جریان سه‌فازی

با اضافه کردن آب به معادلات گاز-نفت قبلی برای جریان افقی و سیستم تک بعدی، معادلات پیوستگی زیر به دست می‌آید:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_{oL}u_o\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi\rho_{oL}S_o\right)$$
$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_g u_g+\rho_{oG}u_o\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left[\phi\left(\rho_g S_g+\rho_{oG}S_o\right)\right]$$
$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_w u_w\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi\rho_w S_w\right)$$

و معادلات دارسی مرتبط برای سیستم افقی:

$$u_o=-\frac{kk_{ro}}{\mu_o}\frac{\partial P_o}{\partial x}$$
$$u_g=-\frac{kk_{rg}}{\mu_g}\frac{\partial P_g}{\partial x}$$
$$u_w=-\frac{kk_{rw}}{\mu_w}\frac{\partial P_w}{\partial x}$$

و

$$P_{cog}=P_g-P_o$$
$$P_{cow}=P_o-P_w$$
$$S_o+S_g+S_w=1$$

خواص PVT استاندارد Black Oil مشابه موارد قبلی است.

$$\rho_o=\frac{\rho_{oS}+\rho_{gS}R_{so}}{B_o}=\frac{\rho_{os}}{B_o}+\frac{\rho_{gS}R_{so}}{B_o}=\rho_{oL}+\rho_{oG}$$
$$\rho_g=\frac{\rho_{gS}}{B_g}$$
$$\rho_w=\frac{\rho_{wS}}{B_w}$$

سیستم‌های تحت اشباع

ما سیستم تحت اشباع را به گونه زیر تعریف می‌کنیم که بیان می‌کند:

$$P_o>P_{bp}$$
$$S_g=0$$

که

$$B_O=f\left(P_o,P_{bp}\right)$$
$$R_{so}==f\left(P_{bp}\right)$$

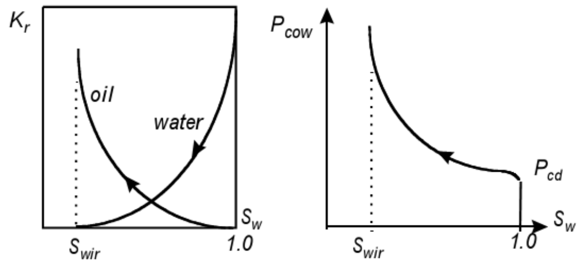
در نتیجه معادلات جریان زیر بدست می‌آیند:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kk_{ro}}{\mu_o B_o}\frac{\partial P_o}{\partial x}\right)-q'_o=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{B_o}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(R_{so}\frac{kk_{ro}}{\mu_o B_o}\frac{\partial P_o}{\partial x}\right)-q'_g-R_{so}q'_o=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_o}{B_o}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kk_{rw}}{\mu B_w}\frac{\partial P_w}{\partial x}\right)-q'_w=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_w}{B_w}\right)$$

فشارهای‌موئینگی و نفوذپذیری‌های نسبی

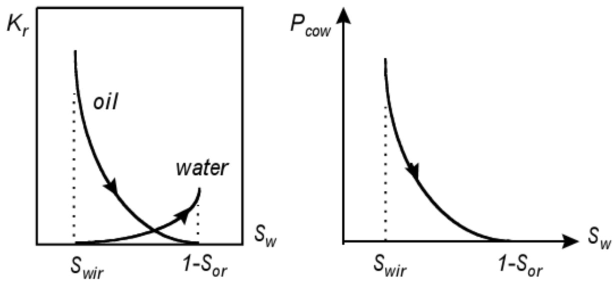
برای یک سیستم تحت اشباع، این روابط مانند سیستم آب-نفت هستند. بنابراین، نمودارهای ریزش و آشام به شکل زیر هستند:

Drainage curves



و

Imbibition curves



نمودارهای فوق برای سیستم آب‌تر استفاده می‌شود. برای سیستم‌های با قابلیت توانایی تر-شوندگی کمتر نسبت به آب، نمودار فشارموئینگی دارای قسمت منفی در اشباع‌شدگی بالا می‌باشد. شکل نمودارها بستگی به خواص ترشوندگی و سنگ دارد.

شرایط مرزی

شرایط مرزی برای سیستم‌های آب-گاز-نفت تحت اشباع مشابه شرایط مرزی برای سیستم گاز-نفت تحت اشباع هستد. علاوه بر تزریق گاز، آب نیز ممکن است تزریق شود. در چاه‌های تولید، علاوه بر محاسبه نفت و گاز محلول، مقدار آب تولیدی نیز باید محاسبه شود. معادلات مناسب برای تولید آب و نفت مشابه آنهایی هستند که در بخش آب-نفت ارائه شده‌اند.

معادلات گسسته

معادلات گسسته با توجه به اصل و فرضیات محاسبه شده در بخش‌های گذشته و استفاده از P_o، P_{bp}، S_w به عنوان متغییرهای اولیه به صورت زیر استخراج می‌شوند:

$$T_{xo_{i+1/2}}\left(P_{o_{i+1}}-P_{o_i}\right)-T_{xo_{i-1/2}}\left(P_{o_i}-P_{o_{i-1}}\right)-q'_{o_i}$$
$$=C_{poo_i}\left(P_{o_i}-P_{o_i}^t\right)+C_{bpo_i}\left(P_{bp_i}-P_{bp_i}^{\ t}\right)+C_{swo_i}\left(S_{w_i}-S_{w_i}^t\right)\quad i=1,\ldots,N$$

$$\left(R_{so}T_{xo}\right)_{i+1/2}\left(P_{o_{i+1}}-P_{oi}\right)+\left(R_{so}T_{xo}\right)_{i-1/2}\left(P_{o_{i-1}}-P_{oi}\right)-\left(R_{so}q'_o\right)_i-q'_{gi}$$
$$=C_{pog_i}\left(P_{o_i}-P_{oi}^{\ t}\right)+C_{bpg_i}\left(P_{bp_i}-P_{bp_i}^{\ t}\right)+C_{swg_i}\left(S_{w_i}-S_{wi}^{\ t}\right)\qquad i=1,\ldots.,N$$

$$T_{xw_{i+1/2}}\left[\left(P_{o_{i+1}}-P_{0_i}\right)-\left(P_{cow_{i+1}}-P_{cow_i}\right)\right]-T_{xw_{i-1/2}}\left[\left(P_{o_i}-P_{o_{i-1}}\right)-\left(P_{cow_i}-P_{cow_{i-1}}\right)\right]-q'_{w_i}$$
$$=C_{pow_i}\left(P_{o_i}-P_{o_i}^t\right)+C_{sww_i}\left(S_{w_i}-S_{w_i}^t\right)+C_{bpw_i}\left(P_{bp_i}-P_{bp_i}^{\ t}\right)\quad i=1,\ldots,N$$

که

$$T_{xo_{i+1/2}}=\frac{2\lambda_{o_{i+1/2}}}{\Delta x_i\left(\dfrac{\Delta x_{i+1}}{k_{i+1}}+\dfrac{\Delta x_i}{k_i}\right)}$$

$$\lambda_o=\frac{k_{ro}}{\mu_o B_o}$$

$$\lambda_{o_{i+1/2}}=\begin{cases}\lambda_{o_{i+1}} & if\ \ P_{o_{i+1}}\geq P_{o_i}\\ \lambda_{o_i} & if\ \ P_{o_{i+1}}<P_{o_i}\end{cases}$$

$$R_{so_{i+1/2}}=\begin{cases}R_{so_{i+1}} & if\ \ P_{o_{i+1}}\geq P_{o_i}\\ R_{so_i} & if\ \ P_{o_{i+1}}<P_{o_i}\end{cases}$$

و به همین طور.

و ضرایب:

$$C_{poo_i}=\frac{\phi_i\left(1-S_{w_i}\right)}{\Delta t}\left[\frac{c_r}{B_o}+\frac{d\left(1/B_o\right)}{dP_o}\right]_i$$

$$C_{swo_i}=-\frac{\phi_i}{B_{o_i}\Delta t}$$

$$C_{bpo_i}=\frac{\phi_i\left(1-S_{w_i}\right)}{\Delta t}\left[\frac{\partial\left(1/B_o\right)}{\partial P_o}\right]_i$$

$$C_{pog_i}=\frac{\left(R_{so}\phi\right)_i\left(1-S_{w_i}\right)}{\Delta t}\left(\frac{c_r}{B_o}+\frac{\partial\left(1/B_o\right)}{\partial P_o}\right)_i$$

$$C_{bpg_i}=\frac{\left(\phi\right)_i\left(1-S_{w_i}\right)}{\Delta t}\left(R_{so}\frac{\partial\left(1/B_o\right)}{\partial P_{bp}}+\frac{1}{B_o}\frac{dR_{so}}{dP_{bp}}\right)_i$$

$$
\begin{aligned}
C_{swg_i} &= -\frac{\left(\phi R_{so}\right)_i}{B_{o_i}\Delta t} \\
C_{pow_i} &= \frac{\left(S_w\phi\right)_i}{\Delta t}\left(\frac{c_r}{B_w}+\frac{\partial\left(1/B_w\right)}{\partial P_w}\right)_i \\
C_{bpw_i} &= 0 \\
C_{sww_i} &= \frac{\phi_i}{B_{w_i}\Delta t}-\left(\frac{\partial P_{cow}}{\partial S_w}\right)_i C_{pow_i}
\end{aligned}
$$

جملات مشتق برای هر گام زمان با توجه به داده‌های ورودی به صورت عددی حساب می‌شوند.

$$
\left(\frac{dP_{cow}}{dS_w}\right)_i,\left(\frac{d\left(1/B_w\right)}{dP_w}\right)_i,\left(\frac{\partial\left(1/B_o\right)}{\partial P_o}\right)_i,\left(\frac{\partial\left(1/B_o\right)}{\partial P_{bp}}\right)_i,\left(\frac{dR_{so}}{dP_{bp}}\right)_i
$$

حل IMPES

حل IMPES برای این سیستم از معادلات با توجه به فرضیات بخش‌های پیشین به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
&{T_{xo}}^t,{T_{xw}}^t,{R_{so}}^t,{P_{cow}}^t,{C_{poo}}^t,{C_{pog}}^t,{C_{pow}}^t \\
&{C_{bpo}}^t,{C_{bpg}}^t,{C_{bpw}}^t,{C_{swo}}^t,{C_{swg}}^t,{C_{sww}}^t
\end{aligned}
$$

که منهتی به معادله فشار زیر می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&\left[{T_{xo}}^t_{i+1/2}+\alpha_i\left(R_{so}T_{xo}\right)^t_{i+1/2}+\beta_i {T_{xw}}^t_{i+1/2}\right]\left(P_{o_{i+1}}-P_{oi}\right)+\left[{T_{xo}}^t_{i-1/2}+\alpha_i\left(R_{so}T_{xo}\right)^t_{i-1/2}+\beta_i {T_{xw}}^t_{i-1/2}\right]\left(P_{o_{i-1}}-P_{oi}\right) \\
&-\beta_i {T_{xw}}^t_{i+1/2}\left(P_{cow_{i+1}}-P_{cow_i}\right)^t-\beta_i {T_{xw}}^t_{i-1/2}\left(P_{cow_{i-1}}-P_{cow_i}\right)^t \\
&-q'_{oi}-\alpha_i\left(q'_g+{R_{so}}^t{C_{pog}}^t+\beta_i {C_{pow_i}}^t\right)_i-\beta_i q'_{wi}=\left({C_{poo_i}}^t+\alpha_i {C_{pog_i}}^t+\beta_i {C_{pow_i}}^t\right)\left(P_{o_i}-{P_{o_i}}^t\right) i=1,\ldots,N
\end{aligned}
$$

که

$$
\begin{aligned}
\alpha_i &= -{C_{bpo_i}}^t \Big/ {C_{bpg_i}}^t \\
\beta_i &= \frac{{C_{swoi}}^t}{{C_{swwi}}^t}\left(\frac{{C_{swg_i}}^t{C_{bpo_i}}^t}{{C_{swoi}}^t{C_{bpg_i}}^t}-1\right)
\end{aligned}
$$

با بازنویسی معادله فشار به شکل آشنای زیر داریم:

$$
a_i P_{o_{i-1}}+b_i P_{o_i}+c_i P_{o_{i+1}}=d_i \qquad i=1,\ldots,N
$$

ممکن است معادله را برای فشار، مثلاً، با روش حذفی گوس حل کنیم. با به دست آوردن فشار گاز-نفت، معادلات فوق با هم ترکیب می‌شوند، تا P_{bp}، S_w بدست می‌آیند.

$$S_{w_i} = S_{wi}^{\ t} + \frac{1}{C_{swwi}^{\ t}}\Big[T_{xw_{i+1/2}}^{\ t}\Big[\big(P_{o_{i+1}} - P_{oi}\big) - \big(P_{cow_{i+1}} - P_{cow_i}\big)^t\Big] + T_{xw_{i-1/2}}^{\ t}\Big[\big(P_{o_{i-1}} - P_{oi}\big) - \big(P_{cow_{i-1}} - P_{cow_i}\big)^t\Big]$$
$$- q'_{wi} - C_{pow_i}^{\ t}\big(P_{o_i} - P_{o_i}^{\ t}\big)\Big] \quad i = 1, \ldots., N$$
$$P_{bp_i} = P_{bp_i}^{\ t} + \frac{1}{C_{bpo_i}^{\ t}}\Big[T_{xo_{i+1/2}}^{\ t}\big(P_{o_{i+1}} - P_{oi}\big) + T_{xo_{i-1/2}}^{\ t}\big(P_{o_{i-1}} - P_{oi}\big) - q'_{oi} - C_{poo_i}^{\ t}\big(P_{o_i} - P_{o_i}^{\ t}\big)$$
$$- C_{swoi}^{\ t}\big(S_{w_i} - S_{wi}^{\ t}\big)\Big] \quad i = 1, \ldots., N$$

سیستم‌های اشباع

سیستم اشباع به وسیله $P_o = P_{bp}$ و $S_g \geq 0$ تعریف می‌شود. بنابراین:

$$B_O = f\left(P_o\right)$$
$$R_{so} = f\left(P_o\right)$$

معادلات جریان برای این سیستم به قرار زیراند:

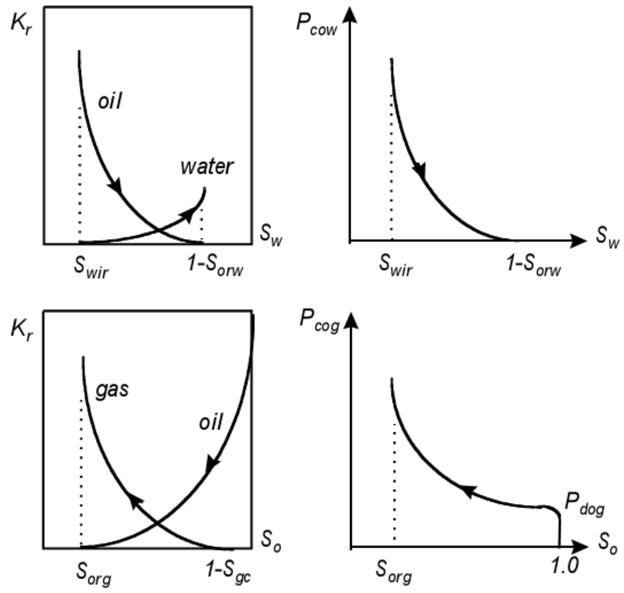
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kk_{ro}}{\mu_o B_o}\frac{\partial P_o}{\partial x}\right) - q'_o = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_o}{B_o}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kk_{rg}}{\mu_g B_g}\frac{\partial P_g}{\partial x} + R_{so}\frac{kk_{ro}}{\mu_o B_o}\frac{\partial P_o}{\partial x}\right) - q'_g - R_{so}q'_o = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_g}{B_g} + R_{so}\frac{\phi S_o}{B_o}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kk_{rw}}{\mu B_w}\frac{\partial P_w}{\partial x}\right) - q'_w = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_w}{B_w}\right)$$

فشارهای موئینگی و نفوذپذیری‌های نسبی سه فازی

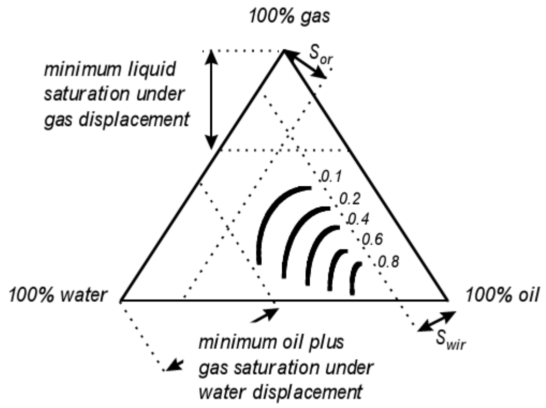
با توجه به وجود سه فاز در حال جریان، لازم است فشار موئینگی و نفوذپذیری‌های نسبی جدیدی تعریف شوند. اگرچه روابط زیر در عمل همواره صادق نیستند، آنها در اینجا برای سیستم کاملاً آب‌ترکه در آن هیچ تماسی بین فاز آب و گاز نیست، تعریف می‌شوند. بنابراین، پرامترهای زیر فقط تابعی از متغیر نشان داده شده هستند.

$$k_{rw}\left(S_w\right),\ k_{ro}\left(S_w, S_g\right),\ k_{rg}\left(S_g\right)$$
$$P_{cow}\left(S_w\right),\ \ P_{cog}\left(S_g\right)$$

روابط نوعی برای فرآیند آب-نفتِ آشام و نفت-گازِ ریزش با توجه به منحنی‌های آنها به قرار زیراند:



البته، منحنی‌های نفوذپذیری نسبی فوق، منحنی‌های دوفازی هستند. همانطور که نشان داده شده است، نفوذپذیری نسبی سه‌فازی نفت می‌تواند تابعی از اشباع‌شدگی‌های آب و گاز باشد. با رسم نمودار سه گانه آنها (در هر طرف یک اشباع‌شدگی می‌تواند قرار گیرد)، محد.ده‌ای از نفت متحرک محدود شده با اشباع‌شدگی‌های ماکزیمم و مینیمم (که لزوماً ثابت نیستند) تعریف می‌شود. درون این منطقه، منحنی‌هایی هم - k_{ro} می‌تواند رسم شود.(شکل زیر):



اما به دلایل مشکلات آزمایشگاهی در اندازه‌گیری سه‌فازی k_{ro}، در اغلب اوقات k_{ro} بر اساس k_{row} و k_{rog} ساخته می‌شود. ساده‌ترین روش برای بدست آوردن k_{ro}، ضرب این دو در هم است:

$$k_{ro} = k_{row}k_{rog}$$

به دلیل آنکه بعضی از اشباع‌شدگی‌هایی محدودکننده در سیستم سه‌فازی، الزاماً مشابه حالت دوفازی نیستند، این مدل بیانگر درستی از سیستم سه‌فازی نیست. برای مثال، اشباع نفت مینیمم S_{or}برای جریان سه‌فازی بستگی به فرآیند داشته و تخمین آن بسیار مشکل است.

مدل‌های معروف Stone با وجود سادگی، رایج‌ترین و پر استفاده‌ترین انواع این مدلها هستند (اگرچه انواع مختلفی از مدل‌ها وجود دارند) برای مثال، مدل ۱ و ۲ استون توصیف خواهند شد. برای مدل اول استون، اشباع‌شدگی‌های نرمال‌شده به قرار زیر تعریف می‌شوند.

$$S_{oD} = \frac{S_o - S_{or}}{1 - S_{wir} - S_{or}}$$

$$S_{gD} = \frac{S_g}{1 - S_{wir} - S_{or}}$$

$$S_{wD} = \frac{S_w - S_{wir}}{1 - S_{wir} - S_{or}}$$

سپس توابع زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\beta_w = \frac{k_{row}}{1 - S_{wD}}$$

$$\beta_g = \frac{k_{rog}}{1 - S_{gD}}$$

سرانجام، نفوذپذیری نسبی سه‌فازی نفت تعریف می‌شود:

$$k_{ro} = S_{oD}\beta_g\beta_w$$

دقت نمایید که در فرمول فوق، مقادیر نفوذپذیری‌های انتهایی، یک فرض شده‌اند. اگر این مورد (یک بودن نفوذپذیری‌های انتهایی) درست نباشد، فرمول نفوذپذیری‌های نسبی براساس آن باید اصلاح شوند.

مدل دوم استون به تخمین S_{or} نیاز ندارد بلکه آن، مقدار k_{ro} را به صورت ضمنی توسط فرمول ساده زیر تخمین می‌زند.

$$k_{ro} = \left(k_{rog} + k_{rg}\right)\left(k_{row} + k_{rw}\right) - \left(k_{rw} + k_{rg}\right)$$

در این مدل، S_{or} تعریف شده به وسیله k_{ro} منفی می‌شود. مدلهای دوگانه استون مقادیر k_{ro} را در موارد مختلف، نسبتاً متفاوت پیش‌بینی می‌کنند. بنابراین در انتخاب یکی از این دو مدل برای مورد خاصی باید بسیار دقت نمود. البته مدل‌های دیگری نیز وجود دارند.

شرایط مرزی

شرایط مرزی برای مدل‌های آب-گاز- نفت اشباع مشابه شرایط مرزی برای سیستم‌های گاز- نفت اشباع و روش‌هایی که در بخش آب-نفت ارائه شده‌اند، می‌باشند.

بنابراین، ممکن است آب و گاز تزریق و یا در چاه‌های تولید علاوه بر گاز آزاد محلول و نفت مقدار آب تولیدی هم محاسبه شود. معادلات مناسب برای تولید نفت، آب و گاز مشابه آنهایی هستند که در بخش‌های آب-نفت و گاز-نفت ارائه شده‌اند.

معادلات گسسته

دوباره، با استخراج معادلات گسسته و در نظر گرفتن P_o، S_g، S_w به عنوان متغیرهای اولیه معادلات زیر بدست می‌آیند.

$$T_{xo_{i+1/2}}\left(P_{o_{i+1}}-P_{o_i}\right)-T_{xo_{i-1/2}}\left(P_{o_i}-P_{o_{i-1}}\right)-q'_{o_i}$$
$$=C_{poo_i}\left(P_{o_i}-P^t_{o_i}\right)+C_{sgo_i}\left(S_{g_i}-S^t_{g_i}\right)+C_{swo_i}\left(S_{w_i}-S^t_{w_i}\right)\quad i=1,\dots,N$$

$$T_{xg_{i+1/2}}\left[\left(P_{o_{i+1}}-P_{oi}\right)+\left(P_{cog_{i+1}}-P_{cog_i}\right)\right]+T_{xg_{i-1/2}}\left[\left(P_{o_{i-1}}-P_{oi}\right)+\left(P_{cog_{i-1}}-P_{cog_i}\right)\right]-q'_{gi}$$
$$+\left(R_{so}T_{xo}\right)_{i+1/2}\left(P_{o_{i+1}}-P_{o_i}\right)-\left(R_{so}T_{xo}\right)_{i-1/2}\left(P_{o_i}-P_{o_{i-1}}\right)-\left(R_{so}q'_o\right)_i$$
$$=C_{pog_i}\left(P_{o_i}-P^t_{oi}\right)+C_{sgg_i}\left(S_{g_i}-S^t_{gi}\right)+C_{sww_i}\left(S_{w_i}-S^t_{wi}\right)\quad i=1,\dots.,N$$

$$T_{xw_{i+1/2}}\left[\left(P_{o_{i+1}}-P_{0_i}\right)-\left(P_{cow_{i+1}}-P_{cow_i}\right)\right]-T_{xw_{i-1/2}}\left[\left(P_{o_i}-P_{o_{i-1}}\right)-\left(P_{cow_i}-P_{cow_{i-1}}\right)\right]-q'_{w_i}$$
$$=C_{pow_i}\left(P_{o_i}-P^t_{o_i}\right)+C_{sww_i}\left(S_{w_i}-S^t_{w_i}\right)+C_{sgw_i}\left(S_{g_i}-S^t_{gi}\right)\quad i=1,\dots,N$$

که

$$T_{xo_{i+1/2}}=\frac{2\lambda_{o_{i+1/2}}}{\Delta x_i\left(\dfrac{\Delta x_{i+1}}{k_{i+1}}+\dfrac{\Delta x_i}{k_i}\right)}$$

$$\lambda_{oi}=\frac{k_{ro}}{\mu_o B_o}$$

$$\lambda_{o_{i+1/2}}=\begin{cases}\lambda_{o_{i+1}} & if\quad P_{o_{i+1}}\geq P_{o_i}\\ \lambda_{o_i} & if\quad P_{o_{i+1}}<P_{o_i}\end{cases}$$

$$R_{so_{i+1/2}}=\begin{cases}R_{so_{i+1}} & if\quad P_{o_{i+1}}\geq P_{o_i}\\ R_{so_i} & if\quad P_{o_{i+1}}<P_{o_i}\end{cases}$$

$$C_{poo_i}=\frac{\phi_i\left(1-S_{w_i}-S_{w_i}\right)}{\Delta t}\left[\frac{c_r}{B_o}+\frac{d\left(1/B_o\right)}{dP_o}\right]_i$$

$$C_{swo_i} = -\frac{\phi_i}{B_{o_i}\Delta t}$$

$$C_{pog_i} = \frac{\phi_i}{\Delta t}\left(S_{gi}\left(\frac{c_r}{B_g} + \frac{\partial\left(1/B_g\right)}{\partial P_g}\right)_i + R_{so_i}\left(1 - S_{w_i} - S_{g_i}\right)\left(\frac{c_r}{B_o} + \frac{\partial\left(1/B_o\right)}{\partial P_o}\right)_i + \frac{\left(1 - S_{w_i} - S_{g_i}\right)}{B_{oi}}\left(\frac{dR_{so}}{dP_o}\right)_i \right)$$

$$C_{sgg_i} = \frac{\phi_i}{\Delta t}\left(\frac{1}{B_g} - \frac{R_{so}}{B_o}\right)_i$$

$$C_{swg_i} = -\frac{\phi_i R_{so_i}}{B_{o_i}\Delta t}$$

$$C_{pow_i} = \frac{\phi_i S_{w_i}}{\Delta t}\left(\frac{c_r}{B_w} + \frac{\partial\left(1/B_w\right)}{\partial P_w}\right)_i$$

$$C_{sgw_i} = 0$$

$$C_{sww_i} = \frac{\phi_i}{B_{w_i}\Delta t} - \frac{\phi_i S_{w_i}}{\Delta t}\left(\frac{c_r}{B_w} + \frac{\partial\left(1/B_w\right)}{\partial P_w}\right)_i\left(\frac{dP_{cow}}{dS_w}\right)_i$$

جملات مشتق برای هر گام زمان با توجه به داده‌های ورودی به صورت عددی حساب می‌شوند.

$$\left(\frac{dP_{cow}}{dS_w}\right)_i, \left(\frac{d\left(1/B_w\right)}{dP_w}\right)_i, \left(\frac{d\left(1/B_g\right)}{dP_g}\right)_i, \left(\frac{d\left(1/B_o\right)}{dP_o}\right)_i, \left(\frac{dP_{cog}}{dS_g}\right)_i, \left(\frac{dR_{so}}{dP_o}\right)_i$$

حل IMPES

دوباره، فرض می‌شود همه ضرایب در گام زمان قبلی حساب می‌شود.

$$T_{xo}{}^t, T_{xw}{}^t, T_{xg}{}^t$$
$$R_{so}{}^t, P_{cow}{}^t, P_{cog}{}^t$$
$$C_{poo}{}^t, C_{pog}{}^t, C_{pow}{}^t$$
$$C_{sgo}{}^t, C_{sgg}{}^t, C_{sgw}{}^t$$
$$C_{swo}{}^t, C_{swg}{}^t, C_{sww}{}^t$$

در نتیجه معادله فشار زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}
&\left[T_{xo}{}^t_{i+1/2} + \alpha_i\left(T_{xg} + R_{so}T_{xo}\right)^t_{i+1/2} + \beta_i T_{xw}{}^t_{i+1/2}\right]\left(P_{o_{i+1}} - P_{oi}\right) + \left[T_{xo}{}^t_{i-1/2} + \alpha_i\left(T_{xg} + R_{so}T_{xo}\right)^t_{i-1/2} + \beta_i T_{xw}{}^t_{i-1/2}\right]\left(P_{o_{i-1}} - P_{oi}\right) \\
&+ \alpha_i T_{xw}{}^t_{i+1/2}\left(P_{cog_{i+1}} - P_{cog_i}\right)^t + \alpha_i T_{xw}{}^t_{i-1/2}\left(P_{cog_{i-1}} - P_{cog_i}\right)^t \\
&- \beta_i T_{xw}{}^t_{i+1/2}\left(P_{cow_{i+1}} - P_{cow_i}\right)^t - \beta_i T_{xw}{}^t_{i-1/2}\left(P_{cow_{i-1}} - P_{cow_i}\right)^t \\
&- q'_{oi} - \alpha_i\left(q'_g + R_{so}{}^t C_{pog}{}^t\right)_i - \beta_i q'_{wi} = \left(C_{poo_i}{}^t + \alpha_i C_{pog_i}{}^t + \beta_i C_{pow_i}{}^t\right)\left(P_{o_i} - P^t_{o_i}\right) \qquad i = 1, ..., N
\end{aligned}$$

که

$$\alpha_i = -{C_{sgo}}_i^t \Big/ {C_{sgg}}_i^t$$

$$\beta_i = \frac{{C_{swo}}_i^t}{{C_{sww}}_i^t}\left(\frac{{C_{swg}}_i^t {C_{sgo}}_i^t}{{C_{swo}}_i^t {C_{sgg}}_i^t} - 1\right)$$

و

$$a_i P_{o_{i-1}} + b_i P_{o_i} + c_i P_{o_{i+1}} = d_i \qquad i = 1, \ldots, N$$

معادله فوق را می‌توان با روش حذفی گوس یا روش‌های دیگر برای فشار نفت حل کرد. سپس، با ترکیب معادلات فوق، معادلات زیر برای اشباع‌شدگی‌های نفت و گاز بدست می‌آید.

$$S_{w_i} = S_{wi}^t + \frac{1}{{C_{sww}}_i^t}\Big[{T_{xw}}_{i+1/2}^t \left[\left(P_{o_{i+1}} - P_{oi}\right) - \left(P_{cow_{i+1}} - P_{cow_i}\right)^t\right]$$

$$+ {T_{xw}}_{i-1/2}^t \left[\left(P_{o_{i-1}} - P_{oi}\right) - \left(P_{cow_{i-1}} - P_{cow_i}\right)^t\right] - q'_{wi} - {C_{pow}}_i^t \left(P_{o_i} - P_{o\,i}^t\right)\Big] \quad i = 1, \ldots, N$$

$$S_{g_i} = S_{g\,i}^t + \frac{1}{{C_{sgo}}_i^t}\Big[{T_{xo}}_{i+1/2}^t \left(P_{o_{i+1}} - P_{oi}\right) + {T_{xo}}_{i-1/2}^t \left(P_{o_{i-1}} - P_{oi}\right) - q'_{oi} - {C_{poo}}_i^t \left(P_{o_i} - P_{o\,i}^t\right) - {C_{swo}}_i^t \left(S_{w_i} - S_{wi}^t\right)\Big]$$

$$i = 1, \ldots, N$$