تمام تعادل‌های نش محض بازی را به شکل زیر نوشت:

$$w_i = x , f_i = 0 , w_j = 0 , f_j = x - 500 \qquad for:\ 500 < x \leq 1600$$

$$w_i = x , f_i = 0 , w_j = 500 - x , f_j = 0 \qquad for:\ 0 \leq x \leq 500$$

$$w_i = 0 , f_i = y , w_j = 500 + y , f_j = 0 \qquad for\ 0 < y \leq 1100$$

در حالتی که رفتار دو بازیگر را متقارن بگیریم (لزومی ندارد که متقارن باشد و صرفا به عنوان مثال عنوان شده است) خواهیم داشت:

$$M_i = M_j = 250$$

$$\rightarrow \quad w_i = w_j = 250 \quad , \quad f_i = f_j = 0$$

$$\rightarrow \quad u_i = u_j = 500$$

۵)

$$u_1(w_1, w_2, f_1, f_2) = 2\min(b, 500) - (w_1 + w_2) + 0.1(f_1 + f_2) = (w_1 + w_2) - 1.9(f_1 + f_2)$$

$$u_2(w_1, w_2, f_1, f_2) = 2\min(b, 500 + \varepsilon) - (w_1 + w_2) + 0.1(f_1 + f_2)$$
$$= (w_1 + w_2) - 1.9(f_1 + f_2)$$

$$M_2 = 500 - (w_2 - f_2)$$

$$M_1 = 500 + \varepsilon - (w_1 - f_1)$$

$$\rightarrow \quad M_2(M_1) = 500 - \max(M_1, 1600)$$

$$\rightarrow \quad M_1(M_2) = 500 + \epsilon - \max(M_2, 1600)$$

این دو معادله که در واقع به نحوی نشان‌دهنده بهترین پاسخ‌های هر بازیگر نسبت به رفتار بازیگر دیگر است، تنها در یک نقطه تقاطع دارند و در نتیجه تنها یک تعادل نش محض داریم:

$$w_1 = 0\,, f_1 = \ 1100\ \ , w_2 = 1600\ \ , f_2 = 0$$