

# امتحان نهایی، اصول نظریه بازی‌ها

بهار 1401 – محمدحسین رحمتی

زمان امتحان 180 دقیقه است.

1. (واکسن کرونا و تعادل کامل زیربازی‌ها) سیاست توزیع واکسن و خرید توسط دولت در چند ماه اخیر خیلی بحث شده است. در ایران مشابه سایر کشورها که کل هزینه واکسن را دولت داده است ولی چون رایگان در اختیار مراکز بهداشتی گذاشته اتلاف زیاد داشته است. سایر کشورها سیاست رقابت در سمت عرضه‌کننده را اتخاذ کرده است. برای مثال، دو بنگاه فایزر و مدرنا به صورت همزمان واکسن را به بازار عرضه کردند. بدیهی است دو واکسن جایگزین کامل یکدیگر بودند. هزینه تولید هر واکسن برابر  $C$  است و آنها واکسن را به مراکز بهداشتی برای تزریق می‌فروشند. بنگاه  $i$  قیمت  $p_i$  را برای واکسن خود انتخاب می‌کند و میزان تخفیف را  $d_i$  تعیین می‌کند پس مراکز بهداشتی مبلغ  $p_i - d_i$  را می‌پردازند. توجه کنید که بدلیل حمایت دولتی در زمان تحقیق و توسعه و قراردادی که ابتدای فاز تحقیق و توسعه منعقد شده بود سقف قیمت واکسن برابر  $C > \bar{p}$  برای این دو بنگاه تعیین شده است که این دو بنگاه نمی‌توانند قیمت اعلامی بالاتری داشته باشند. همچنین برای سادگی فرض می‌کنیم بدلیل ضدانحصاری بنگاه نمی‌تواند قیمت خالص کمتر از هزینه تمام شده بگذارد بنابراین قید  $p_i - d_i > C$  صدق می‌کند. تمام افراد جامعه ثابت و برابر  $Q$  است و مراکز درمانی مکلف هستند که تمام افراد جامعه را واکسن بزنند. توزیع افراد جامعه میان مراکز بهداشتی نیز برونزا است. دولت برای هر مرکز بهداشتی که هر نفر را واکسن  $i$  بزند مبلغ  $q_i$  را به دکتر می‌پردازد. دکتر برای انتخاب واکسن به سود خود نگاه می‌کند. اگر دکترها بین دو واکسن بی‌تفاوت بودند فرض می‌کنیم حرکتی را انجام دهند که بتوان از تعادل دفاع کرد.

**الف)** فرض کنید که بازی ایستا است و تنها یک بار بازی می‌شود. بنگاه‌ها قیمت واکسن و میزان تخفیف را یکبار و همزمان تصمیم می‌گیرند و اعلام می‌کنند. سپس هر دکتر واکسن را انتخاب می‌کند. همچنین فرض کنید که  $q_i = \alpha p_i$  که  $\alpha > 1$  است.

**الف-1)** تعادل نش برای این مسئله را حل کنید. در این تعادل قیمت اعلامی، میزان تخفیف و قیمت خالص چقدر است؟

**الف-2)** آیا تعادل نش دیگری وجود دارد؟ توضیح دهید و اثبات کنید.

**ب)** حال بازی دو مرحله‌ای فوق را فرض کنید. فرض کنید هر دو بنگاه بصورت همزمان قیمت اعلامی و میزان تخفیف را تعیین می‌کنند و پس از مشاهده نتیجه بازی مرحله اول در مرحله دوم بصورت همزمان با یکدیگر قیمت اعلامی و میزان تخفیف را تعیین می‌کنند. در مرحله اول پرداخت به بنگاه مشابه بخش فوق است یعنی پرداختی به بنگاه  $i$  با قیمت اعلامی  $p_i^1$  در مرحله اول بصورت  $q_i^1 = \alpha p_i^1$  است (1 بالان نشان به منزله مرحله اول است) در مرحله دوم جبران قیمت بنگاه کمی متفاوت است. اگر بنگاه  $i$  در مرحله اول فروش داشته بود در مرحله دوم بر اساس قیمت خالص مرحله اول پرداخت به بنگاه  $i$  انجام می‌شود. به عبارت دیگر  $q_i^2 = \alpha(p_i^1 - d_i^1)$  ولی اگر بنگاه در مرحله اول (مرحله قبل و دوز اول) فروش نداشته بود پرداخت دولت به بنگاه  $i$  بر اساس قیمت اعلامی مرحله دوم و یا  $q_i^2 = \alpha p_i^2$  است. فرض کنید بنگاه‌ها زمان را با ضریب تنزیل  $\delta \in (0, 1)$  حال می‌کنند. مراکز درمانی صرفاً بر اساس سود همان دوره خود تصمیم می‌گیرند و اصلاً به سود بلندمدت و اثر تصمیم‌شان بر دور بعدی فکر نمی‌کنند (به عبارت دیگر فرض می‌شود برای مراکز درمانی  $\delta = 0$ )

**ب-1)** فضای راهبردهای هر بنگاه را مشخص کنید.

**ب-2)** اگر قیمت‌ها، تخفیفات و میزان فروش هر بنگاه در مرحله اول مشخص باشد برای تعادل (ممکن است پیوسته باشد) در مرحله دوم حل کنید. آیا یکتا است؟ توضیح دهید و اثبات ارائه دهید.

**ب-3)** آیا تعادل کامل زیربازی‌ها وجود دارد که هر دو بنگاه در مرحله اول فروش داشته باشند؟ توضیح دهید و اثبات ارائه کنید.

**ب-4)** تعادل کامل زیربازی‌های بازی دو مرحله‌ای را بدست آورید قیمت‌های اعلامی، تخفیفات، قیمت خالص و میزان پرداختی دولت به هر دو بنگاه را به صورت تابعی از  $\delta$  بدست آورید. به نظر شما افزایش رقابت میزان پرداختی دولت را کم یا زیاد خواهد کرد؟

2. (تامین مالی R&D و تعادل رشته‌ای برای باورسازی کیفیت محصول) فرض کنید دو بنگاه بصورت همزمان بر روی یک کار

تحقیقاتی مطالعه و سرمایه‌گذاری می‌کنند و یک بانک نیز وجود دارد که تامین مالی پروژه را مدنظر دارد. ابتدا دو بنگاه همزمان تصمیم می‌گیرند که بر روی پروژه تلاش بالا و یا تلاش پایین داشته باشند. پس از انجام تحقیق آنها نتیجه و محصول ابتدایی (پروتوتایپ) را به بانک نشان می‌دهند. اگر هر دو بنگاه تلاش بالا کرده باشند ارائه محصول خوب پیش می‌رود و اگر غیر از این باشد (یکی یا هر دو تلاش پایین کرده باشند)

ارائه محصول ضعیف است. بانک تنها نتیجه ارائه محصول را می بیند و هیچ اطلاعی از میزان تلاش هر بنگاه ندارد. پس از ارائه محصول بانک تصمیم می گیرد که بر روی محصول سرمایه گذاری کند یا خیر. تمام بازیگران ریسک خنثی هستند.

پیامدها برای بنگاهها به این صورت است که اگر سرمایه گذاری انجام شود هر کدام 5 واحد مطلوبیت می برند و در صورت عدم سرمایه گذاری مطلوبیت صفر می برند. همچنین تلاش بالا برای هر بنگاه هزینه 1 واحد دارد و اگر تلاش پایین باشد هزینه ای ندارد.

پیامدها برای بانک به صورت زیر است: سرمایه گذاری برای بانک هزینه 2 دارد و اگر هر بنگاه تلاش بالا کرده باشد 3 واحد فایده دارد (اگر هر دو بنگاه تلاش بالا کرده باشند فایده 6 و اگر یکی تلاش بالا کرده باشد فایده 3 و اگر هیچ کدام تلاش بالا نکرده باشند فایده صفر دارد) اگر بانک سرمایه گذاری نکند برای وی هزینه و فایده صفر دارد.

**1-2** بازی درختی این مسئله را ترسیم کنید.

**2-2** راهبردهای رفتاری هر بازیگر را تعریف کنید و ارزیابی را تعریف کنید.

**3-2** تمام تعادل های با حرکات محض منطبق بر عقاید (بیزی) را بدست آورید.

**4-2** تمام تعادل های با حرکات محض رشته ای را بدست آورید؟

**5-2** تمام تعادل های رشته ای این بازی را بدست آورید؟

**3. (چماق و هویج و بازی های تکراری)** بازی با دو بازیگر با پیامدهای تک مرحله ای را فرض کنید.

	C	D	E
C	1,1	-1, 2	-x+1, -x+1
D	2,-1	0, 0	-x+1, -x+1
E	-x+1, -x+1	-x+1, -x+1	-x, -x

بازیگران پیامدهای آتی شان را با ضریب تنزیل  $\delta \in (0,1)$  انجام می دهند. سوالات زیر را پاسخ دهید.

**1-3** فرض کنید  $x = 1$  بازه  $\delta$  را مشخص کنید که تعادل کامل زیربازی ها وجود داشته باشد که بصورت کامل همکاری باشد و در هر مرحله C بازی شود. به عبارت دیگر  $((C,C),(C,C), \dots)$

**2-3** فرض کنید  $x = 3$  بازه  $\delta$  را مشخص کنید که تعادل کامل زیربازی ها وجود داشته باشد که بصورت کامل همکاری باشد و در هر مرحله C بازی شود. به عبارت دیگر  $((C,C),(C,C), \dots)$

**3-3** فرض کنید  $\delta = \frac{1}{3}$  در این صورت مقادیر  $x \geq 0$  را پیدا کنید تعادل  $((C,C),(C,C), \dots)$  تعادل کامل زیربازی ها است.