نظریه بازی‌ها

فصل پیوست ۱

بازی همکارانه

بازی همکارانه و غیرهمکارانه

- بازی غیرهمکارانه:
  - بازیگران در تعامل (تقابل) به جواب می‌رسند.
  - توافق قابل اعمال نیست و بازیگر در خصوص «خودش» تصمیم می‌گیرد.
  - مانند تعادل بیزی در بازی پویا و تعادل مناسب در بازی جدولی
- بازی همکارانه:
  - بازیگران با همکاری (یکی‌شدن) به جواب می‌رسند.
  - پس توافق قابل اعمال خواهد بود و تصمیم جمعی اجرا می‌شود!
  - با چه کسی همکاری کنند و چگونه منافع را تقسیم کنند!

تعریف بازی همکارانه

- تعریف: بازی $<N,\upsilon>$ همکارانه عبارت است
  - از بازیگران $N=1,2,\dots,N$
  - زیرمجموعه‌ای از N به صورت S توافق بوده که 2^N حالت دارد.
  - «تابع مشخصه» بازی که از $\upsilon=2^N\rightarrow\mathbb{R}$ که از توافق به عدد حقیقی است.
- پس $\upsilon(S)$ ارزش (کل) توافق است که S بازیگران در توافق بعمل آورده‌اند.
- بازی که ارزش یک توافق تابعی از سایر توافقات بازی نیست «بازی با تابع مشخصه» خوانده می‌شود.
  - ما بر این بازی‌ها متمرکز می‌شویم.

فرضیات تابع مشخصه

- خواص زیر برای تابع مشخصه فرض می‌شود:
  - مبنا صفر: $\upsilon(\varphi)=0$ عدم توافق ارزش صفر دارد.
  - غیرمنفی: $\upsilon(S)\geq 0$ به ازای هر $S\subset N$
  - یکنواختی: توافق بزرگتر ارزش بیشتر داشته و یا $\upsilon(S)\geq \upsilon(X)$ اگر $X\subset S$
- وقتی تمام بازیگران (N) در توافق هستند «توافق بزرگ» خوانده می‌شود.
- وقتی ارزش توافق به
  - گروه تعریف/داده شود تا بین اعضایش توزیع کند بازی با قابلیت انتقال مطلوبیت خوانده می‌شوند
  - به فرد تعریف شود بازی غیرقابل انتقال مطلوبیت است.

بازی دستکش

- بازیگران N=1,2,3
- بازیگران ۱ و ۲ دستکش دست چپ را دارند.
- بازیگر ۳ دستکش دست راست را دارد.
- دستکش راست و چپ با همدیگر ارزش ۱۰ دارد
- یک دستکش هیچ ارزشی ندارد.
- پس تابع مشخصه بصورت زیر است:

$$\upsilon(\varphi)=0, \upsilon(\{1\})=\upsilon(\{2\})=\upsilon(\{3\})=0,$$
$$\upsilon(\{1,2\})=0, \upsilon(\{1,3\})=\upsilon(\{2,3\})=\upsilon(N)=10$$

بازی هم‌رایی

- زیرمجموعه $S \subset N$ که تهی نیست $S \neq \varphi$
- بازی $\langle N, u_s \rangle$ هم‌رایی‌–S به این صورت است:
- که اگر رای‌هایی که داده شده است اگر گروه رای‌دهنده شامل گروه S باشد ۱ ارزش دارد:

$$u_S(T) = \begin{cases} 1 & S \subset T \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

- چپلی می‌گوید عادلانه ترین توافق آن است که رای هر عضو را برابر تقسیم کنیم.
- مشابه بازی فوق است ولی

$$u_S^*(T) = \begin{cases} 1 & S \cap T \neq \varphi \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

بازی بستنی

- بازی <N,w>
- چکاوک ۶، مریم ۴ و پروانه ۳ واحد پول دارند.
- سه نوع بستنی برای فروش وجود دارد:
  ۱. هزینه ۷ و وزن ۵۰۰گرم
  ۲. هزینه ۹ و وزن ۷۵۰
  ۳. هزینه ۱۱ و وزن ۱ کیلوگرم
- تابع مطلوبیت مجموع وزن بستنی است که خریدای می‌شود.

$\upsilon(\varphi)=0=\upsilon(\{C\})=\upsilon(\{M\})=\upsilon(\{P\})$

$\upsilon(\{C,M\})=750;\upsilon(\{C,P\})=750;\upsilon(\{M,P\})=500$

$\upsilon(\{C,M,P\})=1000$

بازی دختر و کیف

- دو بازیگر مکلف‌اند کیفی را به هتل منتقل کنند.
- اگر انتقال انجام شود جایزه ۲۰ دارد.

$\upsilon(\{i\})=0$ for $i\in N$

$\upsilon(\{i,j\})=20$ for $i\neq j$

$\upsilon(N)=20$

نتیجه بازی

- نتیجه بازی <N,υ> مجموعه دو قسمتی (CS,x) است که:
  - ساختار توافقات بازی بصورت $CS=(C_1,\ldots,C_k)$ بنحویکه :
- $\cup_{i=1}^{k} C_i = N$
- $C_i \cap C_j = \phi,\ for\ i \neq j$
  - بردار پیامدهای بازی بصورت $x=(x_1,\ldots,x_N)$ که ارزش را بین بازیگران توزیع می‌کند:
- $x_i \geq 0$ for all $i \in N$
- **در بازی <N,υ> بردار پیامدهای $x \in \mathbb{R}^N$ تخصیص خوانده می‌شود:**
- $x_i \geq \upsilon(i)$ for all $i \in N$ (عقلانیت فردی)
- $\sum_{i \in C} x_i = \upsilon(C)$, for $C \in CS$ (کارایی)

نتیجه بازی

- حل بازی‌های «فوق‌جمع‌پذیر» آسان‌تر است!
- بازی G=<N,υ> فوق‌جمع‌پذیر است اگر
- $\upsilon(C \cup D) \geq \upsilon(C)+\upsilon(D)$
- به ازای هر توافق C و D که هم‌پوشانی ندارد.
- برای مثال $\upsilon(C)=|C|^2$ در این صورت
- $\upsilon(C \cup D)=(|C|+|D|)^2 \geq |C|^2+|D|^2=\upsilon(C)+\upsilon(D)$
- در بازی فوق‌جمع‌پذیر هرگز ارزشی زمانی دو توافق ادغام می‌شوند همواره افزایش می‌یابد. پس همواره «توافق بزرگ» رخ می‌دهد.
- برای تعیین نتیجه نیاز به «**معیار**» داریم.

بازی بستی

- بازی بستنی $<3,\upsilon>$ به صورت: منابع $I_C=4, I_M=3, I_P=3$ و قیمت‌ها و وزن بستنی بصورت
- $w_j=(500,750,100);\ p_j=(7,9,11)$
- پس تمام تابع مشخصه‌ها بصورت:
- $\upsilon(\varphi)=0=\upsilon(\{C\})=\upsilon(\{M\})=\upsilon(\{P\})=\upsilon(\{M,P\})$
- $\upsilon(\{C,M\})=\upsilon(\{C,P\})=500;\upsilon(\{C,M,P\})=750$
- این بازی «فوق‌جمع‌پذیر» است، پیامدهای «توافق بزرگ» را بررسی می‌کنیم.
- آیا پیامد $(x_C,x_M,x_P)=(200,200,350)$ تعادل خوبی است؟
- بازیگران C و M انگیزه دارند با این تخصیص از توافق بزرگ منحرف و خود یک توافق ایجاد کنند که ارزش را مساوی بین خود تقسیم کنند و هر کدام 250 بگیرند!
- پس تخصیص فوق باعث می‌شود «توافق بزرگ» تعاادل «پایدار» نباشد.

هسته

- «هسته» بازی $\Gamma = \langle N, \upsilon \rangle$ مجموعه تمام تخصیص‌ها پایدار است که:

$$core(\Gamma)=\{(CS,x) \mid \sum_{i\in S} x_i \geq \upsilon(S),\ \forall S \subset N\}$$

- برای مثال در بازی با تابع مشخصه:

$$\upsilon(\{1,2,3\})=9, \upsilon(\{4,5\})=5, \upsilon(\{2,4\})=7$$

- نتیجه $((\{1,2,3\},\{4,5\}),(3,\mathbf{3},3,\mathbf{3},1))$ هسته نیست
    - چراکه در این نتیجه $x(\{2,4\})=6$ ولی این دو اگر منحرف شوند، توافق دونفره‌شان ارزش ۷ تولید می‌کند.

بازی بستنی

- بازی بستنی $<3,\upsilon>$ به صورت: منابع $I_C=4, I_M=3, I_P=3$ و قیمت‌ها و وزن بستنی بصورت
- $w_j=(500,750,100);\ p_j=(7,9,11)$
- پس تمام تابع مشخصه‌ها بصورت:
- $\upsilon(\varphi)=0=\upsilon(\{C\})=\upsilon(\{M\})=\upsilon(\{P\})=\upsilon(\{M,P\})$
- $\upsilon(\{C,M\})=\upsilon(\{C,P\})=500; \upsilon(\{C,M,P\})=750$
- تخصیص توافق بزرگ $(x_C,x_M,x_P)=(200,200,350)$ هسته نیست. چون $\upsilon(\{C,M\})=500$ و این دو انگیزه انحراف دارند.
- ولی تخصیص توافق بزرگ $(x_C,x_M,x_P)=(250,250,250)$ هسته است.
- تخصیص $(x_C,x_M,x_P)=(750,0,0)$ نیز هسته است!! مریم و پروانه با هم نمی‌توانند بستنی بخرند.

بازی دستکش

- بازیگران ۱ و ۲ دستکش چپ را و بازیگر ۳ دستکش راست
- دستکش راست و چپ با همدیگر ارزش ۱۰ دارد،یک دستکش هیچ ارزشی ندارد:

$$\upsilon(\varphi)=0,\upsilon(\{1\})=\upsilon(\{2\})=\upsilon(\{3\})=0,$$

$$\upsilon(\{1,2\})=0,\upsilon(\{1,3\})=\upsilon(\{2,3\})=\upsilon(N)=10$$

- تخصیص مثلثی (صرفا عقلانیت در مقایسه با تنهایی) است که رئوس آن به صورت:
- $f^1=(10,0,0)$, $f^2=(0,10,0)$, $f^3=(0,0,10)$
- هسته تنها یک نقطه $f^3=(0,0,10)$ در غیر این صورت بازیگر سوم از هر توافقی با (۱ و یا ۲) که تخصیص است منحرف می‌شود و با بازیگر دیگر توافقی با این تخصیص می‌کند.

هسته تهی

- بازی $\Gamma=<3,\upsilon>$ را فرض کنید که $\upsilon(C)=1 \text{ if } |C|>1$ و در غیر این صورت صفر است.
- اگر سه نفر در توافق باشند: به هر کدام ۱/۳ بدهد دونفرشان انگیزه دارند منحرف شوند و ارزش را نصف کنند و ½ بگیرند.
- اگر دو نفر در توافق باشند (یا سه نفر که به دونفرشان) به ایشان ½ بدهد، نفر سوم و یکی از این دو انگیزه دارند منحرف شوند و نفر سوم کمتر از ½ و نفر منحرف شده بیشتر از ½ بگیرد.
- پس هسته ندارد!
- مشابه بازی فوق ولی $\Gamma=<4,\upsilon>$
- این بازی نتیجه فوق‌جمع‌پذیر نیست چراکه: $\upsilon(\{1,2\})+\upsilon(\{3,4\})=2>\upsilon(\{1,2,3,4\})$
- نتیجه $((\{1,2\},\{3,4\}),(½,½,½,½))$ هسته است و انحراف برای توافق جدید بهینه کسی نیست.

هسته—ε

- زمانیکه هسته تهی است، می‌خواهیم تعادلی که تقریبا پایدار است را ارائه دهیم.
- «هسته-ε» بازی $\Gamma = <N,\upsilon>$ مجموعه تمام تخصیص‌ها پایدار است که:

$$core(\Gamma)=\{(CS,x) \mid \sum_{i\in S} x_i \geq \upsilon(S)-\varepsilon,\ \forall S\subset N\}$$

- در بازی فوق $\Gamma=<3,\upsilon>$ با تابع $\upsilon(C)=1$ if $|C|>1$ و در غیر این صورت صفر است.
- نتیجه $(1/3, 1/3, 1/3)$ هسته-$1/3$ است و گروهی انگیزه انحراف ندارند.
- ولی به ازای $\varepsilon<1/3$ دارای هسته-ε نیست. به دیگری کمی کمتر از $2/3$ قول دهد ولی خودش کمی بیشتر از $1/3$ بگیرد.
- به طور مشابه می‌توان حداقل فاصله که هسته-ε^* را تعریف و ε^* را بدست آورد.

عادلانه بودن

- هسته ممکن است ناعادلانه باشد.
- بازی $<2,\upsilon>$ را فرض کنید که
- $\upsilon(\varphi)=0,\ \upsilon(\{1\})=\upsilon(\{2\})=5, \upsilon(\{1,2\})=20$
- در این صورت هسته $(15,5)$ پایدار است و بازیگر دوم از انحراف نتیجه‌ای بدست نمی‌آورد.
- با اینکه بازیگران کاملا متقارن‌اند ولی پیامد متفاوت دارند.
- یک راه عادلانه آن است که هر بازیگر را بر اساس «آورده»اش پیامد بدهیم.
- آورده بازیگر یعنی افزایش ارزشی که از ورود وی به توافق حاصل می‌شود:
- $x_i=\upsilon(\{1,\ldots,i-1,i\})-\upsilon(\{1,\ldots,i-1\})$
- ولی پیامد هر بازیگر تابعی از ترتیب است:
- $x_1=\upsilon(\{1\})-\upsilon(\varphi)=5,\ x_2=\upsilon(\{1,2\})-\upsilon(\{1\})=15$

متوسط آورده حاشیه‌ای و ارزش شاپلی

- ایده آن است که ترتیب را حذف کنیم و متوسط بر روی تمام ترتیبات محتمل بگیریم.
- $x_1=\upsilon(\{1\})-\upsilon(\varphi)=5, x_2=\upsilon(\{1,2\})-\upsilon(\{1\})=15$
- $y_2=\upsilon(\{2\})-\upsilon(\varphi)=5, y_1=\upsilon(\{1,2\})-\upsilon(\{2\})=15$
- پس پیامد عادلانه به صورت:
- $z_1=(x_1+y_1)/2=10, z_2=(x_2+y_2)/2=10$
- فرض کنید $\Pi(N)$ تمام تخصیص‌های ممکن N باشد.
- $S_\pi(i)$ مجموعه توافقاتی که دیگران قبل از i بعمل آورده‌اند $\pi\in\Pi(N)$
- در توافق $C\subset N$ آورده بازیگر i بصورت $\delta_i(C)=\upsilon(C\cup\{i\})-\upsilon(C)$
- ارزش شاپلی حضور وی در بازی بصورت:
- $\Phi_i(\Gamma)=(1/n!)\sum_{\pi\in\Pi}\delta_i(S_\pi(i))$
- پس در مثال بالا $\Phi_1= \Phi_2=10$

معیارهای شاپلی

- هر راه‌حل (توزیع) یک‌به‌یکی شامل نگاشتی یکتا به صورت $\psi:G^N\rightarrow\mathbb{R}^N$ باید خواص زیر را داشته باشد:

۱. کارایی: جمع منفعت تک تک افراد جامعه برابر منفعت جامعه شود: $\sum_{i\in N}\psi_i(\upsilon)=\upsilon(N)$ برای همه $\upsilon\in G^N$

۲. تقارن: اگر دو نفر متقارن باشند به این معنی که دقیقا به صورت یکسان به توافق بیفزایند، نگاشت باید آنها را یکسان ارزش دهد: $\psi_i(\upsilon)=\psi_j(\upsilon)$ اگر $\upsilon(S\cup i)= \upsilon(S\cup j)$ به ازای هر S که نه i در آن قرار دارد و نه j

۳. خطی بودن:

$$\psi(\alpha\upsilon+\beta\omega)=\alpha\psi(\upsilon)+\beta\psi(\omega),\forall\ \upsilon,\omega\in G^N,\ \forall\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

۴. بازیگر مجازی: اگر بازیگری به توافقات نیفزوده باشد، باید به وی چیزی از نفع آن توافقات تعلق نگیرد

$$\psi_i(\upsilon)=\upsilon(i)\ \text{if}\ \upsilon(S\cup i)= \upsilon(S)+\upsilon(i)\ \text{for all}\ i\notin S$$

ارزش شاپلی

- ارزش چاپلی $\Phi\text{:}G^N \to \mathbb{R}$ یک نگاشت خطی یکتا با تمام خواص فوق است که به هر بازیگر که به توافق S با تابع مشخصه υ اضافه شود، ارزش زیر را بدهد:

$$\Phi_i(v) = \sum_{S, i \notin S} \frac{|S|!\,(n-1-|S|)!}{n!} \left(v(S \cup \{i\}) - v(S)\right)$$

مثال

- بازی $<2,\upsilon>$ را بصورت زیر فرض کنید:
- $\upsilon(\{1\})=3;\upsilon(\{2\})=4;\upsilon(\{1,2\})=9;$
- تخصیص این بازی خطی است که دو سر آن $f^1=(5,4)$ (زمانیکه بازیگر دوم انگیزه‌ای برای انحراف از توافق ندارد) و $f^2=(3,6)$ است.
- هسته نیز با تخصیص (در تمام بازی‌های دو نفره) یکی است.
- ارزش شاپلی بازی برای هر بازیگر:
- $\Phi_1=(1/2!)(3-0)+(1/2!)(9-4)=4$
- $\Phi_2=(1/2!)(4-0)+(1/2!)(9-3)=5$

ارزش شاپلی بازی فرودگاه

- سه هواپیما می‌خواهند هزینه عملیات فرودگاه را پرداخت کنند.
- اگر هواپیما کوچک در فرودگاه باشد هزینه c_1 و اگر هواپیما متوسط باشد هزینه c_1+c_2 و هواپیما بزرگ هزینه $c_1+c_2+c_3$ دارد.پس:

$$c(\varphi)=0;c(1)=c_1;c(2)=c(1,2)=c_1+c_2;\ c(3)=c(1,3)=c(2,3)=c(1,2,3)=c_1+c_2+c_3$$

- ارزش شاپلی هر هواپیما که به فرودگاه پرداخت می‌کنند:
- برای هواپیما کوچک به هر توافقی که متوسط و بزرگ باشند اضافه شود هزینه‌ها را زیاد نمی‌کند:

- $\Phi1=(2!/3!)(c_1-0)=(1/3)c_1$

- هواپیما متوسط وقتی به فرودگاه خالی و فرودگاه با هواپیما کوچک اضافه شود هزینه را زیاد می‌کند:

- $\Phi_2=(2!/3!)(c_1+c_2-0)+(1/3!)(c_1+c_2-c_1)=(1/3)c_1+(1/2)c_2$
- $\Phi_3=(2!/3!)(c_1+c_2+c_3-0)+(1/3!)(c_1+c_2+c_3-c_1)+(2!/3!)(c_1+c_2+c_3-c_1-c_2)+(1/3!)(c_1+c_2+c_3-c_1-c_2)=(1/3)c_1+(1/2)c_2+c_3$

- پس هر هواپیمایی $(c_1/3,c_1/3+c_2/3,c_1/3+c_2/2+c_3)$ را می‌پردازد.

بازی دستکش

- بازیگران ۱ و ۲ دستکش چپ را و بازیگر ۳ دستکش راست
- دستکش راست و چپ با همدیگر ارزش ۱۰ دارد،یک دستکش هیچ ارزشی ندارد:

$$\upsilon(\varphi)=0,\upsilon(\{1\})=\upsilon(\{2\})=\upsilon(\{3\})=0,$$

$$\upsilon(\{1,2\})=0,\upsilon(\{1,3\})=\upsilon(\{2,3\})=\upsilon(N)=10$$

- هسته تنها یک نقطه $f^3=(0,0,10)$
- ارزش شاپلی که به هر بازیگر می‌دهند:

- $\Phi_1=\Phi_2=(1/3!)(10-0)=10/6$
- $\Phi_3=(1/3!)(10-0)+(1/3!)(10-0)+(2!/3!)(10-0)=40/6$

بازی هم‌رایی

- بازی$<3,u_s>$ هم‌رایی که اگر $S=\{1,2\}$ هر دو رای دهند ارزش ۱ دارد:

$$u_S(T) = \begin{cases} 1 & S \subset T \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

- هسته در این بازی برابر صفحه‌ای است که ترکیب احتمالی از دو راس (0,1,0)و (1,0,0) است.
- ارزش شاپلی به صورت اضافه شدن بازیگر اول به دوم و اضافه شدن بازیگر اول به توافق قبلی بازیگر دوم و سوم است:
- $\Phi_1=(2!/3!)(1-0)+(1/3!)(1-0)=1/2 =\Phi_2$

واژگان

- Cooperative game
- Imputation
- Core
- Coalition
- Superadditive game
- Grand coalition
- Stable
- Shaply Value

- بازی همکارانه
- تخصیص
- هسته
- توافق
- بازی فوق‌جمع‌پذیر
- توافق بزرگ
- پایدار
- ارزش شاپلی