

امتحان میان ترم اول، اصول نظریه بازی‌ها

بهار 1401 – محمدحسین رحمتی

زمان امتحان 90 دقیقه است و برای بارگذاری نیز 15 دقیقه به وقت شما اضافه می‌شود. به ازای هر 15 دقیقه تاخیر 10 درصد از نمره شما کاسته می‌شود. (از میان سوال اول و سوم تنها به یک سوال پاسخ دهید. نمره سوالات برابر است)

1. شهرآورد (شاید به درس خرد برای این سوال نیاز داشته باشید) تعداد طرفداران استقلال و پرسپولیس برابر است. متوسط درآمد طرفداران استقلال برابر W_1 و متوسط درآمد طرفداران پرسپولیس برابر W_2 است. همانطور که می‌دانید استقلال امسال در صدر است و منتظر بازی با پرسپولیس است. طرفداران استقلال اعتقاد دارند که تیم‌شان با احتمال 80 درصد برنده می‌شود و طرفداران پرسپولیس اعتقاد دارند که تیم‌شان با احتمال 60 درصد برنده می‌شود. فرض کنید که طرفداران ریسک‌گریزی نسبتی ثابت و برابر 1 دارند. بنابراین مطلوبیت هر بازیگر برابر $\ln(c)$ است که c کل مصرفی است که انجام می‌دهد. می‌دانید که متاسفانه بازار شرط‌بندی غیررسمی وجود دارد. این بازار به این صورت کار می‌کند که نسبتی بین دو گروه طرفداران در بازار تعیین می‌شود. برای مثال اگر استقلال برنده شد q مقدار طرفداران پرسپولیس می‌پردازند و اگر پرسپولیس برنده شد طرفدار استقلال p به طرفداران پرسپولیس می‌پردازند. به نسبت p و q شاخص تعادل (equilibrium odds) اطلاق می‌شود.

الف) حرکت هر طرفدار (به عنوان بازیگر) زمانیکه شاخص تعادل را می‌دانند چیست؟

ب) اگر ثروت طرفداران استقلال و پرسپولیس برابر باشد نشان دهید شاخص تعادل برابر 3:2 به نفع استقلال است!

ج) هر کدام از طرفداران چه نسبتی از دارایی خود را شرط‌بندی می‌کنند؟

د) اگر قرار باشد شاخص تعادل 2:1 به نفع استقلالی‌ها باشد، نسبت ثروت استقلالی‌ها به پرسپولیسی‌ها باید چند باشد؟

2. (بازی‌های ساده) این سوال دو بخش دارد:

الف) تمام تعادل‌های نش بازی زیر را بدست آورید:

	L	R
T	1,1	0,1
B	1,0	-1,-1

ب) برای تمام مقادیر x تمام تعادل‌های نش را توصیف کنید:

	L	R
T	1,1	0,0
B	0,0	x, x

3. (خانواده افراط و تفریط) یک خانوار دو نفره را در نظر بگیرید که در خصوص کار/مصرف/پس‌انداز هفتگی خود تصمیم می‌گیرند. هر کدام از افراد خانواده $i \in 1, 2$ بر روی میزان کار کردن خودش w_i و میزان سرگرمی f_i خودش تصمیم می‌گیرد. فرض کنید $w_i \in [0, 1600]$ و $f_i \in [0, 5000]$ است. بر اساس میزان کار و اختصاص وقت برای سرگرمی خانوار می‌تواند مانده اش را به صورت $b = (w_1 + w_2) - (f_1 + f_2)$ در بانک پس‌انداز کند. فرض کنید هر دو عضو خانواده مطلوبیت مشابه دارند که به صورت زیر داده شده است:

$$u(w_1, w_2, f_1, f_2) = 2 \min\{b, 500\} - (w_1 + w_2) + 0.1(f_1 + f_2)$$

الف) نشان دهید که تمام مقادیر (w_i, f_i) که $w_i > 0$ و $f_i > 0$ برای عضو i مغلوب است.

ب) چه حرکات دیگری برای عضو i مغلوب است؟

ج) کدام حرکات محص نجات پیدا می‌کنند از حذف پیاپی حرکات مغلوب؟

د) تعادل نش محص این بازی را بدست آورید.

در ادامه فرض کنید که مطلوبیت عضو (1) مشابه مطلوبیت فوق است ولی مطلوبیت عضو (2) خانواده به صورت زیر است:

$$u_2(w_1, w_2, f_1, f_2) = 2 \min\{b, 500 + \varepsilon\} - (w_1 + w_2) + 0.1(f_1 + f_2)$$

که $\varepsilon > 0$ است.

ه) تعادل نش محص در این بازی چیست؟ مجموعه حرکاتی که برای هر بازیگر حاصل از حذف پیاپی حرکات مغلوب نجات پیدا می‌کند کدام است؟