

امتحان نهایی، مبانی نظریه بازی‌ها

بهار ۱۴۰۳ - محمدحسین رحمتی

زمان امتحان ۲۴۰ دقیقه است. واضح، کوتاه و ترجیحا بدون خط‌خوردگی بنویسید

این امتحان تردید و دیدن است و همه چیز مشکوک است!

۱. (تردید در امنیت ملی) فرض کنید دو کشور تنبلستان (T) و فضولستان (F) داریم. کشور تنبلستان در حال توسعه یک اسلحه جدید است و کشور فضولستان می‌خواهد تاسیسات پایگاه نظامی کشور تنبلستان را بمباران کند. پیامدهای بازی به صورت زیر است:

فضولستان

	بمباران A	عدم بمباران B
ساخت اسلحه W	1, 0	0, 3/4
عدم ساخت اسلحه N	3/4, 1	1/2, 1/2

فرض کنید کشور فضولستان قبل از بمباران یک جاسوس (S) به کشور تنبلستان می‌فرستد. جاسوس ممکن است حواس‌پرت باشد و لذا دارای کیفیت α است به این معنی است که اگر کشور تنبلستان اسلحه را توسعه دهد جاسوس با احتمال α ساخت اسلحه را به درستی گزارش می‌کند و با احتمال $1 - \alpha$ گزارش اشتباه می‌دهد (عدم ساخت اسلحه را گزارش می‌دهد). بصورت مشابه اگر کشور تنبلستان اسلحه را توسعه ندهد جاسوس با احتمال α عدم ساخت اسلحه را گزارش کرده و با احتمال $1 - \alpha$ ساخت اسلحه را گزارش می‌کند. فرض کنید $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$ است. مقدار α برای کشورها اطلاع عمومی است. جاسوس بازیگر نیست بلکه یک ابزار است.

(a) راهبردهای محض هر کدام از کشورها را تعریف کنید!

(b) کلیه تعادل‌های نش این بازی را پیدا کنید زمانیکه $\alpha = 1$ است؟

(c) کلیه تعادل‌های نش این بازی را پیدا کنید زمانیکه $\alpha = \frac{1}{2}$ است؟

(d) کلیه تعادل‌های نش این بازی را پیدا کنید زمانیکه $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ است؟

(e) تعادل مناسب این بازی را پیدا کنید؟

۲. (تردید در رابطه دو خواهر!) فاطمه و مریم قرار است بازی دو نفره زیر را بازی کنند. فاطمه بین بالا U و پایین D و مریم بین راست R و چپ L انتخاب می‌کند. پیامدهای بازی را در زیر می‌بینید. (توجه کنید که این جدول تنها پیامدها را نمایش می‌دهد و بازی همزمان نیست)

مریم

	L	R
فاطمه U	(3,2)	(1,1)
فاطمه D	(2,1)	(2,2)

فرض کنید فاطمه ابتدا حرکت می‌کند. مریم قبل از آنکه حرکت خود را انجام دهد حرکت فاطمه را می‌بیند.

(a) نمایش درختی و گسترده این بازی را ترسیم کنید مطمئن شوید که راهبردهای هر بازیگر را داخل و خارج مسیر تعادل بصورت کامل تعریف کنید.

(b) آیا تعادل نش در این بازی وجود دارد که تعادل کامل زیربازی‌ها نباشد؟

حال فرض کنید همچنان فاطمه ابتدا حرکت می‌کند ولی مریم حرکت فاطمه را قبل از انتخاب و انجام حرکت خودش نمی‌بیند.

(c) نمایش درختی این بازی را ترسیم کنید و راهبردهای محض بازی و تعادل کامل زیربازی را بدست آورید؟

حال فرض کنید همچنان فاطمه ابتدا حرکت می‌کند و مریم حرکت فاطمه را با احتمال p صحیح می‌بیند (حرکت واقعی فاطمه را می‌بیند) و با احتمال $1 - p$ اشتباه می‌بیند ($0 < p < 1$). مریم حرکت فاطمه را قبل از انتخاب حرکت خودش می‌بیند! هیچ‌کدام نمی‌دانند که مریم آیا حرکت فاطمه را درست دیده است و یا اشتباه دیده است! ولی مقدار p اطلاعات عمومی است. فرض کنید $p = 0.5$ است.

(d) بازی درختی را ترسیم کنید! توجه کنید به طبیعت نیاز دارید.

(e) تعادل بی‌زی در راهبردهای محض را بدست آورید؟

۳. (تردید در تبانی!) بازی دو مرحله‌ای زیر میان دو بازیگر را فرض کنید!

مرحله اول

		علی	
		C	D
ابوذر	C	(3,3)	(-7,5)
	D	(5,-7)	(0,0)

مرحله دوم

		علی	
		X	Y
ابوذر	X	(5,5)	(0,0)
	Y	(0,0)	(1,1)

بازی به این صورت است که در مرحله اول علی و ابوذر حرکت C یا D را بازی می‌کنند. در انتهای مرحله اول هر یک حرکت دیگری را نمی‌بینند ولی یک اطلاعی/علامتی از حرکت دیگری برداشت می‌کنند. این علامت شخصی است و با $w(i)$ آن را نمایش می‌دهیم که i علی یا ابوذر است. این علامت با حروف کوچک $\{c, d\}$ است. توجه کنید که علی و ابوذر در انتهای مرحله اول صرفاً حرکت خودشان و علامت شخصی را می‌بینند. با احتمال ρ علامت دو نفر همبسته است. در راستمایی علامت‌های همبسته داریم $\Pr(\{c, c\}|\{C, C\}) = 0.8\rho$ و $\Pr(\{d, d\}|\{C, C\}) = 0.2\rho$ برای حالتی که $\{C, C\}$ بازی کرده‌اند. اگر هر بازی دیگر انجام داده باشند $\{C, C\} \neq a$ احتمال علامت‌ها در حالت همبسته بصورت $\Pr(\{c, c\}|a) = 0.2\rho$ و $\Pr(\{d, d\}|a) = 0.8\rho$ است. بنابراین با احتمال $1 - \rho$ علامت بازیگران (مشروط) مستقل است و علامت هر بازیگر با احتمال $1 - \theta$ صحیح/دقیق و یا به عبارت $w(i) = a(j)$ است. بازیگران مرحله دوم را تنزیل نمی‌کنند!

- (a) فرض کنید اطلاع عمومی و یا $\rho = 1$ داریم. در این صورت راهبرد بهینه پارتو در تعادل رشته‌ای راهبردهای محض را بدست آورید؟ توضیح دهید چرا! (راهبرد بهینه را راهبردی تعریف می‌کنیم که بیشترین پیامد را برای هر دو دارد. راهنمایی: بازی مرحله دوم سه تعادل دارد و در مرحله اول $\{C, C\}$ بهینه است، گرچه تعادل تک‌مرحله‌ای نیست).
- (b) توزیع احتمالی دوگانه برای $(w(1), w(2))$ را مشروط به (C, C) و (D, C) بدست آورید؟
- (c) فرض کنید $\theta = \frac{1}{6}$ تعادلی که در بخش (a) بدست آوردید به ازای $\rho < \rho^*$ برقرار نیست. بزرگترین مقدار ρ^* را بدست آورید؟
- (d) فرض کنید $\rho = 0$ است. در این صورت راهبرد بهینه پارتو در تعادل رشته‌ای راهبردهای محض بدست آورید؟ آیا بازیگران می‌توانند با راهبرد ترکیبی حاصل بهتری بدست آورند؟ اگر آری، یک راهبرد ترکیبی با این ویژگی را پیشنهاد دهید. (می‌توانید فرض کنید θ خیلی کوچک است)

۴. (انصاف): فرض کنید مریم و فاطمه باید یک واحد را بین خودشان تقسیم کنند. در مرحله اول فاطمه تقسیم $(x, 1 - x)$ را پیشنهاد می‌دهد که $0 \leq x \leq 1$ است. فرق این بازی با چانه‌زنی جمشید و سجاد که در کلاس بحث کردیم آن است که دو خواهر به انصاف در بازی نیز اهمیت می‌دهند. به عبارت دیگر اگر تقسیم بصورت (x_1, x_2) باشد مطلوبیت فاطمه (بازیگر اول) و مریم (بازیگر دوم) بصورت زیر است:

$$u_1(x_1, x_2) = x_1 - \theta_1 |x_1 - x_2|$$

$$u_2(x_1, x_2) = x_2 - \theta_2 |x_1 - x_2|$$

که $\theta_1, \theta_2 > 0$ است و عبارت $| \cdot |$ قدرمطلق است. به عبارت دیگر اگر تسهیم نابرابر باشد از مطلوبیت هر کدام کسر می‌شود!

- (a) فرض کنید بازی صرفاً یک مرتبه تکرار می‌شود! به عبارت دیگر فاطمه که در مرحله اول $(x, 1 - x)$ را پیشنهاد می‌دهد، مریم می‌تواند قبول یا رد کند. اگر مریم قبول کند تقسیم ارائه شده اعمال می‌شود در غیر این صورت هر دو بازیگر صفر بدست می‌آورند. تمام تعادل کامل زیربازی این بازی را بدست آورید (بدیهی است که نتیجه تابعی از θ_1, θ_2 است).

- (b) حال فرض کنید این بازی T مرحله تکرار می‌شود و به نوبت در هر مرحله پیشنهاددهنده جابجا می‌شود. فاطمه هم در اولین مرحله و هم آخرین مرحله پیشنهاددهنده است! فرض کنید مریم و فاطمه هر دو ضریب تنزیل δ دارند! تعادل کامل زیربازی‌ها را بدست آورید!