شبیه‌سازی دو فازی گاز- نفت اشباع- حل IMPES

بزرگترین تفاوت جریان دو فازی آب-نفت با جریان دو فازی گاز-نفت اشباع[1] در وجود جملات"گاز محلول" در معادلات جریان است. با یادآوری تعریف خواص ترمودینامیکی سیال Black Oil که در صفحات گذشته مرور شد، چگالی نفت در شرایط مخزن به قرار زیر تعریف می‌شود:

$$\rho_o = \frac{\rho_{os} + \rho_{gS} R_{so}}{B_o}$$

اول از همه، برای سیستم گاز-نفت اشباع، طبق تعریف، فشار نفت برابر با فشار نقطه حباب یا فشار اشباع است.

$$P_o = P_{bp}$$

و بعلاوه:

$$S_o \geq 0$$

کارایی این تعاریف در آن است که ضریب حجمی سازند و نسبت گاز محلول به نفت، توابعی فقط از فشار نفت هستند.

$$B_o = f\left(P_o\right)$$
$$R_{so} = f\left(P_o\right)$$

بنابراین، برای نفت اشباع، جمله گاز محلول کمیتی ثابتی نیست و نمی‌تواند به مانند جریان تک-فازی و یا جریان آب-نفت از معادلات حذف شود. به منظور اهداف تعادل جرمی، چگالی نفت به دو قسمت چگالی مایع در سطح و چگالی گاز تقسیم می‌شود.

$$\rho_o = \frac{\rho_{os} + \rho_{gS} R_{so}}{B_o} = \frac{\rho_{os}}{B_o} + \frac{\rho_{gS} R_{so}}{B_o} = \rho_{oL} + \rho_{oG}$$

بنابراین، موازنه جرمی نفت را طوری می‌نویسیم که معادله پیوستگی آن، فقط دارای قسمت مایع باشد. در حالیکه برای موازنه جرمی گاز، گاز آزاد و گاز محلول در مخزن، (بنابراین کل گاز در سطح) را در نظر می‌گیریم.

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_{oL} u_o\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\phi \rho_{oL} S_o\right)$$
$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_g u_g + \rho_{oG} u_o\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\phi\left(\rho_g S_g + \rho_{oG} S_o\right)\right]$$

به طور واضح، در معادله گاز، گاز محلول، توسط نفت باقیمانده در مخزن با نفوذپذیری نسبی، گرانروی و فشار نفت حرکت می‌کند.

معادلات دارسی برای دو فاز به قرار زیراند:

---

[1] Saturated Oil

$$u_o = -\frac{kk_{ro}}{\mu_o}\frac{\partial P_o}{\partial x}$$
$$u_g = -\frac{kk_{rg}}{\mu_g}\frac{\partial P_g}{\partial x}$$

با جاگذاری معادله دارسی، تعاریف استاندارد چگالی نفت مایع، گاز محلول و گاز آزاد ($\rho_g = \rho_{gS}/B_g$) در معادلات پیوستگی و در نظر گرفتن جملات تولید/تزریق در معادلات، معادلات جریان دو فازی زیر شکل می‌گیرد:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kk_{ro}}{\mu_o B_o}\frac{\partial P_o}{\partial x}\right) - q'_o = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_o}{B_o}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kk_{rg}}{\mu_g B_g}\frac{\partial P_g}{\partial x} + R_{so}\frac{kk_{ro}}{\mu_o B_o}\frac{\partial P_o}{\partial x}\right) - q'_g - R_{so}q'_o = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_g}{B_g} + R_{so}\frac{\phi S_o}{B_o}\right)$$

و

$$P_{cog} = P_g - P_o$$
$$S_o + S_g = 1$$

نفوذپذیری‌های نسبی و فشار موئینگی توابعی از اشباع‌شدگی گازاند در حالیکه، ضرایب حجمی سازند، گرانروی و تخلخل توابعی از فشارها (فشار فاز آب و فاز نفت) هستند. خواص سیال برای نفت اشباع بر اساس مدل Black Oil تعریف می‌شوند.

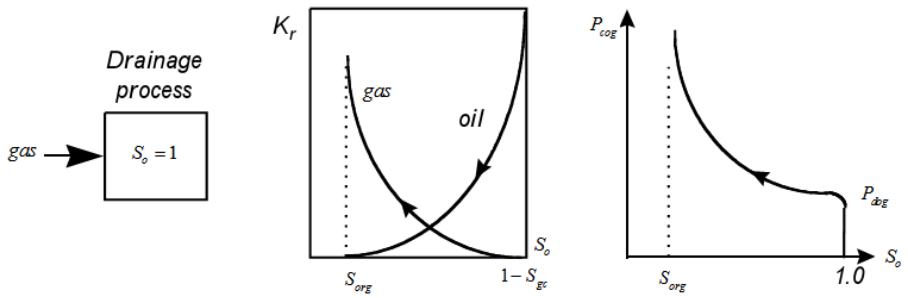
در ادامه ابتدا، به بررسی نفوذپذیری‌های نسبی و روابط فشار موئینگی برای سیستم‌های نفت و گاز می‌پردازیم.

مروری بر نفوذپذیری‌های نسبی گاز-نفت و فشار موئینگی

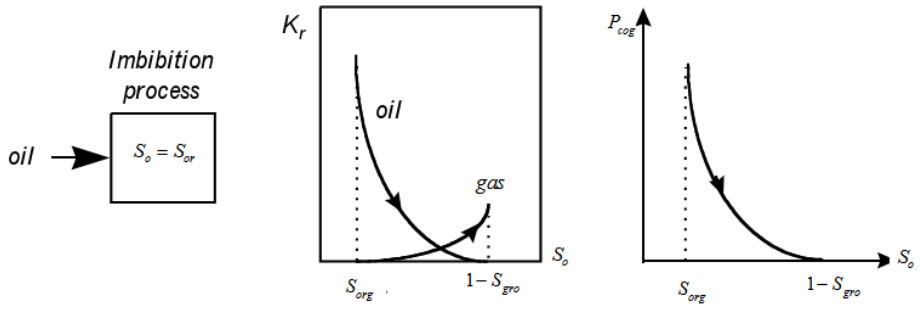
به طور معمول، منحنی‌های ریزش در سیستم نفت-گاز مورد نیازاند، چون گاز، نفت را می‌راند. اما گاهی اوقات، ممکن است به علت حرکت نفت به قسمت‌هایی که قبلاً در آن قسمت‌ها، گاز، نفت را جابجا کرده بود، عمل آشام اتفاق افتد. ممکن است پدیده‌های دوباره جذبی یا دوباره آشامی[1] در ریزش ثقلی، به ویژه در مخازن شکافدار، مهم باشد.

سنگ متخلخل زیر که به طور کامل از نفت اشباع شده است، را در نظر بگیرید. اگر این نفت توسط گاز جابجا شود، منحنی‌های فشار موئینگی و نفوذپذیری نسبی به قرار زیر به دست می‌آیند.

[1] Reimbibition Phenomena



منحنی‌های فشار موئینگی و نفوذپذیری نسبی به قرار زیر به دست می‌آیند. برای فرآیند عکس آن، که نفت گاز را جابجا می‌کند، منحنی‌های آشام به صورت زیراند.



البته، شکل منحنی‌های گاز-نفت بستگی به خواص کشش سطحی سیستم و ویژگی‌های سنگ دارد.

گسسته‌سازی معادلات جریان

فرآیند گسسته‌سازی برای معادلات گاز-نفت بسیار شبیه به معادلات آب-نفت است. در حقیقت، گسسته‌سازی معادله نفت یک بسیار شبیه معادله آب است و فقط در اینجا به جای آب، گاز داریم (البته با فرض آنکه مقادیر اشباع‌شدگی نفت کم نباشد). بنابراین شکل گسسته معادله نفت به قرار زیر است:

$$T_{xo_{i+1/2}}\left(P_{o_{i+1}} - P_{o_i}\right) - T_{xo_{i-1/2}}\left(P_{o_i} - P_{o_{i-1}}\right) - q'_{o_i}$$
$$= C_{poo_i}\left(P_{o_i} - P^t_{o_i}\right) + C_{swg_i}\left(S_{g_i} - S^t_{g_i}\right) \quad i = 1, \ldots, N$$

ضرایب فوق به قرار زیراند:

$$T_{xo_{i+1/2}} = \frac{2\lambda_{o_{i+1/2}}}{\Delta x_i \left(\frac{\Delta x_i}{k_i} + \frac{\Delta x_{i+1}}{k_{i+1}} \right)}$$

$$T_{xo_{i-1/2}} = \frac{2\lambda_{o_{i-1/2}}}{\Delta x_i \left(\frac{\Delta x_i}{k_i} + \frac{\Delta x_{i-1}}{k_{i-1}} \right)}$$

که

$$\lambda_o = \frac{k_{ro}}{\mu_o B_o}$$

همچنین تحرک‌پذیری‌های بالادستی انتخاب شده‌اند:

$$\lambda_{o_{i+1/2}} = \begin{cases} \lambda_{o_{i+1}} & if \quad P_{o_{i+1}} \geq P_{o_i} \\ \lambda_{o_i} & if \quad P_{o_{i+1}} < P_{o_i} \end{cases}$$

$$\lambda_{o_{i-1/2}} = \begin{cases} \lambda_{o_{i-1}} & if \quad P_{o_{i-1}} \geq P_{o_i} \\ \lambda_{o_i} & if \quad P_{o_{i-1}} < P_{o_i} \end{cases}$$

و ضرایب طرف راست به قرار زیر هستند:

$$C_{poo_i} = \frac{\phi_i \left(1 - S_{g_i}\right)}{\Delta t} \left[\frac{c_r}{B_o} + \frac{d\left(1/B_o\right)}{dP_o} \right]_i$$

$$C_{sgo_i} = -\frac{\phi_i}{B_{o_i} \Delta t}$$

طرف چپ معادله گاز

بخشی از گسسته‌سازی معادله گاز، شبیه به معادله نفت بوده و بخشی دیگر آن برای تقریب جملات گاز محلول در ادامه بیان می‌شود. در ابتدا:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kk_{rg}}{\mu_g B_g} \frac{\partial P_g}{\partial x} + R_{so} \frac{kk_{ro}}{\mu_o B_o} \frac{\partial P_o}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kk_{rg}}{\mu_g B_g} \frac{\partial P_g}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(R_{so} \frac{kk_{ro}}{\mu_o B_o} \frac{\partial P_o}{\partial x} \right)$$

تقریب مشابهی برای جمله گاز آزاد مانند نفت و آب به کار می‌رود.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kk_{rg}}{\mu_g B_g} \frac{\partial P_g}{\partial x} \right) = T_{xg_{i+1/2}} \left(P_{g_{i+1}} - P_{g_i} \right) - T_{xg_{i-1/2}} \left(P_{g_i} - P_{g_{i-1}} \right)$$

که در آن عبورپذیری‌های گاز به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$T_{xg_{i+1/2}} = \frac{2\lambda_{g_{i+1/2}}}{\Delta x_i \left(\frac{\Delta x_i}{k_i} + \frac{\Delta x_{i+1}}{k_{i+1}} \right)}$$

$$T_{xg_{i-1/2}} = \frac{2\lambda_{g_{i-1/2}}}{\Delta x_i \left(\frac{\Delta x_i}{k_i} + \frac{\Delta x_{i-1}}{k_{i-1}} \right)}$$

که

$$\lambda_g = \frac{k_{rg}}{\mu_g B_g}$$

و به طور مشابه تحرک‌پذیری‌های بالادستی انتخاب می‌شوند:

$$\lambda_{g_{i+1/2}} = \begin{cases} \lambda_{g_{i+1}} & if \quad P_{g_{i+1}} \geq P_{g_i} \\ \lambda_{g_i} & if \quad P_{g_{i+1}} < P_{g_i} \end{cases}$$

$$\lambda_{g_{i-1/2}} = \begin{cases} \lambda_{g_{i-1}} & if \quad P_{g_{i-1}} \geq P_{g_i} \\ \lambda_{g_i} & if \quad P_{g_{i-1}} < P_{g_i} \end{cases}$$

جمله گاز محلول می‌تواند به صورت جمله جریان نفت تقریب زده شود. البته با این استثنا که جمله گاز محلول به قرار زیر در معادله وارد می‌گردد:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(R_{so} \frac{kk_{ro}}{\mu_o B_o} \frac{\partial P_o}{\partial x} \right) = \left(R_{so} T_{xo} \right)_{i+1/2} \left(P_{o_{i+1}} - P_{o_i} \right) - \left(R_{so} T_{xo} \right)_{i-1/2} \left(P_{o_i} - P_{o_{i-1}} \right)$$

برای نسبت‌های گاز محلول به نفت نیز از اصل انتخاب بالادستی به مانند تحرک‌پذیریها استفاده می‌کنیم:

$$R_{so_{i+1/2}} = \begin{cases} R_{so_{i+1}} & if \quad P_{o_{i+1}} \geq P_{o_i} \\ R_{so_i} & if \quad P_{o_{i+1}} < P_{o_i} \end{cases}$$

$$R_{so_{i-1/2}} = \begin{cases} R_{so_{i-1}} & if \quad P_{o_{i-1}} \geq P_{o_i} \\ R_{so_i} & if \quad P_{o_{i-1}} < P_{o_i} \end{cases}$$

طرف راست معادله گاز

طرف راست معادله گاز شامل جملات گاز آزاد و گاز محلول است:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_g}{B_g} + \frac{\phi R_{so} S_o}{B_o} \right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_g}{B_g} \right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi R_{so} S_o}{B_o} \right)$$

با استفاده از تقریب مشابه آب برای جمله گاز آزاد داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_g}{B_g} \right) \approx \frac{\phi_i S_{g_i}}{\Delta t}\left(\frac{c_r}{B_g} + \frac{d\left(1/B_g\right)}{dP_g} \right)_i \left[\left(P_{o_i} - P_{oi}^t \right) + \left(\frac{dP_{cog}}{dS_g} \right)_i \left(S_{gi} - S_{g_i}^t \right) \right] \frac{\phi_i}{B_{g_i} \Delta t} \left(S_{gi} - S_{g_i}^t \right)$$

جمله گاز گاز محلول را اینگونه بسط می‌دهیم:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi R_{so} S_o}{B_o}\right) = R_{so}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_o}{B_o}\right) + \frac{\phi S_o}{B_o}\frac{\partial R_{so}}{\partial t}$$

جمله اول مانند آن است که جمله معادله نفت را در R_{so} ضرب کرده‌ایم:

$$\left[R_{so}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_o}{B_o}\right)\right]_i \approx R_{so_i} C_{Poo_i} + R_{so_i} C_{sgo_i}$$

برای جمله دوم از تقریب زیر استفاده می‌شود:

$$\left(\frac{\phi S_o}{B_o}\frac{\partial R_{so}}{\partial t}\right)_i = \left(\frac{\phi S_o}{B_o}\frac{dR_{so}}{dP_o}\frac{\partial R_o}{\partial t}\right)_i \approx \frac{1}{\Delta t}\left(\frac{\phi S_o}{B_o}\frac{dR_{so}}{dP_o}\right)_i \left(P_{o_i} - P_{oi}^{\,t}\right)$$

شکل گسسته معادله گاز با ترکیب جملات به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} T_{xg}{}^{t}_{i+1/2}\left[\left(P_{o_{i+1}} - P_{oi}\right) - \left(P_{cog_{i+1}} - P_{cog_i}\right)^t\right] + T_{xg}{}^{t}_{i-1/2}\left[\left(P_{o_{i-1}} - P_{oi}\right) - \left(P_{cog_{i-1}} - P_{cog_i}\right)^t\right] \\ - q'_{gi} + \left(R_{so}T_{xo}\right)_{i+1/2}\left(P_{o_{i+1}} - P_{o_i}\right) - \left(R_{so}T_{xo}\right)_{i-1/2}\left(P_{o_i} - P_{o_{i-1}}\right) - \left(R_{so}q'_o\right)_i \\ = C_{pog_i}{}^{t}\left(P_{o_i} - P_{oi}^{\,t}\right) + C_{sgg_i}{}^{t}\left(S_{g_i} - S_{g_i}{}^{t}\right) \qquad i = 1, \ldots, N \end{aligned}$$

که

$$C_{pog} = \frac{\phi_i}{\Delta t}\left[S_g\left(\frac{c_r}{B_g} + \frac{d\left(1/B_g\right)}{dP_g}\right) + R_{so}\left(1 - S_g\right)\left(\frac{c_r}{B_g} + \frac{d\left(1/B_g\right)}{dP_g}\right) + \frac{\left(1 - S_g\right)}{B_o}\frac{dR_{so}}{dP_o}\right]_i$$

$$C_{sgg} = \frac{\phi_i}{\Delta t}\left[S_g\left(\frac{c_r}{B_g} + \frac{d\left(1/B_g\right)}{dP_g}\right)\frac{dp_{cog}}{dS_g} - \frac{R_{so}}{B_o} + \frac{1}{B_g}\right]_i$$

جملات مشتق فوق به صورت زیراند:

$$\left(\frac{d\left(1/B_o\right)}{dP_o}\right)_i, \left(\frac{d\left(1/B_g\right)}{dP_g}\right)_i, \left(\frac{dR_{so}}{dP_o}\right)_i \; and \left(\frac{dP_{cog}}{dS_g}\right)_i$$

که همه آنها برای یک گام زمان به صورت عددی از داده‌های ورودی فشار موئینگی و خواص PVT سیالات حساب می‌شوند.

شرایط مرزی

شرایط مرزی برای سیستم‌های گاز-نفت به مانند سیستم‌های آب-نفت هستند. به طور معمول، ما گاز را در بلوکی با دبی سطحی ثابت یا فشار ثابت ته چاه تزریق می‌کنیم و نفت و گاز را از بلوکی با

فشار ثابت ته چاه، یا دبی ثابت نفت در سطح برداشت می‌کنیم. به مانند جریان آب-نفت، ممکن است نرخ ثابت تخلیه مخزن مد نظر باشد. در این مورد،یا دبی تزریق گاز برابر است با مقدار معین شده از دبی برداشت گاز و نفت در شرایط مخزن (که در آن صورت فشار متوسط مخزن تقریباً ثابت است) و یا آنکه دبی تولید مخزن برابر است با مقدار مشخص شده از دبی تزریق گاز.

دبی ثابت تزریق گاز

به مانند تزریق آب، جمله دبی گاز در معادله گاز وارد شده است. بنابراین، برای دبی ثابت تزریق گاز در سطح Q_{g_i} (منفی) در چاهی در بلوک i:

$$q'_{gi} = Q_{gi} / \left(A\Delta x_i \right)$$

پس از آنکه معادلات در پایان هر گام زمان حل شداند، فشار تزریق ته چاه از معادله چاه محاسبه می‌شود:

$$Q_{gi} = WC_i \lambda_{gi} \left(P_{g_i} - P_{bh_i} \right)$$

ثابت چاه به مانند جریان آب-نفت تعریف می‌شود.

$$WC_i = \frac{2\pi k_i h}{\ln\left(\frac{r_e}{r_w} \right)}$$

که r_w که شعاع چاه و r_e شعاع ریزش، به صورت تئوری حساب می‌شود.

$$r_e = \sqrt{\frac{\Delta y \Delta x_i}{\pi}}$$

به مانند تزریق آب، ما از مجموع تحرک‌پذیرهای سیالات حاضر در بلوک تزریق، در معادله چاه استفاده می‌کنیم بنابراین معادله چاه‌ای که در زیر آمده است برای تزریق گاز در سیستم گاز-نفت استفاده می‌شود..

$$Q_{gi} B_{gi} = WC_i \left(\frac{k_{ro_i}}{\mu_{oi}} + \frac{k_{rg_i}}{\mu_{gi}} \right) \left(P_{g_i} - P_{bh_i} \right)$$

یا

$$Q_{gi} = WC_i \left(\frac{B_{oi}}{B_{gi}} \lambda_{oi} + \lambda_{gi} \right) \left(P_{g_i} - P_{bh_i} \right)$$

به منظور جلوگیری از شکافتن سازند، ممکن است برای چاه‌های تزریق ماکزیمم فشار ته چاه در نظر گرفته شده باشد. در این صورت، این مورد باید پس از پایان هر گام زمان بررسی شود و اگر لازم باشد، دبی تزریق گاز کاهش یابد یا چاه از شرط دبی ثابت تزریق به چاه با شرط فشار ثابت ته چاه تبدیل گردد.

به مانند مورد تزریق آب، فشار موئینگی، به ویژه در مورد شبیه‌سازی در مقیاس میدان، در نظر گرفته نمی‌شود. بنابراین معادله چاه به قرار زیر می‌شود:

$$Q_{gi} = WC_i \left(\frac{B_{oi}}{B_{gi}} \lambda_{oi} + \lambda_{gi} \right) \left(P_{o_i} - P_{bh_i} \right)$$

برای جریان گاز-نفت، مقدار فشار موئینگی کم است. لذا مقدار خطای حاصله با حذف فشار موئینگی از معادلات، حتی برای شبیه‌سازی بر روی مغزه‌ها در مقیاس آزمایشات آزمایشگاهی هم کم خواهد بود.

تزریق در فشار ثابت ته چاه

معادله چاه برای تزریق در فشار ثابت ته چاه به مانند فوق است:

$$Q_{gi} = WC_i \left(\frac{B_{oi}}{B_{gi}} \lambda_{oi} + \lambda_{gi} \right) \left(P_{g_i} - P_{bh_i} \right)$$

و اگر فشار موئینگی در بلوک تزریق نادیده گرفته شود:

$$Q_{gi} = WC_i \left(\frac{B_{oi}}{B_{gi}} \lambda_{oi} + \lambda_{gi} \right) \left(P_{o_i} - P_{bh_i} \right)$$

جملات این معادله باید در ضرایب مناسبی از حل فشار وارد گردند. دبی تزریق واقعی چاه توسط معادله فوق در پایان هر گام محاسبه می‌شود.

دبی ثابت تولید نفت

معادله نفت در این مورد مانند دبی تزریق ثابت آب بررسی می‌شود. بنابراین برای دبی تولید ثابت نفت Q_{o_i} (مثبت) در چاهی در بلوک i:

$$q'_{oi} = Q_{oi} / \left(A \Delta x_i \right)$$

اما، تولید نفت همیشه با تولید گاز محلول همراه است. البته ممکن است با تولید گاز آزاد نیز همراه باشد. بنابراین معادله گاز جملات زیر را خواهد داشت:

برای گاز محلول $$q'_{gsi} = q'_{oi} R_{soi}$$

برای گاز آزاد $$q'_{gfi} = q'_{oi} \frac{\lambda_{gi}}{\lambda_{oi}} + \lambda_{gi} P_{cog_i}$$

با فرض نادیده گرفتن فشار موئینگی گاز-نفت در چاه تولید، کل گاز تولیدی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$q'_{gti} = q'_{gsi} + q'_{gfi} = q'_{oi} \left(\frac{\lambda_{gi}}{\lambda_{oi}} + R_{soi} \right)$$

فشار تولید ته چاه در پایان تولید هر گام زمانی، پس از آنکه معادلات حل شدند، توسط معادله چاه برای نفت بدست می‌آید.

$$Q_{oi} = WC_i \lambda_{oi} \left(P_{o_i} - P_{bh_i} \right)$$

به مانند سیستم آب- نفت، فشار چاه‌های تولید در سیستم‌های گاز- نفت نیز توسط مینیمم فشار ته چاه محدود شده است. اگر سیستم به چنین فشاری برسد، چاه باید به چاه با فشار ثابت ته چاه تبدیل شود.

نسبت گاز-نفت در سطح:

$$GOR_i = \frac{q'_{gti}}{q'_{oi}}$$

که با فرض نادیده گرفتن فشارموئینگی در بلوک تولیدی، به عبارت آشنایی زیر منتهی می‌شود:

$$GOR_i = \frac{\lambda_{gi}}{\lambda_{oi}} + R_{so_i}$$

به طور رایج، دبی چاه‌ها توسط ماکزیمم مقدار GOR به دلیل محدودیت در تجهیزات فرآیند، محدود شده است. اگر برای چاهی این مقدار ماکزیمم GOR برسد یا دبی تولید کاهش می‌یابد یا در موردی که بیش از یک بلوک سوراخ‌کاری شده باشد، بلوک با بیشترین مقدار GOR بسته می‌شود[1].

تولید در نرخ تخلیه ثابت مخزن

به مانند سیستم آب- نفت، مجموع کل برداشت سیالات از مخزن در شرایط مخزن باید برابر با حجم تزریق شده به مخزن در شرایط مخزن باشد که در آن صورت فشار مخزن تقریباً ثابت باقی می-ماند.. بنابراین:

$$Q_{oi} B_{oi} + Q_{gi} B_{gi} = -Q_{g_{inj}} B_{g_{inj}}$$

و با حذف فشارموئینگی:

$$q'_{oi} = \frac{\lambda_{oi}}{\lambda_{oi} B_{oi} + \lambda_{gi} B_{gi}} \left(-Q_{gi} B_{g_{inj}} \right) \Big/ \left(A \Delta x_i \right)$$

و

$$q'_{oi} = \frac{\lambda_{gi}}{\lambda_{gi} B_{oi} + \lambda_{gi} B_{gi}} \left(-Q_{gi} B_{g_{inj}} \right) \Big/ \left(A \Delta x_i \right)$$

و جمله دبی گاز محلول:

$$R_{so_i q'_{oi}} = \frac{R_{so_i} \lambda_{oi}}{\lambda_{oi} B_{oi} + \lambda_{gi} B_{gi}} \left(-Q_{gi} B_{g_{inj}} \right) \Big/ \left(A \Delta x_i \right)$$

---

[1] shut in

تولید در فشار ثابت ته چاه

با استفاده از چاه تولیدی در بلوک i با فشار ثابت ته چاه P_{bhi} به عنوان نمونه، دبی نفت به صورت زیر به دست می‌آید:

$$Q_{gi} = WC_i \lambda_{oi} \left(P_{oi} - P_{bh_i} \right)$$

و برای گاز آزاد:

$$Q_{gi} = WC_i \lambda_{oi} \left(P_{gi} - P_{bh_i} \right)$$

با جاگذاری در جملات جریان در معادلات جریان، دبی نفت:

$$q'_{oi} = \frac{WC_i}{A\Delta x} \lambda_{oi} \left(P_{oi} - P_{bh_i} \right)$$

و دبی گاز آزاد:

$$q'_{gi} = \frac{WC_i}{A\Delta x} \lambda_{gi} \left(P_{gi} - P_{bh_i} \right)$$

و در نهایت دبی گاز محلول:

$$R_{so_i} q'_{oi} = R_{soi} \frac{WC_i}{A\Delta x_i} \lambda_{oi} \left(P_{oi} - P_{bh_i} \right)$$

دوباره، جملات دبی جریان باید در ضرایب مناسبی از ماتریس حل فشار، وارد شوند. در پایان هر گام زمان، دبی‌های واقعی توسط معادلات فوق و GOR توسط معادلات صفحات قبل به دست می‌آیند.

حل توسط روش IMPES

روش حل با IMPES شبیه به مورد آب-نفت است. فرضیات زیر برای ضرایب در نظر گرفته می-شوند:

$$T_{xo}^{\ t}, T_{xg}^{\ t}, C_{poo}^{\ t}, C_{pog}^{\ t}, C_{sgo}^{\ t}, C_{sgg}^{\ t}, P_{cog}^{\ t}$$

شکل گسسته معادلات جریان با این تقریب‌ها به قرار زیر می‌شوند:

$$T_{xo}^{\ t}{}_{i+1/2} \left(P_{o_{i+1}} - P_{oi} \right) + T_{xo}^{\ t}{}_{i-1/2} \left(P_{o_{i-1}} - P_{oi} \right) - q'_{oi}$$
$$= C_{poo_i}^{\ t} \left(P_{o_i} - P_{o_i}^t \right) + C_{sgo_i}^{\ t} \left(S_{g_i} - S_{g_i}^{\ t} \right) \qquad i = 1, ..., N$$

$$T_{xg}^{\ t}{}_{i+1/2} \left[\left(P_{o_{i+1}} - P_{oi} \right) - \left(P_{cog_{i+1}} - P_{cog_i} \right)^t \right] + T_{xg}^{\ t}{}_{i-1/2} \left[\left(P_{o_{i-1}} - P_{oi} \right) - \left(P_{cog_{i-1}} - P_{cog_i} \right)^t \right]$$
$$- q'_{gi} + \left(R_{so} T_{xo} \right)^t_{i+1/2} \left(P_{o_{i+1}} - P_{oi} \right) + \left(R_{so} T_{xo} \right)^t_{i-1/2} \left(P_{o_{i-1}} - P_{oi} \right) - \left(R_{so} q'_o \right)_i$$
$$= C_{pog_i}^{\ t} \left(P_{o_i} - P_{oi}^t \right) + C_{sgg_i}^{\ t} \left(S_{g_i} - S_{g_i}^{\ t} \right) \qquad i = 1, ..., N$$

حل فشار IMPES

معادله فشار برای گاز-نفت اشباع به صورت زیر می‌شود:

$$\left\{T_{xo}{}^{t}_{i+1/2}+\alpha_i\left[T_{xg}{}^{t}_{i+1/2}+\left(R_{so}T_{xo}\right)^{t}_{i+1/2}\right]\right\}\left(P_{o_{i+1}}-P_{oi}\right)$$
$$+\left\{T_{xo}{}^{t}_{i-1/2}+\alpha_i\left[T_{xg}{}^{t}_{i-1/2}+\left(R_{so}T_{xo}\right)^{t}_{i-1/2}\right]\right\}\left(P_{o_{i-1}}-P_{oi}\right)$$
$$+\alpha_i T_{xo}{}^{t}_{i+1/2}\left(P_{cog_{i+1}}-P_{cog_i}\right)^{t}+\alpha_i T_{xo}{}^{t}_{i+1/2}\left(P_{cog_{i-1}}-P_{cog_i}\right)^{t}$$
$$-q'_{oi}-\alpha_i\left(q'_g+R_{so}{}^{t}q'_{oi}\right)_i=\left(C_{poo_i}{}^{t}+\alpha_i C_{pog_i}{}^{t}\right)\left(P_{o_i}-P_{o_i}{}^{t}\right)\qquad i=1,....,N$$

که

$$\alpha_i=-C_{sgo_i}{}^{t}\big/C_{sgg_i}{}^{t}$$

در نهایت معادله فشار به صورت زیر مرتب می‌شود:

$$a_iP_{o_{i-1}}+b_iP_{o_i}+c_iP_{o_{i+1}}=d_i\qquad i=1,....,N$$
$$a_i=T_{xo}{}^{t}_{i-1/2}+\alpha_i\left(T_{sg}+R_{so}T_{xo}\right)^{t}_{i-1/2}$$
$$c_i=T_{xg}{}^{t}_{i+1/2}+\alpha_i\left(T_{sg}+R_{so}T_{xo}\right)^{t}_{i+1/2}$$
$$b_i=-T_{xo}{}^{t}_{i-1/2}-T_{xo}{}^{t}_{i+1/2}-C_{poo_i}{}^{t}$$
$$-\alpha_i\left[\left(T_{sg}+R_{so}T_{xo}\right)^{t}_{i-1/2}+\left(T_{sg}+R_{so}T_{xo}\right)^{t}_{i+1/2}+C_{pog_i}{}^{t}\right]$$
$$d_i=-\left(C_{poo_i}{}^{t}+\alpha_i C_{pog_i}{}^{t}\right)P_{o_i}{}^{t}+q'_{oi}+\alpha_i\left(q'_g+R_{so}{}^{t}q'_{oi}\right)_i$$
$$-\alpha_i T_{xo}{}^{t}_{i+1/2}\left(P_{cog_{i+1}}-P_{cog_i}\right)^{t}-\alpha_i T_{xo}{}^{t}_{i+1/2}\left(P_{cog_{i-1}}-P_{cog_i}\right)^{t}$$

اصلاحات برای شرایط مرزی

دوباره، همه شرط‌های دبی معین شده در جملات دبی $R_{so_i}q'_{oi}\,,q'_{oi}\,,q'_{gi}$ وارد شده‌اند.

با توجه به اینکه این ضرایب در زمان t حساب می‌شوند، جملات دبی در جمله d_i فوق منظور شده‌اند.

برای چاه با تزریق با فشار ثابت ته چاه معادلات زیر به کار می‌روند (با فرض نادیده گرفتن فشار موئینگی به عنوان نمونه. در هر صورت فشار موئینگی به راحتی در معادلات می‌تواند وارد شود):

$$Q_{gi}=WC_i\left(\frac{B_{oi}}{B_{gi}}\lambda_{oi}+\lambda_{gi}\right)^{t}\left(P_{o_i}-P_{bh_i}\right)$$

برای چاه با چنین شرطی داریم (با فرض آنکه چاه تولیدی دربلوک تزریق نباشد):

$$b_i = -T_{xo}{}^{t}_{i-1/2} - T_{xo}{}^{t}_{i+1/2} - C_{poo}{}^{t}_{i}$$
$$- \alpha_i \left[\frac{WC_i}{A\Delta x_i} \left(\frac{B_{oi}}{B_{gi}} \lambda_{oi} + \lambda_{gi} \right)^t + \left(T_{sg} + R_{so} T_{xo} \right)^t_{i-1/2} + \left(T_{sg} + R_{so} T_{xo} \right)^t_{i+1/2} + C_{pog}{}^{t}_{i} \right]$$

$$d_i = -\left(C_{poo}{}^{t}_{i} + \alpha_i C_{pog}{}^{t}_{i} \right) P_{o}{}^{t}_{i} + q'_{oi} + \alpha_i \left(q'_g + R_{so}{}^{t} q'_{oi} \right)_i$$
$$\alpha_i \frac{WC_i}{A\Delta x_i} \left(\frac{B_{oi}}{B_{gi}} \lambda_{oi} + \lambda_{gi} \right)^t P_{bh_i} - \alpha_i T_{xo}{}^{t}_{i+1/2} \left(P_{cog_{i+1}} - P_{cog_i} \right)^t - \alpha_i T_{xo}{}^{t}_{i+1/2} \left(P_{cog_{i-1}} - P_{cog_i} \right)^t$$

برای چاه با شرایط تولید در فشار ثابت ته چاه عبارات زیر به دست آمده‌اند:

$$q'_{oi} = \frac{WC_i}{A\Delta x} \lambda_{oi} \left(P_{oi} - P_{bh_i} \right)$$
$$q'_{gi} = \frac{WC_i}{A\Delta x} \lambda_{gi} \left(P_{gi} - P_{bh_i} \right)$$

و

$$R_{so_i} q'_{oi} = R_{soi} \frac{WC_i}{A\Delta x_i} \lambda_{oi} \left(P_{oi} - P_{bh_i} \right)$$

ضرایب ماتریس حل فشار در بلوکی که این نوع چاه دارد به شکل زیر اصلاح می‌شوند:

$$b_i = -T_{xo}{}^{t}_{i-1/2} - T_{xo}{}^{t}_{i+1/2} - C_{poo}{}^{t}_{i} - \frac{WC_i}{A\Delta x_i} \lambda^{t}_{o\,i}$$
$$- \alpha_i \left[\frac{WC_i}{A\Delta x_i} \left(R_{soi} \lambda_{oi} + \lambda_{gi} \right)^t + \left(T_{sg} + R_{so} T_{xo} \right)^t_{i-1/2} + \left(T_{sg} + R_{so} T_{xo} \right)^t_{i+1/2} + C_{pog}{}^{t}_{i} \right]$$

$$d_i = -\left(C_{poo}{}^{t}_{i} + \alpha_i C_{pog}{}^{t}_{i} \right) P_{o}{}^{t}_{i} - \frac{WC_i}{A\Delta x_i} \lambda^{t}_{o\,i} P_{bh_i} - \alpha_i \frac{WC_i}{A\Delta x_i} \left(\frac{B_{oi}}{B_{gi}} \lambda_{oi} + \lambda_{gi} \right)^t P_{bh_i}$$
$$- \alpha_i T_{xo}{}^{t}_{i+1/2} \left(P_{cog_{i+1}} - P_{cog_i} \right)^t - \alpha_i T_{xo}{}^{t}_{i+1/2} \left(P_{cog_{i-1}} - P_{cog_i} \right)^t$$

به مانند سیستم آب- نفت، معادله فشار را می‌توان برای فشار نفت توسط روش حذفی گوس حل کرد.

حل اشباع‌شدگی IMPES

با بدست آمدن فشارهای نفت، اشباع‌شدگی گاز را می‌توان از معادله جریان نفت یا گاز به دست آورد. در زیر، از معادله نفت استفاده شده است.

$$T_{xo_{i+1/2}}^{\ t}\left(P_{o_{i+1}}-P_{oi}\right)+T_{xo_{i-1/2}}^{\ t}\left(P_{o_{i-1}}-P_{oi}\right)-q'_{oi}=C_{poo_i}^{\ t}\left(P_{o_i}-P_{o_i}^{\ t}\right)+C_{sgo_i}^{\ t}\left(S_{g_i}-S_{g_i}^{\ t}\right)\qquad i=1,....,N$$

با توجه به آنکه اشباع‌شدگی گاز فقط در آخرین جمله طرف راست معادله نفت ظاهر شده است، اشباع‌شدگی گاز را می‌توان به صورت صریح برای آن حل کرد.

$$S_{g_i}=S_{g_i}^{\ t}+\frac{1}{C_{sgo_i}^{\ t}}\left[T_{xo_{i+1/2}}^{\ t}\left(P_{o_{i+1}}-P_{oi}\right)+T_{xo_{i-1/2}}^{\ t}\left(P_{o_{i-1}}-P_{oi}\right)-q'_{oi}-C_{poo_i}^{\ t}\left(P_{o_i}-P_{o_i}^{\ t}\right)\right]\qquad i=1,....,N$$

برای بلوک‌های که دارای چاه‌های تولید با فشار مشخص شده‌اند، اصلاحات مناسبی باید صورت گیرد.

$$S_{g_i}=S_{g_i}^{\ t}$$
$$+\frac{1}{C_{sgo_i}^{\ t}}\left[T_{xo_{i+1/2}}^{\ t}\left(P_{o_{i+1}}-P_{oi}\right)+T_{xo_{i-1/2}}^{\ t}\left(P_{o_{i-1}}-P_{oi}\right)-\frac{WC_i}{A\Delta x_i}\lambda_{oi}^{t}\left(P_{oi}-P_{bhi}^{\ t}\right)-C_{poo_i}^{\ t}\left(P_{o_i}-P_{o_i}^{\ t}\right)\right]$$
$$i=1,....,N$$

پس از آنکه فشارهای نفت و اشباع‌شدگی‌های گاز در پایان هر گام محاسبه شوند، توسط عبارات زیر، دبی‌های چاه و یا فشارهای ته چاه، را می‌توان حساب کرد.

$$q'_{gi}=\frac{WC_i}{A\Delta x_i}\left(\frac{B_{oi}}{B_{gi}}\lambda_{oi}+\lambda_{gi}\right)\left(P_{o_i}-P_{bh_i}\right)$$

برای چاه تولید

$$q'_{oi}=\frac{WC_i}{A\Delta x}\lambda_{oi}\left(P_{oi}-P_{bh_i}\right)$$
$$q'_{gi}=\frac{WC_i}{A\Delta x}\lambda_{gi}\left(P_{gi}-P_{bh_i}\right)$$

و

$$R_{so_i}q'_{oi}=R_{soi}\frac{WC_i}{A\Delta x_i}\lambda_{oi}\left(P_{oi}-P_{bh_i}\right)$$

نسبت گاز به نفت سطح (GOR) نیز محاسبه می‌شود:

$$GOR_i=\frac{q'_{gi}+R_{so_i}q'_{oi}}{q'_{oi}}$$

قبل از ادامه حل برای گام زمان بعدی، همه انواع محدودیت‌های برای دبی‌ها و فشارهای چاه‌ها در چاه‌ها باید اعمال شوند و اصلاحات لازم در صورت لزوم در شرایط چاهها انجام بگیرد.

توانایی روش IMPES

توانایی روش IMPES برای سیستم‌های گاز نفت نسبتاً بیشتر از سیستم‌های آب-نفت است. اما به دلیل آنکه تغیرات اشباع‌شدگی در سیستم گاز-نفت بسیار سریع‌تر از سیستم آب-نفت است (به دلیل این واقعیت که گرانروی گاز بسیار کمتر از مایعات است) اندازه گام زمانی (Δt) باید کوچکتر در نظر گرفته شود.

شبیه‌سازی گاز- نفت تحت اشباع- حل IMPES

وقتی نفت تحت اشباع باشد، هیچ گاز آزادی در حفرات وجود ندارد. بنابراین، واقعاً جریان تک‌فازی وجود دارد (در غیاب آب). البته اگر مقدار گاز محلول تغییر کند، مانند مورد تزریق گاز در مخازن تحت اشباع، فشار نقطه حباب با فشار اشباع نفت به منظور به حساب آوردن گاز و محاسبه خواص نفت باید مورد بررسی قرار گیرد. مثل همیشه چگالی نفت براساس رابطه $\rho_o = \frac{\rho_{oS} + \rho_{gS} R_{so}}{B_o}$ داده می‌شود.

برای نفت تحت اشباع، فشار نفت براساس تعریف، بزرگتر از فشار نقطه حباب است $\left(P_o > P_{bp}\right)$ و بنابراین در درون مخزن گاز آزادی وجود ندارد. $S_o = 0$

پس ضریب حجمی سازند به هر دو فشار نقطه حباب (فشار اشباع) و فشار نفت بستگی دارد.

$$B_o = f\left(P_o, P_{bp}\right)$$

از طرف دیگر نسبت گاز محلول به نفت فقط تابعی از فشار نقطه حباب است (نه فشار نفت).

$$R_{so} = f\left(P_{bp}\right)$$

به منظور اهداف برقراری بقا جرم، چگالی نفت را به دو بخش مایع باقیمانده در سطح و گاز در سطح جدا می‌کنیم:

$$\rho_o = \frac{\rho_{oS} + \rho_{gS} R_{so}}{B_o} = \frac{\rho_{oS}}{B_o} + \frac{\rho_{gS} R_{so}}{B_o} = \rho_{oL} + \rho_{oG}$$

و تعادل جرمی نفت طوری نوشته می‌شود که معادله پیوستگی مربوط به آن فقط حاوی بخش مایع باشد در حالیکه تعادل جرمی گاز حاوی گاز محلول در مخزن و بنابراین، همه گاز آزاد در سطح باشد.

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_{oL} u_o\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\phi \rho_{oL}\right)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_{oG} u_o\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\phi\left(\rho_{oG}\right)\right]$$

به مانند سیستم‌های گاز-نفت اشباع، گاز محلول با بقیه نفت موجود در مخزن جریان خواهد داشت (با فشار، گرانروی و نفوذپذیریهای نسبی نفت). بنابراین معادله دارسی برای سیستم تک‌فازی نفت به قرار زیر است:

$$u_o = -\frac{k k_{ro}}{\mu_o} \frac{\partial P_o}{\partial x}$$

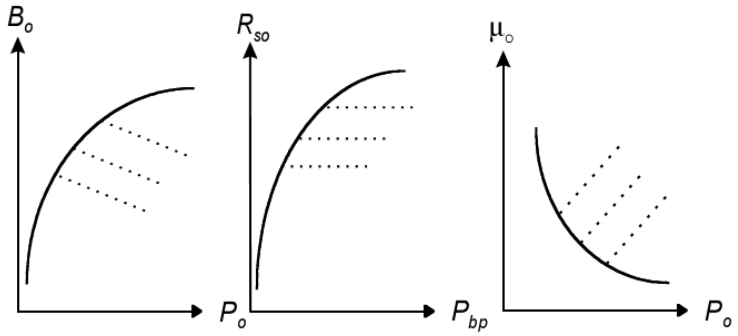
اگرچه جریان تک‌فازی است اما نفوذپذیری نسبی $\left(k_{ro}\right)$ برای مواردی که مقدار آن یک نیست حفظ شده است.

با جاگذاری معادلات دارسی و تعاریف چگالی نفت مایع و گاز محلول در معادلات پیوستگی و قرار دادن جملات تزریق/تولید در معادلات، معادلات جریان زیر حاصل می‌شوند:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kk_{ro}}{\mu_o B_o}\frac{\partial P_o}{\partial x}\right)-q'_o=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{B_o}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(R_{so}\frac{kk_{ro}}{\mu_o B_o}\frac{\partial P_o}{\partial x}\right)-q'_g-R_{so}q'_o=\frac{\partial}{\partial t}\left(R_{so}\frac{\phi S_o}{B_o}\right)$$

یک دبی گاز آزاد $\left(q'_g\right)$ برای اهداف تزریق گاز در معادله گاز قرار داده شده است. خواص Black Oil برای نفت تحت اشباع در زیر نشان داده شده‌اند.



در این شکل‌ها، خط توپر نشان‌دهنده شرایط اشباع‌شدگی است. در حالیکه خطوط نقطه‌چین، نشان‌دهنده رفتار تحت اشباع است. فشار نقطه حباب محل تقاطع حاصل از این دو خط تعریف می‌شود. بنابراین، فشار نقطه حباب به مقدار گاز حاضر در سیستم بستگی دارد، گاز بیشتر فشار نقطه حباب بیشتر.

گسسته‌سازی معادلات جریان

روش گسسته‌سازی برای جملات جریان معادلات نفت-گاز بسیار شبیه به معادلات گاز-نفت اشباع است.

جملات جریان

طرف چپ معادله نفت شبیه سیستم اشباع است:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kk_{ro}}{\mu_o B_o}\frac{\partial P_o}{\partial x}\right)_i \approx T_{xo_{i+1/2}}\left(P_{o_{i+1}}-P_{oi}\right)+T_{xo_{i-1/2}}\left(P_{o_{i-1}}-P_{oi}\right)$$

برای معادله گاز، فقط جملات گاز محلول را داریم که می‌تواند به مانند جمله گاز محلول در معادله اشباع تقریب‌زده شود:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(R_{so}\frac{kk_{ro}}{\mu_o B_o}\frac{\partial P_o}{\partial x}\right)_i \approx \left(R_{so}T_{xo}\right)_{i+1/2}\left(P_{o_{i+1}}-P_{oi}\right)+\left(R_{so}T_{xo}\right)_{i-1/2}\left(P_{o_{i-1}}-P_{oi}\right)$$

تعاریف ضرایب در معادلات فوق به قرار زیراند:

$$T_{xo_{i+1/2}}=\frac{2\lambda_{o_{i+1/2}}}{\Delta x_i\left(\frac{\Delta x_{i+1}}{k_{i+1}}+\frac{\Delta x_i}{k_i}\right)}$$

$$T_{xo_{i-1/2}}=\frac{2\lambda_{o_{i-1/2}}}{\Delta x_i\left(\frac{\Delta x_{i-1}}{k_{i-1}}+\frac{\Delta x_i}{k_i}\right)}$$

که

$$\lambda_o=\frac{k_{ro}}{\mu_o B_o}$$

همچنین جملات گاز محلول و تحرک‌پذیریهای بالادستی انتخاب می‌شوند:

$$\lambda_{o_{i+1/2}}=\begin{cases}\lambda_{o_{i+1}} & if\ \ P_{o_{i+1}}\geq P_{o_i}\\ \lambda_{o_i} & if\ \ P_{o_{i+1}}<P_{o_i}\end{cases}$$

$$\lambda_{o_{i-1/2}}=\begin{cases}\lambda_{o_{i-1}} & if\ \ P_{0_{i-1}}\geq P_{0_i}\\ \lambda_{o_i} & if\ \ P_{0_{i-1}}<P_{0_i}\end{cases}$$

$$R_{so_{i+1/2}}=\begin{cases}R_{so_{i+1}} & if\ \ P_{o_{i+1}}\geq P_{o_i}\\ R_{so_i} & if\ \ P_{o_{i+1}}<P_{o_i}\end{cases}$$

$$R_{so_{i-1/2}}=\begin{cases}R_{so_{i-1}} & if\ \ P_{o_{i-1}}\geq P_{o_i}\\ R_{so_i} & if\ \ P_{o_{i-1}}<P_{o_i}\end{cases}$$

جمله انباشتگی نفت

طرف راست معادله نفت را با در نظر گرفتن این واقعیت که B_0 تابعی از فشار نفت و فشار نقطه حباب است، بسط می‌دهیم:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{B_o}\right)=\frac{1}{B}\frac{d\phi}{dP_o}\frac{\partial P_o}{\partial t}+\phi\frac{\partial\left(1/B_o\right)}{\partial P_o}\frac{\partial P_o}{\partial t}+\phi\frac{\partial\left(1/B_o\right)}{\partial P_{bp}}\frac{\partial P_{bp}}{\partial t}$$

که در آن P_{bp} فشار نقطه حباب (متغیر) به عنوان یک مجهول جدید است که باید به همراه فشار نفت حل شود. دو جمله اول عبارت فوق مشابه دو جمله اول معادله فشار نفت اشباع است با این تفاوت که مشتقات به صورت مشتق جزئی‌اند و اشباع‌شدگی گاز صفر است. بنابراین، تقریب این دو جمله می‌تواند در حال نوشته شود:

$$\left[\frac{1}{B}\frac{d\phi}{dP_o}\frac{\partial P_o}{\partial t}+\phi\frac{\partial\left(1/B_o\right)}{\partial P_o}\frac{\partial P_o}{\partial t}\right]_i\approx\frac{\phi_i}{\Delta t}\left[\frac{c_r}{B_o}+\frac{\partial\left(1/B_o\right)}{\partial P_o}\right]_i\left(P_{o_i}-P_{o_i}^t\right)$$

برای جمله آخر، از تقریب استاندارد زیر استفاده می‌شود:

$$\left[\phi\frac{\partial\left(1/B_o\right)}{\partial P_{bp}}\frac{\partial P_{bp}}{\partial t}\right]_i \approx \frac{\phi_i}{\Delta t}\left[\frac{\partial\left(1/B_o\right)}{\partial P_o}\right]_i\left(P_{o_i}-P_{o_i}^{\,t}\right)$$

جمله انباشتگی گاز

جمله طرف راست معادله گاز به مانند زیر بسط داده می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi R_{so}}{B_o}\right)=R_{so}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{B_o}\right)+\frac{\phi}{B_o}\frac{dR_{so}}{dP_{bp}}\frac{\partial P_{bp}}{\partial t}$$

به دلیل آنکه جمله اول با طرف راست معادله نفت برابر است (ضرب شده در R_{so}) می‌توان نوشت:

$$\left[R_{so}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{B_o}\right)\right]_i \approx \frac{\left(\phi R_{so}\right)_i}{\Delta t}\left[\frac{c_r}{B_o}+\frac{\partial\left(1/B_o\right)}{\partial P_o}\right]_i\left(P_{o_i}-P_{o_i}^{\,t}\right)+\frac{\left(\phi R_{so}\right)_i}{\Delta t}\left[\frac{\partial\left(1/B_o\right)}{\partial P_{bp}}\right]_i\left(P_{bp_i}-P_{bp_i}^{\,t}\right)$$

جمله دوم به صورت زیر می‌شود:

$$\left[\frac{\phi}{B_o}\frac{dR_{so}}{dP_{bp}}\frac{\partial P_{bp}}{\partial t}\right]_i \approx \frac{\phi_i}{\Delta t B_{o_i}}\left[\frac{dR_{so}}{dP_o}\right]_i\left(P_{bp_i}-P_{bp_i}^{\,t}\right)$$

بنابراین، معادلات گاز و نفت در شکل گسسته‌شده با در نظر گرفتن جملات چاه به قرار زیر تبدیل می‌شوند:

$$T_{xo_{i+1/2}}\left(P_{o_{i+1}}-P_{oi}\right)+T_{xo_{i+1/2}}\left(P_{o_{i-1}}-P_{oi}\right)-q'_{oi}$$
$$=C_{poo_i}\left(P_{o_i}-P_{o_i}^{\,t}\right)+C_{bpq}\left(P_{bp_i}-P_{bp_i}^{\,t}\right)\qquad i=1,....,N$$

$$\left(R_{so}T_{xo}\right)_{i+1/2}\left(P_{o_{i+1}}-P_{oi}\right)+\left(R_{so}T_{xo}\right)_{i-1/2}\left(P_{o_{i-1}}-P_{oi}\right)$$
$$-\left(R_{so}q'_o\right)_i-q'_{gi}=C_{pog_i}^{\,t}\left(P_{o_i}-P_{oi}^{\,t}\right)+C_{bpq}\left(P_{bp_i}-P_{bp_i}^{\,t}\right)$$
$$i=1,....,N$$

در حالیکه برای معادله نفت:

$$C_{poo_i}=\frac{\phi_i}{\Delta t}\left(\frac{c_r}{B_o}+\frac{\partial\left(1/B_o\right)}{\partial P_o}\right)_i$$

$$C_{bpo_i}=\frac{\phi_i}{\Delta t}\left(\frac{\partial\left(1/B_o\right)}{\partial P_o}\right)_i$$

و برای معادله گاز:

$$C_{pog_i}=\frac{\left(R_{so}\phi\right)_i}{\Delta t}\left(\frac{c_r}{B_o}+\frac{\partial\left(1/B_o\right)}{\partial P_o}\right)_i$$

$$C_{bpg_i}=\frac{\phi_i}{\Delta t}\left[R_{so}\frac{\partial\left(1/B_o\right)}{\partial P_o}+\frac{1}{B_o}\frac{dR_{so}}{dP_{bp}}\right]_i$$

جملات مشتق برای هر گام زمان با توجه به داده‌های ورودی به صورت عددی حساب می‌شوند.

$$\left(\frac{\partial\left(1/B_o\right)}{\partial P_o}\right)_i, \left(\frac{\partial\left(1/B_o\right)}{\partial P_{bp}}\right)_i, and \left(\frac{dR_{so}}{dP_{bp}}\right)_i$$

شرایط مرزی

شرایط مرزی برای سیستم‌های گاز-نفت تحت اشباع تا حدی ساده‌تر از شرایط سیستم گاز-نفت اشباع‌اند. این به آن خاطر است که فقط یک فاز از مخزن تولید می‌شود. به طور رایج، گاز در بلوکی با دبی سطحی ثابت یا فشار ته چاه ثابت تزریق می‌شود. و نفت (و گاز محلول) از بلوکی با فشار ته چاه ثابت یا دبی ثابت برداشت تولید می‌شود. گاهی اوقات مخزن با نرخ تخلیه ثابت مد نظر است که یا در آن مقدار گاز تزریقی با مقدار دبی تولید تعین‌شده برابر است (در نتیجه فشار متوسط مخزن ثابت است) یا دبی تولید مخزن برابر است با دبی تزریق گاز تعین شده.

دبی ثابت تزریق گاز

جمله دبی گاز هم اکنون در معادله گاز وجود دارد. بنابراین، برای دبی تزریق ثابت گاز در سطح Q_{gi} (منفی) در چاهی در بلوک i:

$$q'_{gi} = Q_{gi} / \left(A\Delta x_i\right)$$

به طور معمول فرض می‌شود که گاز تزریقی فوراً با نفت موجود در بلوک i حل می‌شود.

بنابراین فشار ته چاه تابعی از تحرک‌پذیری نفت اطراف چاه است (چون هیچگونه گاز آزادی وجود ندارد.) پس، فشار ته چاه مانند روابط جریان گاز-نفت اشباع می‌تواند محاسبه شود:

$$q'_{gi} = \frac{WC_i}{A\Delta x_i}\left(\frac{B_{oi}}{B_{gi}}\lambda_{oi} + \lambda_{gi}\right)\left(P_{o_i} - P_{bh_i}\right)$$

و چون تحرک‌پذیری گاز صفر است:

$$q'_{gi} = \frac{WC_i}{A\Delta x_i}\frac{B_{oi}}{B_{gi}}\lambda_{oi}\left(P_{o_i} - P_{bh_i}\right)$$

ثابت چاه مانند قبل تعریف می‌شود:

$$WC_i = \frac{2\pi k_i h}{\ln\left(\frac{r_e}{r_w}\right)}$$

و

$$r_e = \sqrt{\frac{\Delta y \Delta x_i}{\pi}}$$

تزریق در فشار ثابت ته چاه

با استفاده از معادله چاه فوق،جملات مربوط باید در ضرایب مناسبی از حل فشار قرار گیرند.

$$q'_{gi} = \frac{WC_i}{A\Delta x_i}\frac{B_{oi}}{B_{gi}}\lambda_{oi}\left(P_{o_i} - P_{bh_i}\right)$$

در پایان هر گام زمان، از معادله فوق برای محاسبه دبی تزریق واقعی گاز استفاده می‌کنند.

دبی ثابت تولید نفت

برای معادله نفت، این شرایط مانند مورد نفت اشباع بررسی می‌شود. برای دبی ثابت برداشت نفت در سطح Q_{oi} (مثبت) در چاهی در بلوک i:

$$q'_{oi} = Q_{oi}/\left(A\Delta x_i\right)$$

همواره به همراه تولید نفت، گاز محلول نیز تولید می‌شود. این مورد با وارد کردن جمله $\left(q'_{oi}R_{so_i}\right)$ در معادله گاز به حساب آورده می‌شود. در پایان هر گام زمان، پس از حل معادلات برای فشار، از معادله چاه برای محاسبه فشار ته چاه، چاه تولید استفاده می‌شود.

$$Q_{oi} = WC_i\lambda_{oi}\left(P_{o_i} - P_{bh_i}\right)$$

به مانند سیستم‌های آب-نفت، چاه‌های تولید در سیستم‌های گاز-نفت با یک فشار ثابت ته چاه محدود شده‌اند. اگر به این فشار برسیم چاه باید به فشار ثابت ته چاه تبدیل گردد. همچنین، نسبت گاز به نفت (GOR) برای سیستم‌های تحت اشباع با نسبت گاز محلول به نفت برابر است:

$$GOR_i = R_{so_i}$$

تولید با نرخ تخلیه ثابت مخزن

در صورتی که کل تولید سیالات از مخزنی (در شرایط مخزن) برابر باشد با کل حجم تزریق‌شده به آن به طوری که فشار متوسط مخزن تقریباً ثابت باشد، روابط زیر صادق خواهد بود:

$$Q_{oi}B_{oi} = -Q_{g_{inj}}B_{g_{inj}} = -Q_{g_{inj}}\frac{B_{o_{inj}}}{B_{g_{inj}}}\lambda_{oi}$$

و در پایان یک گام زمان، فشار ته چاه از معادله زیر حساب می‌شود:

$$q'_{oi} = \frac{WC_i}{A\Delta x_i}\lambda_{oi}\left(P_{o_i} - P_{bh_i}\right)$$

تولید در فشار ثابت ته چاه

برای چاه تولید در بلوک i با P_{bh} ثابت، دبی نفت از رابطه زیر حساب می‌شود:

$$Q_{oi} = WC_i\lambda_{oi}\left(P_{o_i} - P_{bh_i}\right)$$

و یا

$$q'_{oi} = \frac{WC_i}{A\Delta x_i}\lambda_{oi}\left(P_{o_i} - P_{bh_i}\right)$$

و دبی گاز محلول:

$$R_{so}q'_{oi} = R_{so_i}\frac{WC_i}{A\Delta x_i}\lambda_{oi}\left(P_{o_i} - P_{bh_i}\right)$$

جملات ظاهر شده در معادلات فوق در ضرایب مناسب، در هنگام حل فشار، در نظر گرفته می-شوند.

حل با روش IMPES

روش حل، شبیه به موارد قبلی است. به منظور درستی نام، روش باید به نام IMPEBPP[1] تغیر کند، فشار ضمنی، فشار نقطه حباب صریح. فرضیات پیشین استفاده شده برای ضرایب،در اینجا نیز استفاده می‌شوند:

$$T_{xo}{}^t, R_{so}{}^t, C_{poo}{}^t, C_{pog}{}^t, C_{bpo}{}^t, C_{bpg}{}^t$$

با این تقریب‌ها معادلات به قرار زیر تبدیل می‌شوند:

$$T_{xo}{}^t_{i+1/2}\left(P_{o_{i+1}} - P_{oi}\right) + T_{xo}{}^t_{i-1/2}\left(P_{o_{i-1}} - P_{oi}\right) - q'_{oi} = C_{poo_i}{}^t\left(P_{o_i} - P^t_{o_i}\right) + C_{bpo_i}{}^t\left(P_{bp_i} - P_{bp_i}{}^t\right) \qquad i = 1,....,N$$

$$\left(R_{so}T_{xo}\right)^t_{i+1/2}\left(P_{o_{i+1}} - P_{oi}\right) + \left(R_{so}T_{xo}\right)^t_{i-1/2}\left(P_{o_{i-1}} - P_{oi}\right) - \left(R_{so}q'_{oi}\right)_i - q'_{gi}$$
$$= C_{pog_i}{}^t\left(P_{o_i} - P^t_{oi}\right) + C_{bpg_i}{}^t\left(P_{bp_i} - P_{bp_i}{}^t\right) \qquad i = 1,....,N$$

حل فشار نفت با IMPES

با بازنویسی معادلات فوق:

$$\left[T_{xo}{}^t_{i+1/2} + \alpha_i\left(R_{so}T_{xo}\right)^t_{i+1/2}\right]\left(P_{o_{i+1}} - P_{oi}\right) + \left[T_{xo}{}^t_{i-1/2} + \alpha_i\left(R_{so}T_{xo}\right)^t_{i-1/2}\right]\left(P_{o_{i-1}} - P_{oi}\right)$$
$$-q'_{oi} - \alpha_i\left(q'_g + R_{so}{}^t C_{pog}{}^t\right)_i = \left(C_{poo_i}{}^t + \alpha_i C_{pog_i}{}^t\right)\left(P_{o_i} - P^t_{o_i}\right) \qquad i = 1,....,N$$

که

$$\alpha_i = -C_{bpg_i}{}^t / C_{bpo_i}{}^t$$

و در نهایت:

[1] Implicite Pressure , Explicit Bubble Point Pressure

$$a_i P_{o_{i-1}} + b_i P_{o_i} + c_i P_{o_{i+1}} = d_i \qquad i = 1, \ldots, N$$

$$a_i = T_{xo}{}^{t}_{i-1/2} + \alpha_i \left(R_{so} T_{xo} \right)^{t}_{i-1/2}$$

$$c_i = T_{xg}{}^{t}_{i+1/2} + \alpha_i \left(R_{so} T_{xo} \right)^{t}_{i+1/2}$$

$$b_i = -T_{xo}{}^{t}_{i-1/2} - T_{xo}{}^{t}_{i+1/2} - C_{poo_i}{}^{t} - \alpha_i \left[\left(R_{so} T_{xo} \right)^{t}_{i-1/2} + \left(R_{so} T_{xo} \right)^{t}_{i+1/2} + C_{pog_i}{}^{t} \right]$$

$$d_i = -\left(C_{poo_i}{}^{t} + \alpha_i C_{pog_i}{}^{t} \right) P^{t}_{o_i} + q'_{oi} + \alpha_i \left(q'_g + R_{so}{}^{t} q'_o \right)_i$$

اصلاحات برای شرایط مرزی

همانند قبل، همه شرایط این که در آنها دبی معین شده است هم‌اکنون به وسیله جملات $q'_{oi}, R_{so} q'_{oi}, q'_{gi}$ در ضرایب مناسبی گنجانیده شده‌اند.

برای چاهی با شرط تزریق در فشار ته چاه، عبارت زیر به کار می‌رود:

$$q_{gi} = \frac{WC_i}{A\Delta x_i} \frac{B_{oi}}{B_{gi}} \lambda_{oi} \left(P_{o_i} - P_{bh_i} \right)$$

در بلوکی با این نوع چاه ضرایب ماتریس d_i و b_i اینگونه اصلاح می‌شوند:

$$b_i = -T_{xo}{}^{t}_{i-1/2} - T_{xo}{}^{t}_{i+1/2} - C_{poo_i}{}^{t} - \alpha_i \left[\left(T_{xg} \right)^{t}_{i-1/2} + \left(T_{xg} \right)^{t}_{i+1/2} + C_{pog_i}{}^{t} + \frac{WC_i}{A\Delta x_i} \frac{B^t_{oi}}{B^t_{gi}} \lambda^t_{oi} \right]$$

$$d_i = -\left(C_{poo_i}{}^{t} + \alpha_i C_{pog_i}{}^{t} \right) P^{t}_{o_i} - \frac{WC_i}{A\Delta x_i} \lambda^t_{oi} P_{bh_i} - \alpha_i \frac{WC_i}{A\Delta x_i} \frac{B^t_{oi}}{B^t_{gi}} \lambda^t_{oi} P_{bh_i}$$

برای چاهی با شرط تولید در فشار ته چاه، نیز با عبارات زیر، ضرایب d_i و b_i اصلاح می‌شوند:

$$q'_{oi} = \frac{WC_i}{A\Delta x_i} \lambda_{oi} \left(P_{o_i} - P_{bh_i} \right)$$

و

$$R_{so} q'_{oi} = \frac{WC_i}{A\Delta x_i} R_{so_i} \lambda_{oi} \left(P_{o_i} - P_{bh_i} \right)$$

در نهایت:

$$b_i = -\left(T_{xo}{}^{t}_{i+1/2} + T_{xo}{}^{t}_{i+1/2} + C_{poo_i}{}^{t} + \frac{WC_i}{A\Delta x_i} \lambda^t_{oi} \right)$$

$$- \alpha_i \left[\left(R_{so} T_{xo} \right)^{t}_{i+1/2} + \left(R_{so} T_{xo} \right)^{t}_{i+1/2} + C_{pog_i}{}^{t} + \frac{WC_i}{A\Delta x_i} R_{so_i} \lambda^t_{oi} \right]$$

$$d_i = -\left(C_{poo_i}{}^{t} + \alpha_i C_{pog_i}{}^{t} \right) P^{t}_{o_i} - \frac{WC_i}{A\Delta x_i} \lambda^t_{oi} P_{bh_i} - \alpha_i \frac{WC_i}{A\Delta x_i} R_{soi}{}^{t} \lambda^t_{oi} P_{bh_i}$$

حل فشار نقطه حباب با IMPES

با داشتن فشار نفت، P_{bp} را می‌توان از معادله نفت یا گاز حساب کرد. در زیر از معادله نفت استفاده شده است:

$$T_{xo_{i+1/2}}^{\ t}\left(P_{o_{i+1}}-P_{oi}\right)+T_{xo_{i-1/2}}^{\ t}\left(P_{o_{i-1}}-P_{oi}\right)-q'_{oi}=C_{poo_i}^{\ t}\left(P_{o_i}-P_{o_i}^{t}\right)+C_{bpo_i}^{\ t}\left(P_{bp_i}-P_{bp_i}^{\ t}\right)\qquad i=1,....,N$$

با توجه به اینکه P_{bp} در جمله آخر ظاهر شده است معادله را می‌توانیم به طور صریح برای آن حل کنیم:

$$P_{bp_i}=P_{bp_i}^{\ t}+\frac{1}{C_{bpo_i}^{\ t}}\left[T_{xo_{i+1/2}}^{\ t}\left(P_{o_{i+1}}-P_{oi}\right)+T_{xo_{i-1/2}}^{\ t}\left(P_{o_{i-1}}-P_{oi}\right)-q'_{oi}-C_{poo_i}^{\ t}\left(P_{o_i}-P_{o_i}^{t}\right)\right]\quad i=1,....,N$$

برای بلوک‌های با چاه تولیدی حاوی شرایط معین شده، اصلاحات زیر صورت می‌گیرند:

$$P_{bp_i}=P_{bp_i}^{\ t}+\frac{1}{C_{bpo_i}^{\ t}}\left[T_{xo_{i+1/2}}^{\ t}\left(P_{o_{i+1}}-P_{oi}\right)+T_{xo_{i-1/2}}^{\ t}\left(P_{o_{i-1}}-P_{oi}\right)-\frac{WC_i}{A\Delta x_i}\frac{B_{oi}}{B_{gi}}\lambda_{oi}\left(P_{o_i}-P_{bh_i}\right)-C_{poo_i}^{\ t}\left(P_{o_i}-P_{o_i}^{t}\right)\right]$$
$$i=1,....,N$$

با داشتن فشار نفت برای یک گام زمان، فشار ته چاه یا دبی توسط روابط مناسب حساب می‌شوند. برای چاه تزریق

$$q'_{gi}=\frac{WC_i}{A\Delta x_i}\frac{B_{oi}}{B_{gi}}\lambda_{oi}\left(P_{o_i}-P_{bh_i}\right)$$

و برای چاه تولید:

$$q'_{gi}=\frac{WC_i}{A\Delta x_i}\lambda_{oi}\left(P_{o_i}-P_{bh_i}\right)$$

و

$$R_{so_i}q'_{oi}=\frac{WC_i}{A\Delta x_i}R_{so_i}\lambda_{oi}\left(P_{o_i}-P_{bh_i}\right)$$

نسبت گاز به نفت برابر با نسبت گاز مجهول به نفت است:

$$GOR_i=R_{so_i}$$

قبل از به روز کردن ضرایب ماتریس برای زمان جدید، در همه چاه‌ها شرایط محدود کننده انتهایی باید بررسی شود تا اگر لازم باشد شرط چاه از یک نوع، به نوع دیگر تغیر کند.

توانایی روش IMPES

توانایی روش برای سیستم‌های گاز-نفت تحت اشباع نسبتاً بهتر از سیستم‌های پیشین بحث شده است. اگرچه، به دلیل تغیرات سریع در فشار نقطه حباب بلوک‌ها، گام‌های زمانی (Δt) کوچکتر مورد نیاز است.