به نام خداوند خالق انسان و آزادی او

نظریه‌ی بازی‌ها

بهار ۱۴۰۲

استاد: دکتر رحمتی

گردآورندگان: امیرمسعود باقری، ملیکا عبدی و علی امینی

دانشگاه صنعتی شریف

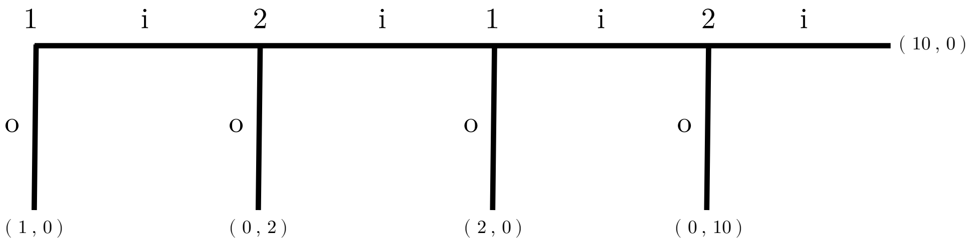
دانشکده‌ی مدیریت و اقتصاد

پاسخ امتحان پایان ترم

تاریخ امتحان: پنجشنبه ۱ تیر

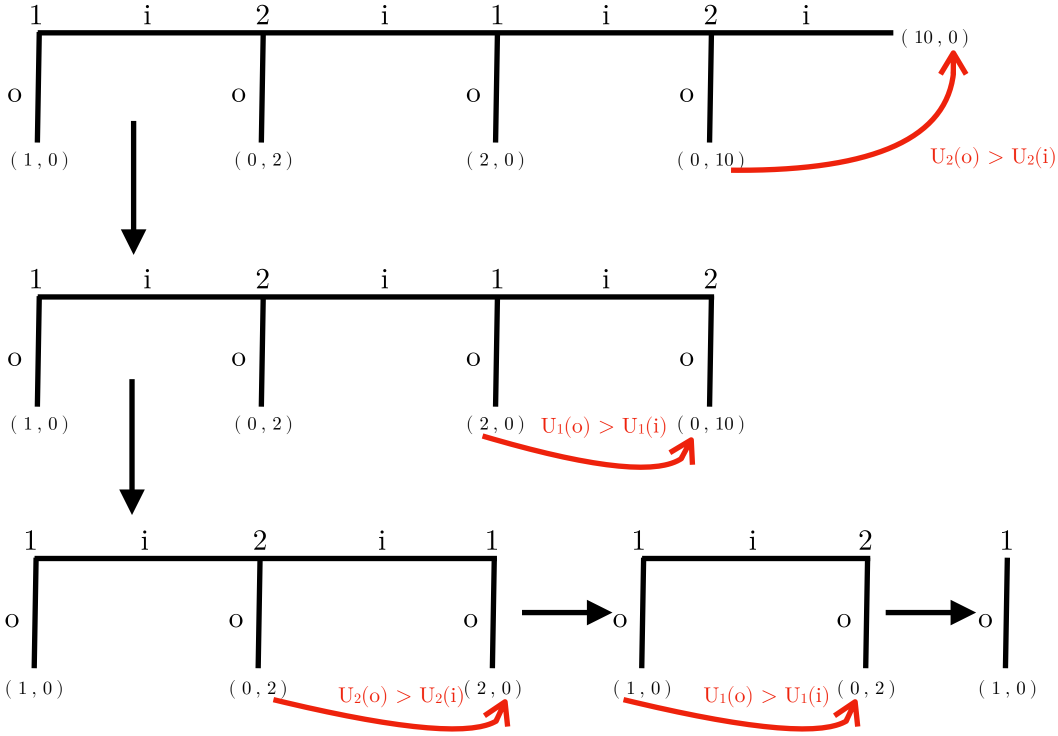
سوال ۱.

مطابق صورت سوال، در قسمت‌های **الف** و **ب** سوال، شکل درختی بازی به صورت زیر است:



الف)(۲ نمره)

حال برای یافتن تعادل کامل زیر بازی، با استفاده از استدلال پس‌رو داریم:



پس تنها تعادل کامل زیر بازی برابر است با:

$$\text{SPE} = \{oo\ ,\ oo\}$$

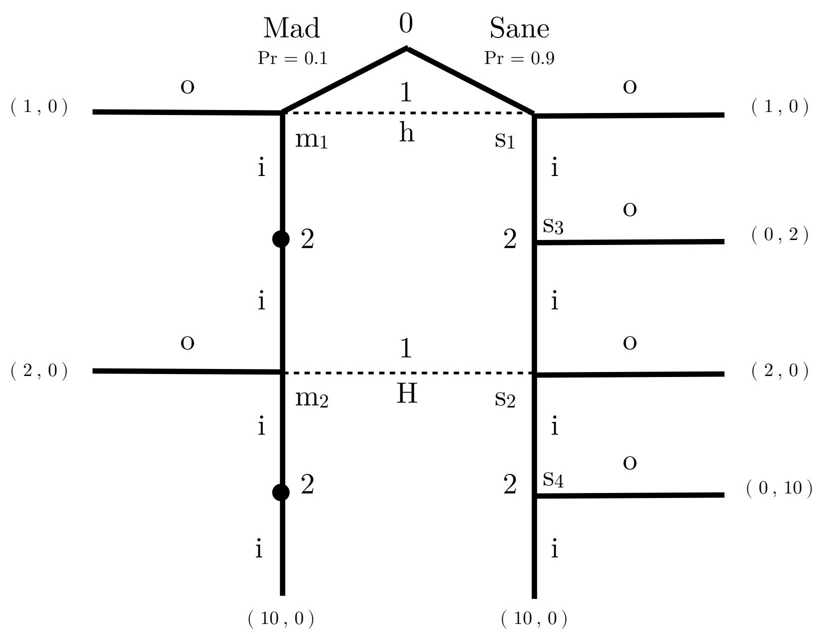
ب)(۳ نمره)
حال برای یافتن دست کم یک تعادل نش که تعادل کامل زیربازی‌ها نباشد، شکل جدولی بازی درختی را کشیده و مطابق آن کلیه‌ی تعادل‌های نش محض(و در صورت نیاز نش ترکیبی) را به دست می‌آوریم:

		بازیکن 2			
		i i	i o	o i	o o
بازیکن 1	i i	10 , 0	0 , 10	0 , 2	0 , 2
	i o	2 , 0	2 , 0	0 , 2	0 , 2
	o i	1 , 0	1 , 0	1 , 0	1 , 0
	o o	1 , 0	1 , 0	1 , 0	1 , 0

در نتیجه به شرح زیر چهار تعادل نش محض به دست آمد که یکی از آنها تعادل کامل زیربازی‌ها است و سه تعادل نش محض دیگر هر یک می‌تواند جواب قسمت ب باشد:

$NE_1 = \{oi , oi\}$
$NE_2 = \{oi , oo\}$
$NE_3 = \{oo , oi\}$
$NE_4 = SPE = \{oo , oo\}$

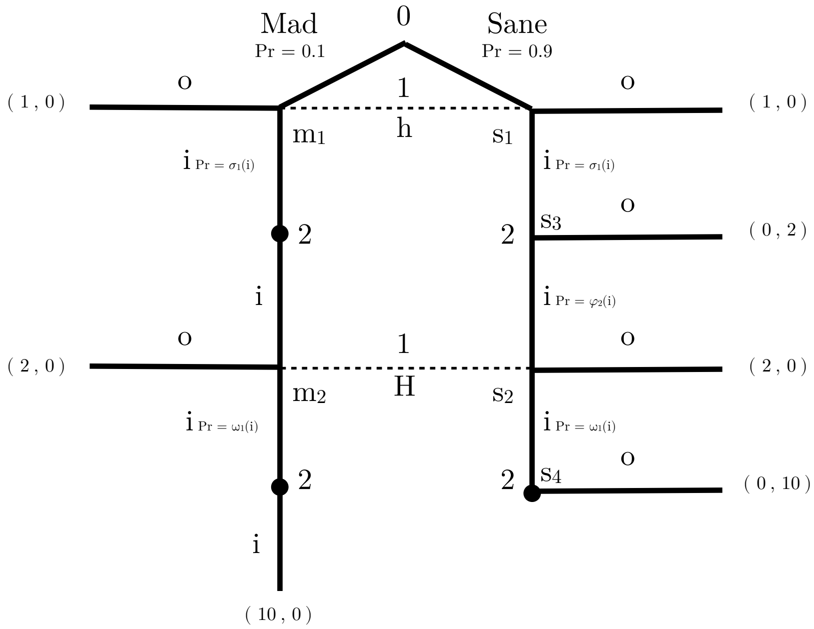
ج، د، ه)
حال برای پاسخ به سه بخش پایانی سوال، ابتدا ساختار درختی بازی در حالت جدید را کشیده(**۵ نمره**) و سپس اقدام به یافتن تعادل‌های بیزی خواسته شده و بعد تعادل‌های رشته‌ای می‌کنیم:



ابتدا با توجه به اینکه در حالت Sane، بازیگر دو مطابق صورت سوال، «*بر اساس شرط عقلانیت تصمیم‌گیری خواهد کرد*»، می‌توانیم در نقطه‌ی تصمیم‌گیری S_4 بنویسیم:

$@S_4 : U_2(o) = 10 > \ 0 = U_2(i)$

پس به راحتی می‌توان شکل درختی بازی را به صورت زیر بازنویسی کرد:



حال برای باورهای بازیگر اول در دیوانگی بازیگر دوم در مجموعه‌های اطلاعاتی h و H داریم:

$\mu_1(m_1|h) = \alpha = Pr_{(Mad)} \Longrightarrow \alpha = 0.1$
$\theta_1(m_2|H) = \beta$

حال برای بررسی بی تفاوتی بازیگر یک در مجموعه‌ی اطلاعاتی H داریم:

$@H : EU_1(o) = EU_1(i) \Longrightarrow 2 = \theta_1(m_2|H)\times 10 + (1 - \theta_1(m_2|H))\times 0 \Longrightarrow \beta = 0.2$

حال به ازای مقادیر مختلف β بازی را حل کرده و وجود تعادل بیزی در این حالت‌ها را چک می‌کنیم:

<u>If $\beta < 0.2$:</u>

$@H : EU_1(o) > \ EU_1(i) \Longrightarrow$ Player 1 will play o
$\Longrightarrow @S_3 : U_2(o) = 2 > 0 = U_2(i) \Longrightarrow$ Player 2 will play o
$\Longrightarrow @h : EU_1(o) = 1 > 0.2 = 2\alpha + 0\times(1 - \alpha) = EU_1(i) \Longrightarrow$ Player 1 will play o
$\Longrightarrow$ H will be off-equilibrium and $\beta < 0.2$ will be valid

پس در این حالت بی نهایت تعادل بیزی وجود دارد که در آن‌ها بازیگر 1 در h حرکت o را بازی می‌کند $\Longrightarrow$

<u>If $\beta > 0.2$:</u>

$@H : EU_1(o) < EU_1(i) \Longrightarrow$ Player 1 will play i
$\Longrightarrow @S_3 : U_2(o) = 2 < 10 = U_2(i) \Longrightarrow$ Player 2 will play i
$\Longrightarrow @h : EU_1(o) = 1 = 10\ \alpha + 0\times(1 - \alpha) = EU_1(i) \Longrightarrow$ Player 1 will mix i & o (σ)
$\Longrightarrow \beta = Pr_{(Mad)} \times \sigma_1(i) \ / \ (Pr_{(Mad)} \times \sigma_1(i) + Pr_{(Sane)} \times \sigma_1(i)) = 0.1 < 0.2$

پس شرط اولیه برای مقدار β نقض شد و در این حالت تعادل بیزی نداریم $\Longrightarrow$

If $\beta = 0.2$:

$@H : EU_1(o) = EU_1(i) \Longrightarrow$ Player 1 will mix i & o (ω)

$\Longrightarrow @S_3 : U_2(o) = 2\ \&\ U_2(i) = 10\omega_1(i) + 0\times(1 - \omega_1(i))$

if $U_2(o) < U_2(i)$:

$\Longrightarrow$ Player 2 will play i

$\Longrightarrow 2 < 10\omega_1(i) \Longrightarrow 0.2 < \omega_1(i)$

$\Longrightarrow @h: EU_1(o) = 1\ \&\ EU_1(i) = 2\alpha(1\text{-}\omega_1(i)) + 10\alpha\omega_1(i) + 2(1\text{-}\alpha)(1\text{-}\omega_1(i))$

$\Longrightarrow$ if $EU_1(o) > EU_1(i) \Longrightarrow \omega_1(i) > 1 \Longrightarrow$ تناقض

$\Longrightarrow$ if $EU_1(o) < EU_1(i) \Longrightarrow \omega_1(i) < 1 \Longrightarrow 0.2 < \omega_1(i) < 1$

$\Longrightarrow \beta = 0.1 \Longrightarrow$ تناقض با شرط اولیه برای β

$\Longrightarrow$ if $EU_1(o) = EU_1(i) \Longrightarrow \omega_1(i) = 1$

$\Longrightarrow \beta = 0.1 \Longrightarrow$ تناقض با شرط اولیه برای β

$\Longrightarrow$ پس تعادل بیزی‌ای در این حالت وجود ندارد که در آن بازیگر 2 در S_3 حرکت i را بازی کند

if $U_2(o) > U_2(i)$:

$\Longrightarrow$ Player 2 will play o

$\Longrightarrow 2 > 10\omega_1(i) \Longrightarrow 0.2 > \omega_1(i)$

$\Longrightarrow @h: EU_1(o) = 1\ \&\ EU_1(i) = 2\alpha(1\text{-}\omega_1(i)) + 10\alpha\omega_1(i) + (1\text{-}\alpha)(0)$

$\Longrightarrow$ if $EU_1(o) > EU_1(i) \Longrightarrow \omega_1(i) < 1 \Longrightarrow \omega_1(i) < 0.2$

$\Longrightarrow$ H will be off-equilibrium and $\beta = 0.2$ will be valid

$\Longrightarrow$ if $EU_1(o) < EU_1(i) \Longrightarrow \omega_1(i) > 1 \Longrightarrow$ تناقض

$\Longrightarrow$ if $EU_1(o) = EU_1(i) \Longrightarrow \omega_1(i) = 1 \Longrightarrow$ تناقض با شرط اولیه برای $\omega_1(i)$

$\Longrightarrow$ پس بینهایت تعادل بیزی در این حالت وجود دارد که بازیگر 1 در H با $\omega_1(i) < 0.2$ ترکیب کرده و در عین حال در h نیز حرکت o را بازی می‌کند

if $U_2(o) = U_2(i)$:

$\Longrightarrow$ Player 2 will mix i & o (φ)

$\Longrightarrow 2 = 10\omega_1(i) \Longrightarrow 0.2 = \omega_1(i)$

$\Longrightarrow @h: EU_1(o) = 1\ \&\ EU_1(i) = 2\alpha(1\text{-}\omega_1(i)) + 10\alpha\omega_1(i) +$
$(1\text{-}\alpha)(1\text{-}\varphi_2(i))(0) + (1\text{-}\alpha)(\varphi_2(i))(2)(1\text{-}\omega_1(i)) + (1\text{-}\alpha)(\varphi_2(i))(\omega_1(i))(0)$

$\Longrightarrow$ if $EU_1(o) > EU_1(i) \Longrightarrow \varphi_2(i) < 4/9$

$\Longrightarrow$ H will be off-equilibrium and $\beta = 0.2$ will be valid

$\Longrightarrow$ if $EU_1(o) = EU_1(i) \Longrightarrow \varphi_2(i) = 4/9 \Longrightarrow$ بازیکن 1 ترکیب می‌کند

$\Longrightarrow \beta = 0.2 \Longrightarrow$ شرط اولیه برای β صادق است

$\Longrightarrow$ if $EU_1(o) < EU_1(i) \Longrightarrow \varphi_2(i) < 4/9$

$\Longrightarrow \beta < 0.2 \Longrightarrow$ تناقض با شرط اولیه برای β

$\Longrightarrow$ پس بینهایت تعادل بیزی در این حالت وجود دارد که در آن بازیگر 1 در H با $\omega_1(i) = 0.2$ ترکیب کرده و در عین حال در h نیز حرکت o را بازی می‌کند و بازیگر دوم نیز با $\varphi_2(i) < 4/9$ در نقطه‌ی S_3 ترکیب می‌کند، و همچنین بی‌نهایت تعادل بیزی دیگر وجود دارد که در آنها نیز بازیگر 1 در H با $\omega_1(i) = 0.2$ ترکیب کرده ولیکن بازیگر 2 با $\varphi_2(i) = 4/9$ ترکیب کرده و در h نیز بازیگر 1 دو حرکت خود را به دلخواه ترکیب می‌کند. لذا در این دسته از تعادل‌های بیزی، بازی به مجموعه‌ی اطلاعاتی h می‌رسد.

جمع بندی تعادل‌های بیزی:

مطابق نتایجی که به ازای مقادیر مختلف β به دست آمد، تعادل‌های بیزی این بازی شامل موارد زیر است:

1) $BE_1 = \{oo\ ,\ iioo\}\ ,\ \beta \in [0,0.2)\ ,\ \alpha = 0.1$

در این حالت بی‌نهایت تعادل بیزی داریم که در همه‌ی آنها بازیگر 1 در مجموعه‌ی اطلاعاتی h(اولین مجموعه‌ی اطلاعاتی تصمیم‌گیری) حرکت o را انتخاب می‌کند***(۴ نمره**، بخش اول جواب قسمت ج).*

2) $BE_2 = \{o(\omega_1(i)\ ,\ 1\text{-}\omega_1(i))\ ,\ iioo\}\ ,\ \omega_1(i) \in (0,0.2)\ ,\ \beta = 0.2\ ,\ \alpha = 0.1$

در این حالت نیز بی‌نهایت تعادل بیزی داریم که در همه‌ی آنها بازیگر 1 در مجموعه‌ی اطلاعاتی h(اولین مجموعه‌ی اطلاعاتی تصمیم‌گیری) حرکت o را انتخاب می‌کند***(۴ نمره**، بخش دوم جواب قسمت ج).*

3) $BE_3 = \{o(\omega_1(i)\ ,\ 1\text{-}\omega_1(i))\ ,\ ii(\varphi_2(i)\ ,\ 1\text{-}\varphi_2(i))o\}\ ,\ \omega_1(i) = 0.2\ ,\ \varphi_2(i) \in (0,4/9)\ ,$
$\beta = 0.2\ ,\ \alpha = 0.1$

در این حالت نیز بی‌نهایت تعادل بیزی داریم که در همه‌ی آنها بازیگر 1 در مجموعه‌ی اطلاعاتی h(اولین مجموعه‌ی اطلاعاتی تصمیم‌گیری) حرکت o را انتخاب می‌کند***(۶ نمره**، بخش سوم جواب قسمت ج).*

4) $BE_4 = \{(\sigma_1(i)\ ,\ 1\text{-}\sigma_1(i))(\omega_1(i)\ ,\ 1\text{-}\omega_1(i))\ ,\ ii(\varphi_2(i)\ ,\ 1\text{-}\varphi_2(i))o\}\ ,\ \omega_1(i) = 0.2\ ,\ \varphi_2(i) = 4/9\ ,$
$\sigma_1(i) \in (0,1)\ ,\ \beta = 0.2\ ,\ \alpha = 0.1$

در این حالت نیز بی‌نهایت تعادل بیزی داریم که در همه‌ی آنها، نوبت بازی به بازیگر اول در دومین گره‌ی تصمیم‌گیری می‌رسد.***(۶ نمره**، بخش بیزی جواب قسمت ه).*

بررسی تعادل‌های رشته‌ای:

برای بررسی امکان وجود تعادل رشته‌ای در هر یک از سری تعادل‌های بیزی بالا، فرم کلی راهبرد تماماً ترکیبی برای هر یک از سری تعادل‌های بالا را می‌نویسیم و امکان وجود دست‌کم یک راهبرد خاص تماماً ترکیبی برای به دست آوردن باورهای فرض شده را بررسی می‌کنیم. بدیهتا مقدار α مستقل از این راهبردهای ترکیبی خواهد بود و امکان به دست آوردن β در رشته‌ای بودن این تعادل‌ها تعیین کننده است:

1) $\xi^n(i|H) = x^n\ ,\ \xi^n(i|h) = y^n\ ,\ \xi^n(i|S_3) = z^n\ ,\ \xi^n(i|S_4) = s^n$
if $n \to \infty : \xi^n \to BE_1$
$\Longrightarrow \beta^n = Pr_{(Mad)} \times x^n\ /\ (Pr_{(Mad)} \times x^n + Pr_{(Sane)} \times x^n \times z^n) = 0.1/(0.1 + 0.9z^n)$

بدیهی است که مستقل از فرم انتخاب شده برای مقادیر x و y و z، و رابطه‌ی آنها با یکدیگر، مقدار β^n در بی‌نهایت به مقدار 1 میل خواهد کرد که با باور فرض شده در تعادل بیزی مذکور($\beta \in [0,0.2)$) تناقض دارد و در این دسته از تعادل‌های بیزی، تعادل رشته‌ای نداریم***(۲/۵ نمره**، بخش اول جواب قسمت د).*

2) $\xi^n(i|H) = x^n\ ,\ \xi^n(i|h) = \omega_1(i) + y^n\ ,\ \xi^n(i|S_3) = z^n\ ,\ \xi^n(i|S_4) = s^n$
if $n \to \infty : \xi^n \to BE_2$
$\Longrightarrow \beta^n = Pr_{(Mad)} \times x^n\ /\ (Pr_{(Mad)} \times x^n + Pr_{(Sane)} \times x^n \times z^n) = 0.1/(0.1 + 0.9z^n)$

بدیهی است که مستقل از فرم انتخاب شده برای مقادیر x و y و z، و رابطه‌ی آنها با یکدیگر، مقدار β^n در بی‌نهایت به مقدار 1 میل خواهد کرد که با باور فرض شده در تعادل بیزی مذکور($\beta = 0.2$) تناقض دارد و در این دسته از تعادل‌های بیزی نیز، تعادل رشته‌ای نداریم***(۲/۵ نمره**، بخش دوم جواب قسمت د).*

3) $\xi^n(i|H) = x^n\ ,\ \xi^n(i|h) = 0.2 + y^n\ ,\ \xi^n(i|S_3) = \varphi_2(i) + z^n\ ,\ \xi^n(i|S_4) = s^n$
if $n \to \infty : \xi^n \to BE_3$
$\Longrightarrow \beta^n = Pr_{(Mad)} \times x^n\ /\ (Pr_{(Mad)} \times x^n + Pr_{(Sane)} \times x^n \times (\varphi_2(i) + z^n)) =$
$0.1/(0.1 + 0.9(\varphi_2(i) + z^n))$

بدیهی است که مستقل از فرم انتخاب شده برای مقادیر x و y و z، و رابطه‌ی آنها با یکدیگر، مقدار β^n در بی‌نهایت با توجه به اینکه مقدار $\varphi_2(i)$ حتما کوچکتر از کسر 4/9 است، به عددی بزرگتر از 0.2 میل خواهد کرد که با باور فرض شده در تعادل بیزی مذکور ($\beta = 0.2$) تناقض دارد و در این دسته از تعادل‌های بیزی نیز، تعادل رشته‌ای نداریم***(۲/۵ نمره**، بخش سوم جواب قسمت د).*

4) $\xi^n(i|H) = \sigma_1(i) + x^n$, $\xi^n(i|h) = \omega_1(i) + y^n$, $\xi^n(i|S_3) = 4/9 + z^n$, $\xi^n(i|S_4) = s^n$
if $n \to \infty : \xi^n \to BE_4$
$\Longrightarrow \beta^n = \Pr_{(Mad)} \times (\sigma_1(i) + x^n) \;/\; (\Pr_{(Mad)} \times (\sigma_1(i) + x^n) + \Pr_{(Sane)} \times (\sigma_1(i) + x^n) \times (4/9 + z^n)) = 0.1/(0.1 + 0.9(4/9 + z^n))$

بدیهی است که مستقل از فرم انتخاب شده برای مقادیر x و y و z، و رابطه‌ی آنها با یکدیگر، مقدار β^n در بی‌نهایت به مقدار 0.2 میل خواهد کرد که با باور فرض شده در تعادل بیزی مذکور($\beta = 0.2$) همخوانی دارد و در این دسته از تعادل‌های بیزی، تعادل رشته‌ای داریم*(**۲/۵ نمره**، بخش رشته‌ای جواب قسمت ه)*.

-۲

	X	Y
H	2,2	-1,1
L	4,-2	0,0

الف) کمترین بیشینه برای هر دو بازیگر ۰ است. چون:

فرض کنیم بازیگر اول با احتمال p حرکت H را بازی می‌کند. در این صورت مطلوبیت‌های بازیگر دوم خواهد بود:

$$u(X) = 4p - 2, u(Y) = p$$

بازیگر دوم می‌خواهد مطلوبیتش را حداکثر کند پس اگر p>2/3 باشد حرکت X را انتخاب می‌کند و اگر p<2/3 باشد حرکت y را انتخاب می‌کند. پس بازیگر اول برای کمترین کردن این مطلوبیت کافی است p=0 انتخاب کند. به طور مشابه برای بازیگر اول کمترین بیشینه مطلوبیت ۰ به دست می‌آید.

ب) کمترین دلتا وقتی به دست می‌آید که این استراتژی دنبال شود: در هر مرحله بازیگران حرکت با پیامد 2,2 را بازی می‌کنند و در هر مرحله اگر کسی منحرف شد از مرحلهٔ بعد کمترین بیشینه که تعادل نش نیز هست یعنی 0,0 بازی می‌شود. در این صورت باید داشته باشیم:

بازیگر اول انگیزه انحراف نداشته باشد: $\frac{2}{1-\delta} \geq 4 \rightarrow \delta \geq \frac{1}{2}$

بازیگر دوم انگیزه انحراف ندارد

ج) ترکیب مطلوبیت دو پیشامد به این صورت تولید می‌شود: در هر مرحله حرکت ترکیبی (2,2) و (4,-2) بازی می‌شود به این صورت که بازیگر ۲ با احتمال p حرکت H را بازی می‌کند و با احتمال 1-p حرکت L بازی می‌کند. فرض می‌کنیم پس از بازی هر حرکت بازیگرها مطلع میشوند که بازیگر رقیب چه حرکتی را با چه احتمالی بازی کرده است. اگر بازیگری تخطی کند تا ابد کمترین بیشینه بازی خواهد شد. در این صورت برای عدم انگیزه تخطی هر بازیگر باید داشته باشیم:

بازیگر اول:

$$\frac{2p + 4(1-p)}{1-\delta} \geq 4 \rightarrow \delta \geq \frac{p}{2}$$

بازیگر دوم:

$$\frac{2p + \quad -2(1-p)}{1-\delta} \geq p \rightarrow \delta \geq \frac{2-3p}{p}$$

برای شخصا معقول بودن، باید حرکت ترکیبی از کمترین بیشینهٔ دو بازیگر بیشتر باشد. همچنین بازیگر۲ که باید حرکت محض X را بازی کند نباید انگیزهٔ انحراف داشته باشد. پس برای شخصا معقول بودن داریم:

$$2p + \ \ -2\left(1-p\right) \geq p \rightarrow p \geq \frac{2}{3}$$

$$2p + \ \ -2\left(1-p\right) \geq 0 \rightarrow p \geq \frac{1}{4}$$

$$2p + 4\left(1-p\right) \geq 0 \rightarrow p \leq 2$$

اشتراک چند نامساوی به دست آمده به دست می‌دهد: $\delta \geq \frac{1}{3}$

د) در این حالت برخلاف بخش قبل بازیگران قبل از انجام حرکت می‌دانند که قرار است کدام حالت بازی شود. در واقع قبل از بازی هر مرحله سیگنالی به بازیگران داده می‌شود که دو حالت a و b دارد. اگر مقدار سیگنال a باشد یعنی بازیگران باید حالتی را بازی کنند که به پیامد 2,2 منتهی شود (یعنی بازیگر اول H و بازیگر دوم X بازی کند). اگر سیگنال b باشد یعنی بازیگران باید حالتی را بازی کنند که به پیامد 4,-2 منتهی شود. احتمال آمدن سیگنال a برابر با p و احتمال آمدن سیگنال b برابر با 1-p خواهد بود. اگر یکی از بازیگران براساس سیگنال بازی نکند تا انتها تعادل 0,0 بازی می‌شود که کمترین بیشینه مطلوبیت است.

بنابراین بازیگر اول برای این که انگیزهٔ انحراف نداشته باشد باید داشته باشیم:

$$2 + \frac{u_1\delta}{1-\delta} \geq 4$$

که در آن u1 مقدار مطلوبیت بازیگر اول است در صورتی که به دستورالعمل سیگنال پایبند بماند. یعنی:

$$u_1 = 2p + 4\left(1-p\right) = 4 - 2p$$

در نتیجه:

$$2 + \frac{\left(4-2p\right)\delta}{1-\delta} \geq 4 \rightarrow \left(2-p\right)\delta \geq 1-\delta \rightarrow \delta \geq \frac{1}{3-p}$$

برای بازیگر دوم باید داشته باشیم:

$$-2 + \frac{u_2\delta}{1-\delta} \geq 0$$

که در آن u2 مقدارمطلوبیت بازیگر دوم است در صورتی که به دستورالعمل سیگنال پایبند بنماند:

$$u_2 = 2p - 2\left(1-p\right) = 4p - 2$$

در نتیجه:

$$-2+\frac{(4p-2)\delta}{1-\delta}\geq 0\rightarrow (2p-1)\delta\geq 1-\delta\rightarrow \delta\geq\frac{1}{2p}$$

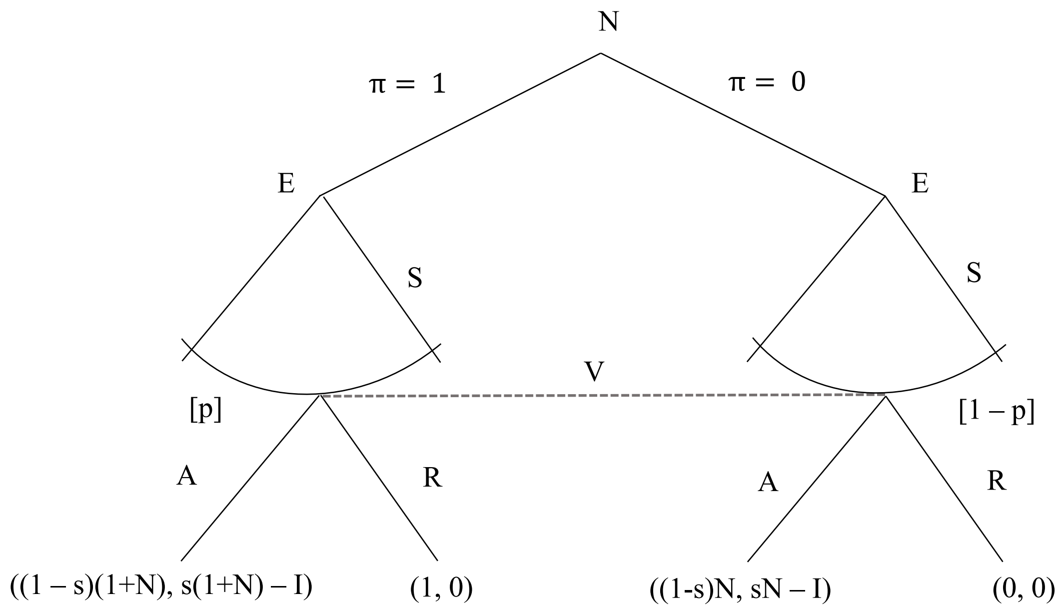
همواره $1/2p>1/(3-p)$ است بنابراین اشتراک دو شرط به دست آمده روی دلتا به صورت زیر است:

$$\delta\geq\frac{1}{2p}$$

پاسخ‌نامه سوال سوم امتحان پایان‌ترم نظریه بازی‌ها – نیم‌سال دوم ۱۴۰۱-۱۴۰۲

سوال سوم (۳۰ نمره)

نمودار درختی بازی در حالت کلی به‌صورت زیر است:



الف) (۶ نمره)

در این صورت بازیگر E در هر دو حالت پیشنهاد s = 0 را می‌دهد. برای به‌دست آوردن باور p که تعادل بیزی مورد اشاره در صورت سوال را ارضا کند داریم:

- شرط عقلایی رشته‌ای بودن حرکت بازیگر V برای رد کردن (R) پیشنهاد:

$$EU_V(R|\, p, s \;=\; 0) > EU_V(A\,|\, p, s \;=\; 0)$$

$$0 \times p + 0 \times (1-p) > (0 \times N - I) \times (1-p) + (0 \times (1+N) - I) \times p$$

$$0 > -I$$

چون I همواره عددی مثبت است، بنابراین به‌ازای هر p عبارت بالا برقرار است.

اما با کمی دقت متوجه می‌شویم که بازیگر E به‌طور بالقوه انگیزه انحراف از s = 0 دارد. برای مثال، زمانی که $\pi = 0$ است، بازیگر E می‌تواند با پیشنهاد s > 0 مطلوبیت بیشتری کسب کند و منحرف شود. پس به‌ازای **هیچ مقداری از p** تعادل بیزی محض وجود ندارد.

ب) (۶ نمره)
ابتدا بررسی می‌کنیم که آیا بازیگر E انگیزه انحراف دارد یا نه:

$$U_E(s > 0|A) \;>\; U_E(s = 0|R)$$

$$\pi = 1:\; (1-s)(1+N) > 1 \quad \Rightarrow s < \frac{N}{1+N}$$

$$\pi = 0:\;\; (1-s)N > 0 \quad \Rightarrow\; s <\; 1$$

اکنون بررسی می‌کنیم که به‌ازای این بازه s، رابطه عقلایی رشته‌ای بودن بازیگر V برقرار است یا نه

شرط عقلایی رشته‌ای بودن حرکت بازیگر V برای قبول کردن (A) پیشنهاد:

$$EU_V(R|\, p, s \;>\; 0) < EU_V(A\,|\, p, s \;>\; 0)$$

$$0 \times p + 0 \times (1-p) < (s \times N - I) \times (1-p) + (s \times (1+N) - I) \times p$$

$$0 < ps \;+\; sN \;-\; I$$

$$p > \frac{I}{s} - N$$

با توجه به بازه s داریم:

$$s < \frac{N}{1+N} \quad \rightarrow \qquad \frac{1}{s} > \frac{N+\,1}{N} \quad \rightarrow \quad \frac{I}{s} - N > \frac{N+\,1}{N} I - N \;\rightarrow \quad \mathrm{p} > \;\frac{I}{s} - N > \frac{N+\,1}{N} I - N$$

$$\mathrm{p} > \frac{N+\,1}{N} I - N \quad \rightarrow \quad pN > IN + I - N^2$$

که با فرض صورت سوال در تناقض است. بنابراین هیچ تعادل بیزی محضی در این حالت وجود ندارد.

ج) (۴ نمره)
شرایط تعادل کاملا مانند قسمت قبل است. در قسمت قبل شرط عدم انحراف بازیگر E و شرط عقلایی رشته‌ای بودن حرکت V برای قبول کردن پیشنهاد (A) را بررسی کردیم. بنابراین کافی است تا شرط سازگاری باورهای بازیگر V با قانون بیز را نیز بررسی کنیم.

$$P = \frac{Pr(\pi = 1)}{Pr(\pi = 1) + Pr(\pi = 0)} = Pr(\pi = 1)$$

با توجه به قسمت قبل، شرط کافی برقراری تعادل بیزی محض برابر است با:

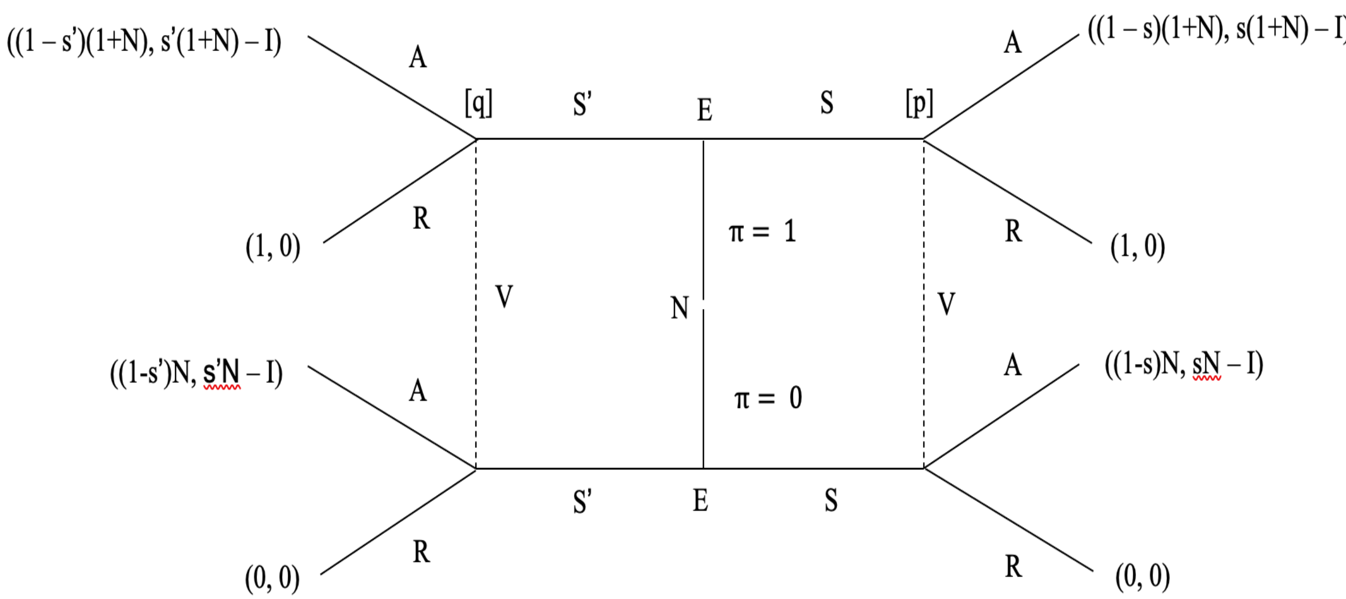
$$\mathrm{p} = Pr(\pi = 1) > \frac{N+1}{N} I - N$$

بنابراین تعادل بیزی به‌صورت زیر است:

$$\boxed{PBE = \left\{ s > 0, AA, p = Pr(\pi = 1) > \frac{N+1}{N} I - N \right\}}$$

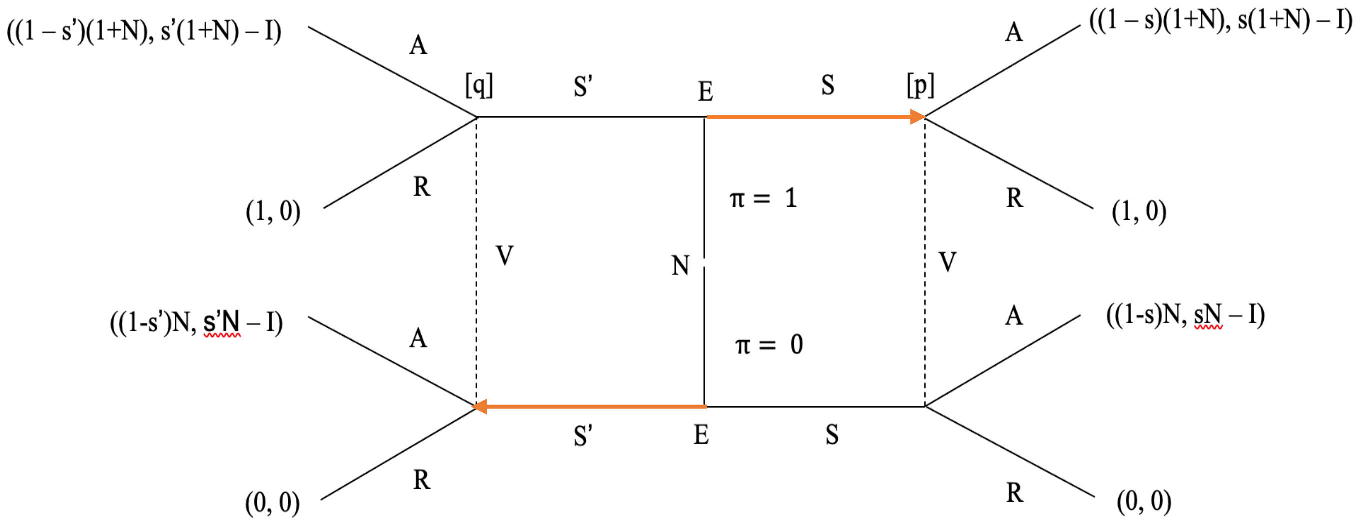
د) (۱۰ نمره)

در این قسمت در حقیقت به دنبال یافتن تعادل‌های بیزی ناهمسو (separating) در ساختار بازی زیر هستیم.



اکنون باید تعادل بیزی محض ناهم‌سو را به‌گونه‌ای بیابیم که بازیگر V حداقل در یک مورد پیشنهاد را قبول کند.

با توجه به تقارن بازی می‌توان یکی از دو تعادل ناهم‌سو را بررسی کرد که در شکل زیر نشان داده شده است:



در این حالت با استفاده از قانون بیز $p = 1$ و $q = 0$ است. بازیگر E وقتی $\pi = 1$ است پیشنهاد s و در غیر اینصورت پیشنهاد s' را ارائه می‌کند. به‌علاوه برای آنکه بازیگر V حداقل یکبار پیشنهاد را قبول کند، سه حالت ممکن است که هرکدام به‌صورت جداگانه بررسی می‌شود.

- **حالت اول: بازیگر V وقتی $\pi = 1$ است حرکت A و در غیر اینصورت حرکت R را انجام دهد. (A, R)**

برای بازیگر V:

$$\pi = 1: \quad A \;\rightarrow\; s(1+N) - I > 0 \quad \Rightarrow s > \frac{I}{1+N}$$

$$\pi = 0: \quad R \;\rightarrow\; s'N - I < 0 \quad \Rightarrow s' < \frac{I}{N}$$

بازیگر E برای آنکه انگیزه انحراف نداشته باشد:

$$\pi = 1: \quad (1-s)(1+N) > 1 \quad \Rightarrow s < \frac{N}{1+N}$$

$$\pi = 0: \quad 0 \ngtr (1-s)N$$

بنابراین در حالت $\pi = 0$ بازیگر E انگیزه انحراف دارد و این حالت نمی‌تواند تعادل باشد.

- **حالت دوم: بازیگر V وقتی $\pi = 1$ است حرکت R و در غیر اینصورت حرکت A را انجام دهد. (R, A)**

برای بازیگر V:

$$\pi = 1: \quad R \;\rightarrow\; s(1+N) - I < 0 \quad \Rightarrow s < \frac{I}{1+N}$$

$$\pi = 0: \quad A \;\rightarrow\; s'N - I > 0 \quad \Rightarrow s' > \frac{I}{N}$$

بازیگر E برای آنکه انگیزه انحراف نداشته باشد:

$$\pi = 1: \quad (1-s')(1+N) < 1 \quad \Rightarrow s' < \frac{N}{1+N}$$

$$\pi = 0: \quad 0 < (1-s')N \quad \Rightarrow s' < 1$$

بازیگر E انگیزه انحراف ندارد. بنابراین با اشتراک گرفتن بر روی بازه‌های به‌دست آمده تعادل بیزی محض ناهم‌سو به صورت زیر است.

$$\boxed{PBE = s < \frac{I}{1+N},\ \ \frac{I}{N} < s' < \frac{N}{1+N}\ \ ,RA\ \ ,p = 1, q = 0}$$

- **حالت سوم: بازیگر V در هر صورت حرکت A را انجام دهد. (A, A)**

برای بازیگر V:

$$\pi = 1: \quad A \;\rightarrow\; s(1+N) - I > 0 \quad \Rightarrow s > \frac{I}{1+N}$$

$$\pi = 0: \quad A \;\rightarrow\; s'N - I > 0 \quad \Rightarrow s' > \frac{I}{N}$$

بازیگر E برای آنکه انگیزه انحراف نداشته باشد:

$$\pi = 1: \quad (1-s')(1+N) < (1-s)(1+N) \quad \Rightarrow\; s' > s$$

$$\pi = 0: \quad (1-s)N < (1-s')N \quad \Rightarrow\; s' < s$$

اشتراکی برای بازه‌های s و s' وجود ندارد، بنابراین این حالت نمی‌تواند تعادل باشد.

بنابراین با توجه به تقارن بازی، نتایج حالت دیگر بازی ناهم‌سو (q =1 و p = 0) هم به همین شکل خواهد بود. در نتیجه در مجموع دو نوع تعادل بیزی ناهم‌سو وجود دارد.

$$\boxed{PBE = \{s < \frac{I}{1+N},\ \ \frac{I}{N} < s' < \frac{N}{1+N}\ \ ,RA\ \ ,p = 1, q = 0\}}$$

$$\boxed{PBE = \{s' < \frac{I}{1+N},\ \ \frac{I}{N} < \mathrm{s} < \frac{N}{1+N}\ \ ,RA\ \ ,p = 0, q = 1\}}$$

هــ) (۴ نمره)

- $\boldsymbol{\pi = 0}$

در این حالت بازیگر E پیشنهاد s را می‌دهد و بازیگر V تصمیم می‌گیرد که آن را قبول و یا رد کند.

$$\boldsymbol{V}: \begin{cases} \boldsymbol{A\ \ if\ \ sN - I > 0\ \ \Rightarrow s > \dfrac{I}{N}} \\ \boldsymbol{R\ \ if\ \ sN - I < 0\ \ \Rightarrow s < \dfrac{I}{N}} \end{cases}$$

بازیگر E درصورتی که V پیشنهاد او را رد کند، سود صفر کسب می‌کند ولی اگر قبول کند، سود او مثبت است. بنابراین ترجیح می‌دهد که بازیگر V پیشنهاد را بپذیرد. در نتیجه $\boldsymbol{s} > \frac{\boldsymbol{I}}{\boldsymbol{N}}$ را پیشنهاد می‌کند. در این صورت تعادل‌های نش به‌صورت زیر است:

$$\boxed{NE\ = \left\{\boldsymbol{s} > \frac{\boldsymbol{I}}{\boldsymbol{N}},\ A\right\}}$$

- $\boldsymbol{\pi = 1}$

در این حالت بازیگر E پیشنهاد s’ را می‌دهد و بازیگر V تصمیم می‌گیرد که آن را قبول و یا رد کند.

$$\boldsymbol{V}: \begin{cases} \boldsymbol{A\ \ if}\ \ s'(\boldsymbol{1+N}) - \boldsymbol{I > 0}\ \ \Rightarrow s' > \dfrac{\boldsymbol{I}}{\boldsymbol{1\ +\ N}} \\ \boldsymbol{R\ \ if}\ \ s'(\boldsymbol{1+N}) - \boldsymbol{I < 0}\ \ \Rightarrow s' < \dfrac{\boldsymbol{I}}{\boldsymbol{1\ +\ N}} \end{cases}$$

بازیگر E درصورتی که V پیشنهاد را رد کند مطلوبیت ۱ بدست می‌آورد. باید دید آیا انگیزه انحراف به مقدار s' دیگری را دارد یا نه.

$$E: chooses\ A\ \ if\ \ (1 - s')(1+N) > 1 \quad \Rightarrow \quad s' < \frac{N}{1+N}$$

در نتیجه اشتراک بازه‌های s'، تعادل نش خواهد بود.

$$\boxed{NE\ = \left\{\frac{\boldsymbol{I}}{\boldsymbol{1\ +\ N}} < s' < \frac{N}{1+N},\ A\right\}}$$

سوال ۲.

	X	Y
H	۲,۲	۱,۱-
L	۴,-۲	۰,۰

الف) (۱۵ نمره از ۱۰۰ نمره)

کمترین بیشینه برای هر دو بازیگر ۰ است. چون:

فرض کنیم بازیگر اول با احتمال p حرکت H را بازی می‌کند. در این صورت مطلوبیت‌های بازیگر دوم خواهد بود:

$$u(X) = 4p - 2, u(Y) = p$$

بازیگر دوم می‌خواهد مطلوبیتش را حداکثر کند پس اگر p>۲/۳ باشد حرکت X را انتخاب می‌کند و اگر p<۲/۳ باشد حرکت y را انتخاب می‌کند. پس بازیگر اول برای کمترین کردن این مطلوبیت کافی است p=۰ انتخاب کند. به طور مشابه برای بازیگر اول کمترین بیشینه مطلوبیت ۰ به دست می‌آید.

ب) (۲۵ نمره از ۱۰۰ نمره)

کمترین دلتا وقتی به دست می‌آید که این استراتژی دنبال شود: در هر مرحله بازیگران حرکت با پیامد ۲,۲ را بازی می‌کنند و در هر مرحله اگر کسی منحرف شد از مرحله بعد کمترین بیشینه که تعادل نش نیز هست یعنی ۰,۰ بازی می‌شود. در این صورت باید داشته باشیم:

بازیگر اول انگیزه انحراف نداشته باشد: $\frac{2}{1-\delta} \geq 4 \rightarrow \delta \geq \frac{1}{2}$

بازیگر دوم انگیزه انحراف ندارد

ج) (۳۵ نمره از ۱۰۰ نمره)

ترکیب مطلوبیت دو پیشامد به این صورت تولید می‌شود: در هر مرحله حرکت ترکیبی (۲,۲) و (۴,-۲) بازی می‌شود به این صورت که بازیگر ۲ با احتمال p حرکت H را بازی می‌کند و با احتمال ۱-p حرکت L بازی می‌کند. فرض می‌کنیم پس از بازی هر حرکت بازیگرها مطلع میشوند که بازیگر رقیب چه حرکتی را با چه احتمالی بازی کرده است. اگر بازیگری تخطی کند تا ابد کمترین بیشینه بازی خواهد شد. در این صورت برای عدم انگیزه تخطی هر بازیگر باید داشته باشیم:

بازیگر اول:

$$\frac{2p + 4(1-p)}{1-\delta} \geq 4 \rightarrow \delta \geq \frac{p}{2}$$

بازیگر دوم:

$$\frac{2p + \ -2(1-p)}{1-\delta} \geq p \rightarrow \delta \geq \frac{2-3p}{p}$$

برای شخصا معقول بودن، باید حرکت ترکیبی از کمترین بیشینهٔ دو بازیگر بیشتر باشد. پس برای شخصا معقول بودن داریم:

$$2p + \ -2(1-p) \geq 0 \rightarrow p \geq \frac{1}{2}$$

$$2p + 4(1-p) \geq 0 \rightarrow p \leq 2$$

اشتراک چند نامساوی به دست آمده به دست می‌دهد: $\delta \geq 1$

د) (۲۵ نمره از ۱۰۰ نمره)

در این حالت برخلاف بخش قبل بازیگران قبل از انجام حرکت می‌دانند که قرار است کدام حالت بازی شود. در واقع قبل از بازی هر مرحله سیگنالی به بازیگران داده می‌شود که دو حالت a و b دارد. اگر مقدار سیگنال a باشد یعنی بازیگران باید حالتی را بازی کنند که به پیامد ۲,۲ منتهی شود (یعنی بازیگر اول H و بازیگر دوم X بازی کند). اگر سیگنال b باشد یعنی بازیگران باید حالتی را بازی کنند که به پیامد ۲-,۴ منتهی شود. احتمال آمدن سیگنال a برابر با p و احتمال آمدن سیگنال b برابر با p-۱ خواهد بود. اگر یکی از بازیگران براساس سیگنال بازی نکند تا انتها تعادل ۰,۰ بازی می‌شود که کمترین بیشینه مطلوبیت است.

بنابراین بازیگر اول برای این که انگیزهٔ انحراف نداشته باشد باید داشته باشیم:

$$2 + \frac{u_1\delta}{1-\delta} \geq 4$$

که در آن u۱ مقدار مطلوبیت بازیگر اول است در صورتی که به دستورالعمل سیگنال پایبند بماند. یعنی:

$$u_1 = 2p + 4(1-p) = 4 - 2p$$

در نتیجه:

$$2 + \frac{(4-2p)\delta}{1-\delta} \geq 4 \rightarrow (2-p)\delta \geq 1-\delta \rightarrow \delta \geq \frac{1}{3-p}$$

برای بازیگر دوم باید داشته باشیم:

$$-2 + \frac{u_2\delta}{1-\delta} \geq 0$$

که در آن u۲ مقدارمطلوبیت بازیگر دوم است در صورتی که به دستورالعمل سیگنال پایبند بنماند:

$$u_2 = 2p - 2(1-p) = 4p - 2$$

در نتیجه:

$$-2 + \frac{(4p-2)\delta}{1-\delta} \geq 0 \rightarrow (2p-1)\delta \geq 1-\delta \rightarrow \delta \geq \frac{1}{2p}$$

همواره (p-۳)/۱<۱/۲p است بنابراین اشتراک دو شرط به دست آمده روی دلتا به صورت زیر است:

$$\delta \geq \frac{1}{2p}$$

که اشتراک آن با شرط فردی عقلایی (مشابه بخش قبل $p \geq \frac{1}{2}$) به $\delta \geq 1$ میرسیم و در نتیجه این بخش از سوال اشتباه است.