شبیه‌سازی آب– نفت – حل IMPES

قبلاً، معادله پیوستگی برای هر فاز سیال به عنوان معادلات جریان چند فازی برای لایه افقی و یک بعدی و دارای سطح مقطع جریان ثابت بیان شد:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(u_l \rho_l\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi \rho_l S_l\right) \qquad l=o,w,g$$

و معادلات دارسی متناظر برای هر فاز:

$$u_l=-\frac{kk_{rl}}{\mu_l}\frac{\partial P_l}{\partial x} \qquad l=o,w,g$$

که

$$P_{cow}=P_o-P_w$$
$$P_{cog}=P_g-P_o$$
$$\sum_{l=o,w,g} S_l=1$$

با در نظر گرفتن سیستم آب و نفت و جایگذاری معادلات دارسی متناظر و توصیفات سیال Black-oil در معادله پیوستگی و وارد کردن جمله تولید/ تزریق در آن، عبارت زیر برای سیستم دو فازی به دست می‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kk_{ro}}{\mu_o B_o}\frac{\partial P_o}{\partial x}\right)-q_o'=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_o}{B_o}\right)$$

و

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kk_{rw}}{\mu_w B_w}\frac{\partial P_o}{\partial x}\right)-q_w'=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_w}{B_w}\right)$$

که

$$P_{cow}=P_o-P_w$$

و

$$S_0+S_w=1$$

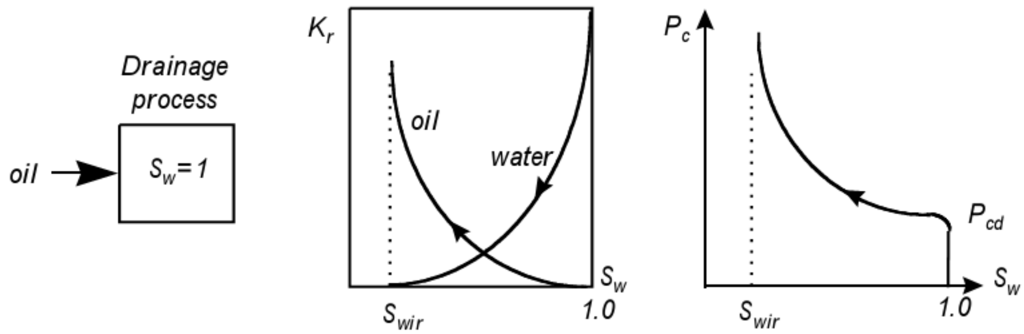
نفوذپذیریهای نسبی و فشارهای موئینگی توابعی از اشباع‌شدگی آب هستند. در حالیکه ضرایب حجمی سازند، گرانرویها و تخلخل توابعی از فشاراند. خواص سیال همان هستند که در سیستم سیال Black-oil در قبل تعریف شده‌اند. در ابتدا مروری بر نفوذپذیریهای نسبی و روابط فشار موئینگی برای سیستم‌های آب – نفت خواهیم داشت.

مروری بر نفوذپذیری‌های نسبی و فشار موئینگی برای سیستم آب - نفت

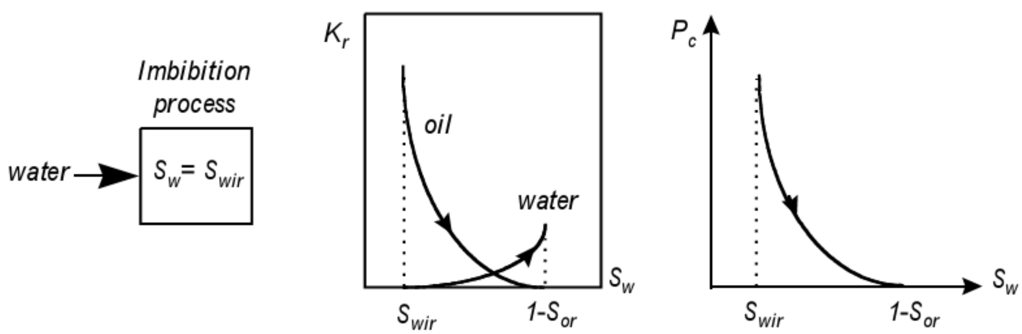
ممکن است منحنی‌های آشام[1] و ریزش[2] در شبیه‌سازی سیستم آب – نفت، با توجه به نوع سیستم، مورد نیاز باشد. اگر چه مهم‌ترین فرآیند درجابجایی نفت توسط آب، آشام است اما در بعضی اوقات به دلیل اثرهای هندسی مخزن و یا تغییر در دبی تزریق یا تولید ممکن است فرآیند عکس، ریزش، اتفاق افتد.

البته، اشباع‌شدگی اولیه سنگ ناشی از فرآیند ریزش در زمان تجمع نفت است. بنابراین، به منظور مقداردهی اولیه به اشباع‌شدگی، منحنی فشار موئینگی ریزش مورد نیاز است.

برای سنگ متخلخل که در حالت اولیه با آب به طور کامل پر بوده و سپس آب موجود با نفت جابجا شده باشد، نمودارهای نفوذپذیری و فشار موئینگی به صورت زیر تعریف می‌شوند:



با اعمال عکس فرآیند فوق به سیستم، به وسیله تزریق آب برای جابجا کردن نفت، منحنی‌های آشام به دست می‌آیند:



---

[1] Imbibitions

[2] Drainage

منحنی‌های فوق نمونه‌ای کامل از سیستم ترشونده نسبت به آب[1] هستند. برای سیستم‌های با خاصیت ترشوندگی کمتر نسبت به آب، نمودار موئینگی دارای یک قسمت منفی در اشباع‌شدگی بالای آب است. شکل نمودار بستگی به سنگ و خصوصیات ترشوندگی آن دارد.

گسسته‌سازی معادلات

همانطور که برای سیستم یک فازی انجام داده‌ایم، از روش مشابه‌ای را برای معادلات دو فازی استفاده خواهیم کرد.

جملات طرف چپ معادله جریان:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kk_{ro}}{\mu_o B_o}\frac{\partial P_o}{\partial x}\right)_i = T_{xo_{i+1/2}}\left(P_{o_{i+1}} - P_{o_i}\right) - T_{xo_{i-1/2}}\left(P_{o_i} - P_{o_{i-1}}\right)$$

و

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kk_{rw}}{\mu_w B_w}\frac{\partial P_w}{\partial x}\right)_i = T_{xw_{i+1/2}}\left(P_{w_{i+1}} - P_{w_i}\right) - T_{xw_{i-1/2}}\left(P_{w_i} - P_{w_{i-1}}\right)$$

که برای مثال جمله عبورپذیری نفت در جهت مثبت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_{xo_{i+1/2}} = \frac{2\lambda_{o_{i+1/2}}}{\Delta x_i\left(\frac{\Delta x_i}{k_i} + \frac{\Delta x_{i+1}}{k_{i+1}}\right)}$$

و جمله تحرک‌پذیری نفت به شکل زیر:

$$\lambda_o = \frac{k_{ro}}{\mu_o B_o}$$

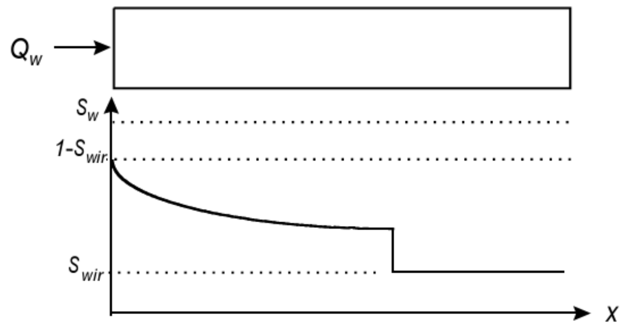
در این مورد، جمله تحرک‌پذیری علاوه بر فشار تابعی از اشباع‌شدگی نیز است. بنابراین، این تابعیت در ارزیابی این جمله در شکل گسسته، اهمیت دارد.

جمله تحرک‌پذیری بالادستی[2]

به خاطر وابستگی شدید جملات تحرک‌پذیری دو فازی به اشباع‌شدگی، این جملات در حل معادلات اثر بسیار بیشتری نسبت به حالت تک‌فازی خواهند داشت. با در نظر گرفتن حل Buckley-Leveret برای سیستم یک بعدی جابجایی نفت توسط آب، اثر تحرک‌پذیری روی حل اشباع‌شدگی نشان داده می‌شود:

[1] Water wet

[2] Upstream



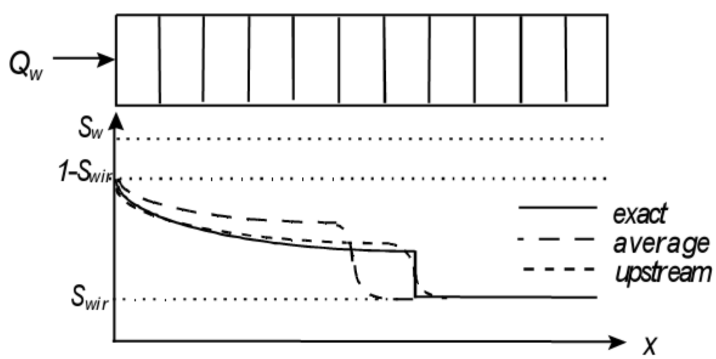
در اینجا، با نادیده گرفتن فشار موئینگی، آب در یک جبهه ناپیوسته در طول محیط متخلخل، همانگونه که در شکل بالا نشان داده شده است، حرکت می‌کند. در شبیه‌سازی این فرآیند، با استفاده از سیستم گسسته، نتایج با توجه به چگونگی محاسبه جمله تحرک‌پذیری فرق خواهند داشت.

دو مورد با استفاده از بلوک‌های i و $i+1$ به عنوان مثال، مورد توجه قرار می‌گیرد:

۱) انتخاب بالادستی $\lambda_{o_{i+1/2}} = \lambda_{o_i}$

۲) انتخاب متوسط وزن‌دار $\lambda_{o_{i+1/2}} = \left(\Delta x_i \lambda_{o_i} + \Delta x_{i+1} \lambda_{o_{i+1}}\right) \Big/ \left(\Delta x_i + \Delta x_{i+1}\right)$

پروفیل‌های اشباع‌شدگی ناشی از دو انتخاب فوق، توسط شبیه‌ساز محاسبه شده و در شکل بعدی قرار داده شده‌اند. بدون هیچ تردیدی، انحراف از جواب دقیق بستگی به اندازه بلوک‌ها دارد. ممکن است اشباع شدگی آب در پشت جبهه ناپیوسته، برای بلوک‌های با اندازه بزرگ و انتخاب پایین‌دستی جمله تحرک‌پذیری، منفی محاسبه شود. البته برای بلوک‌های با اندازه بسیار ریز، تفاوت قابل ملاحظه‌ای در جواب محاسبه شده وجود نداشته باشد.



به دلیل آنکه در هر سه مورد مقدار آب تزریق شده برابر بوده است بنابراین تفاوتها فقط باید در مورد اشباع‌شدگی آب در جبهه رانش و محل جبهه رانش باشد. همچنین در هر سه مورد باید سطح زیر نمودار یکسان باشد. توضیح فیزیکی این پدیده‌ها، به ویژه در مورد تحرک‌پذیری متوسط وزن‌دار، آن است که دبی جریان نفت خارج شونده از هر بلوک، بیش از هر چیز، به نفوذپذیری نسبی نفت در آن بلوک بستگی دارد.

به ویژه، برای جریان بین بلوک‌های i و $i+1$ نفوذپذیری نسبی مربوط به یک بلوک i وقتی حساب می‌شود که جریان در حال متوقف شدن باشد (به عبارت دیگر وقتی که بلوک به اشباع‌شدگی نفت باقیمانده[۱] برسد). اگر تحرک‌پذیری بر اساس متوسط وزن‌دار باشد، ممکن است اشباع‌شدگی نفت واقعاً به S_{or} برسد در حالیکه تحرک‌پذیری در بلوک $i+1$ هنوز بزرگتر از صفر باشد. بنابراین جریان خارج شونده از بلوک i تا زمانی که نفوذپذیری نسبی در بلوک $i+1$ بزرگتر از صفر است، متوقف نخواهد شد (در نتیجه مقدار k_{ro} صفر نمی‌شود در حالیکه مقدار واقعی آن صفر است). مثل همیشه، برای بلوک‌های با ابعاد ریز، ممکن است خطای حاصله کوچک باشد. اما در مورد ابعاد عملی، خطای به وجود آمده مهم خواهد بود.

بنابراین در شبیه‌سازی مخزن، معمولاً از تحرک‌پذیری بالادستی استفاده می‌شوند.

برای مثال در جهت مثبت برای جریان آب و نفت:

$$\lambda_{o_{i+1/2}} = \begin{cases} \lambda_{o_{i+1}} & if \quad P_{o_{i+1}} \geq P_{o_i} \\ \lambda_{o_i} & if \quad P_{o_{i+1}} < P_{o_i} \end{cases}$$

$$\lambda_{w_{i+1/2}} = \begin{cases} \lambda_{w_{i+1}} & if \quad P_{w_{i+1}} \geq P_{w_i} \\ \lambda_{w_i} & if \quad P_{w_{i+1}} < P_{w_i} \end{cases}$$

جمله سمت راست

جمله سمت راست به صورت زیر بسط داده می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_o}{B_o}\right) = \frac{\phi}{B_o}\frac{\partial S_o}{\partial t} + S_o \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{B_o}\right)$$

به دلیل آنکه جمله دوم سمت راست عبارت فوق با جمله سمت راست معادله تک فازی یکی است به طور مستقیم عبارت زیر را می‌نویسیم:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{B_o}\right)_i = \frac{\phi_i}{\Delta t}\left[\frac{c_r}{B_o} + \frac{d\left(1/B_o\right)}{dP_o}\right]_i \left(P_{o_i} - P_{o_i}^t\right)$$

برای جمله اول، اشباع‌شدگی نفت را با اشباع‌شدگی آب:

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} = -\frac{\partial S_o}{\partial t}$$

بنابراین، از تقریب استاندارد پسرو مرتبه اول برای مشتق زمان استفاده می‌کنیم:

$$\left(\frac{\phi}{B_o}\frac{\partial S_o}{\partial t}\right) \approx -\frac{\phi_i}{B_{o_i}\Delta t}\left(S_{w_i} - S_{w_i}^t\right)$$

پس، شکل کامل تفاضل برای جمله سمت راست معادله نفت به صورت زیر در می‌آید:

---

[۱] Residual Oil Saturation

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_o}{B_o}\right)_i \approx C_{poo_i}\left(P_{o_i}-P_{o_i}^t\right)+C_{swo_i}\left(S_{w_i}-S_{w_i}^t\right)$$

که

$$C_{poo_i}=\frac{\phi_i\left(1-S_{w_i}\right)}{\Delta t}\left[\frac{c_r}{B_o}+\frac{d\left(1/B_o\right)}{dP_o}\right]_i$$

و

$$C_{swo_i}=-\frac{\phi_i}{B_{o_i}\Delta t}$$

برای معادله آب، روش مشابه‌ای استفاده می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_w}{B_w}\right)=\frac{\phi}{B_w}\frac{\partial S_w}{\partial t}+S_w\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{B_w}\right)$$

جمله دوم سمت راست عبارت فوق به صورت زیر بسط می‌یابد:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{B_w}\right)=\frac{\partial}{\partial P_w}\left(\frac{\phi}{B_w}\right)\frac{\partial P_w}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial P_w}\left(\frac{\phi}{B_w}\right)\left(\frac{\partial P_o}{\partial t}-\frac{\partial P_{cow}}{\partial t}\right)$$

به دلیل آنکه فشار موئینگی تنها تابعی از اشباع‌شدگی آب است:

$$\frac{\partial P_{cow}}{\partial t}=\frac{\partial P_{cow}}{\partial S_w}\frac{\partial S_w}{\partial t}$$

با استفاده از جملات تک فازی و تقریب‌های تفاضل استاندارد برای مشتقات جمله دوم سمت راست معادله آب داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_w}{B_w}\right)\approx C_{pow_i}\left(P_{o_i}-P_{o_i}^t\right)+C_{sww_i}\left(S_{w_i}-S_{w_i}^t\right)$$

که

$$C_{pow_i}=\frac{\phi_i S_{w_i}}{\Delta t}\left[\frac{c_r}{B_w}+\frac{d\left(1/B_w\right)}{dP_w}\right]_i$$

و

$$C_{sww_i}=-\frac{\phi_i}{B_{w_i}\Delta t}-\left(\frac{\partial P_{cow}}{\partial S_w}\right)_i C_{pow_i}$$

بنابراین، شکل گسسته معادلات آب و نفت به صورت زیر در می‌آید:

$$T_{xo_{i+1/2}}\left(P_{o_{i+1}}-P_{o_i}\right)-T_{xo_{i-1/2}}\left(P_{o_i}-P_{o_{i-1}}\right)-q'_{o_i}$$
$$=C_{poo_i}\left(P_{o_i}-P^t_{o_i}\right)+C_{swo_i}\left(S_{w_i}-S^t_{w_i}\right)\quad i=1,\ldots,N$$
$$T_{xw_{i+1/2}}\left(P_{w_{i+1}}-P_{w_i}\right)-T_{xw_{i-1/2}}\left(P_{w_i}-P_{w_{i-1}}\right)-q'_{w_i}$$
$$=C_{pow_i}\left(P_{o_i}-P^t_{o_i}\right)+C_{sww_i}\left(S_{w_i}-S^t_{w_i}\right)\quad i=1,\ldots,N$$

و

$$T_{xo_{i+1/2}}=\frac{2\lambda_{o_{i+1/2}}}{\Delta x_i\left(\frac{\Delta x_i}{k_i}+\frac{\Delta x_{i+1}}{k_{i+1}}\right)}$$
$$T_{xo_{i-1/2}}=\frac{2\lambda_{o_{i-1/2}}}{\Delta x_i\left(\frac{\Delta x_i}{k_i}+\frac{\Delta x_{i-1}}{k_{i-1}}\right)}$$
$$T_{xw_{i+1/2}}=\frac{2\lambda_{w_{i+1/2}}}{\Delta x_i\left(\frac{\Delta x_i}{k_i}+\frac{\Delta x_{i+1}}{k_{i+1}}\right)}$$
$$T_{xw_{i-1/2}}=\frac{2\lambda_{w_{i-1/2}}}{\Delta x_i\left(\frac{\Delta x_i}{k_i}+\frac{\Delta x_{i-1}}{k_{i-1}}\right)}$$

و

$$\lambda_o=\frac{k_{ro}}{\mu_o B_o}$$

و جملات تحرک‌پذیری بالادستی:

$$\lambda_{o_{i+1/2}}=\begin{cases}\lambda_{o_{i+1}} & if\quad P_{o_{i+1}}\geq P_{o_i}\\ \lambda_{o_i} & if\quad P_{o_{i+1}}<P_{o_i}\end{cases}$$
$$\lambda_{o_{i-1/2}}=\begin{cases}\lambda_{o_{i-1}} & if\quad P_{o_{i-1}}\geq P_{o_i}\\ \lambda_{o_i} & if\quad P_{o_{i-1}}<P_{o_i}\end{cases}$$
$$\lambda_{w_{i+1/2}}=\begin{cases}\lambda_{w_{i+1}} & if\quad P_{w_{i+1}}\geq P_{w_i}\\ \lambda_{w_i} & if\quad P_{w_{i+1}}<P_{w_i}\end{cases}$$
$$\lambda_{w_{i-1/2}}=\begin{cases}\lambda_{w_{i-1}} & if\quad P_{w_{i-1}}\geq P_{w_i}\\ \lambda_{w_i} & if\quad P_{w_{i-1}}<P_{w_i}\end{cases}$$

و ضرایب طرف راست به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$C_{poo_i} = \frac{\phi_i\left(1-S_{w_i}\right)}{\Delta t}\left[\frac{c_r}{B_o}+\frac{d\left(1/B_o\right)}{dP_o}\right]_i$$

$$C_{swo_i} = -\frac{\phi_i}{B_{o_i}\Delta t}$$

$$C_{pow_i} = \frac{\phi_i S_{w_i}}{\Delta t}\left[\frac{c_r}{B_w}+\frac{d\left(1/B_w\right)}{dP_w}\right]_i$$

$$C_{sww_i} = \frac{\phi_i}{B_{w_i}\Delta t}-\left(\frac{\partial P_{cow}}{\partial S_w}\right)_i C_{pow_i}$$

سه جمله مشتق فوق به صورت زیراند:

$$\left[\frac{d\left(1/B_o\right)}{dP_o}\right]_i,\left[\frac{d\left(1/B_w\right)}{dP_w}\right]_i,\left(\frac{\partial P_{cow}}{\partial S_w}\right)_i$$

که همه آنها برای یک گام زمان به صورت عددی از دادهای ورودی فشار موئینگی و خواص PVT سیالات حساب می‌شوند

شرایط مرزی

شرایط مرزی برای جریان‌های چند فازی مانند جریان تک فاز است با این تفاوت که در اینجا، دبی‌ها و فشارها می‌توانند برای هر فاز معین شوند. معمولاً، آب در شرایط دبی ثابت سطح یا فشار ته چاه ثابت تزریق می‌شود و نفت و آب در شرایط فشار ته چاه و دبی ثابت نفت در سطح و یا دبی ثابت مایع در سطح، تولید می‌شوند. گاهی اوقات نرخ ثابت تخلیه مخزن مد نظر است. یعنی آنکه، یا دبی تزریق آب با دبی نعین شده تولید مایع برایر است (که در آن صورت فشار متوسط مخزن تقریباً ثابت است) و یا آنکه دبی تولید مایع برایر است با دبی نعین شده تزریق آب است.

دبی ثابت تزریق آب

این مورد ساده‌ترین شرط است. هم اکنون جمله دبی آب در معادله آب وارد شده است. بنابراین برای دبی تزریق ثابت (منفی) Q_{wi} در چاهی در بلوک i:

$$q'_{w_i} = \frac{Q_{w_i}}{A\Delta x_i}$$

فشار تزریق ته چاه بعد از حل معادلات در هر گام، به صورت تئوری از معادله چاه محاسبه می‌شود:

$$Q_{w_i} = WC_i\lambda_{o_i}\left(P_{w_i}-P_{bh_i}\right)$$

ثابت چاه مانند جریان یک فازی تعریف می‌شود:

$$WC_i = \frac{2\pi k_i h}{\ln\left(r_e / r_w\right)}$$

که r_w شعاع چاه و r_e شعاع ناحیه ریزش است که از رابطه تئوری زیر حساب می‌شود (با فرض جریان شعاعی):

$$r_e = \sqrt{\frac{\Delta y \Delta x_i}{\pi}}$$

اما سیالات جابجا شونده در مخزن سبب ایجاد مقاومت برای سیال تزریق شده می‌شوند. بنابراین به عنوان تقریب بهتر، از مجموع تحرک‌پذیری‌های سیالات حاضر در بلوک تزریق، در معادله چاه استفاده می‌شود:

$$Q_{w_i} B_{w_i} = WC_i \left(\frac{k_{ro_i}}{\mu_{o_i}} + \frac{k_{rw_i}}{\mu_{w_i}} \right) \left(P_{w_i} - P_{bh_i} \right)$$

و

$$Q_{w_i} = WC_i \left(\frac{B_{o_i}}{B_{w_i}} \lambda_{o_i} + \lambda_{w_i} \right) \left(P_{w_i} - P_{bh_i} \right)$$

به وسیله این تقریب، تزریق در بلوکی که هیچ یا کمی آب در آن وجود دارد، بیش از هر چیز توسط تحرک‌پذیری نفت کنترل می‌شود. در مراحل بعدی، تحرک‌پذیری آب کنترل را در دست خواهد گرفت. چاه‌های تزریق، برای جلوگیری از شکافتن سازند ، دارای یک حد ماکزیمم در فشار تزریق ته چاه هستند. این مطلب در پایان هر گام باید بررسی شود و در صورت لزوم دبی تزریق کاهش یابد یا به جای دبی تزریق از فشار ثابت ته چاه استفاده شود.

معمولا، فشار موئینگی در معادله چاه نادیده گرفته می‌شود. به ویژه در شبیه‌سازی مخزن در مقیاس میدان. بنابراین معادله چاه به صورت زیر می‌شود:

$$Q_{w_i} = WC_i \left(\frac{B_{o_i}}{B_{w_i}} \lambda_{o_i} + \lambda_{w_i} \right) \left(P_{o_i} - P_{bh_i} \right)$$

اما، در شبیه‌سازی در مقیاس کوچک، مثل مغزه‌های استفاده شده در آزمایشهای آزمایشگاهی، ممکن است این مورد سبب خطای قابل توجهی شود.

تزریق در فشار ثابت ته چاه

تزریق در فشار ثابت ته چاه به وسیله فشار ثابت تزریق در پمپ تزریق در سطح یا توسط فشار هیدرواستاتیکی چاه پرشده از آب بدست می‌آید. دوباره از معادله چاه فوق استفاده می کنیم.

$$Q_{w_i} = WC_i \left(\frac{B_{o_i}}{B_{w_i}} \lambda_{o_i} + \lambda_{w_i} \right) \left(P_{w_i} - P_{bh_i} \right)$$

و یا

$$Q_{w_i} = WC_i\left(\frac{B_{o_i}}{B_{w_i}}\lambda_{o_i} + \lambda_{w_i}\right)\left(P_{o_i} - P_{bh_i}\right)$$

اگر فشار موئینگی در بلوک تزریق نادیده گرفته شود.

به دلیل آنکه فشار بلوک تزریق مجهول است، جملات متناظر باید در ضرایب مناسبی از معادلات جبری برای حل فشار، باید در نظر گرفته شود. با استفاده از معادله چاه فوق دبی تزریق واقعی در پایان محاسبات برای این گام، حساب می-شود.

دبی ثابت تولید نفت

برای معادله نفت، این شرط مانند شرط دبی ثابت تزریق آب بررسی می‌شود. بنابراین برای دبی ثابت تولید نفت در سطح Q_{oi} در چاهی در بلوک i:

$$q'_{o_i} = \frac{Q_{o_i}}{A\Delta x_i}$$

به طور معمول، به همراه تولید نفت، آب نیز تولید می‌شود. بنابراین معادله آب نیز برای جمله دبی آب باید اصلاح شود:

$$q'_{w_i} = q'_{o_i}\,\frac{\lambda_{w_i}\left(P_{w_i} - P_{bh_i}\right)}{\lambda_{o_i}\left(P_{o_i} - P_{bh_i}\right)}$$

اگر فشار موئینگی نادیده گرفته شود معادله به شکل ساده زیر تبدیل می‌شود:

$$q'_{w_i} = q'_{o_i}\,\frac{\lambda_{w_i}}{\lambda_{o_i}}$$

فشار تولید ته چاه پس از حل معادلات جبری فشار در هر گام، توسط معادله چاه مربوط به نفت حساب می‌شود. کسر جزئی آب در سطح به قرار زیر است:

$$Q_{o_i} = WC_i\lambda_{o_i}\left(P_{o_i} - P_{bh_i}\right)$$

چاه‌های تولید به منظوراهداف بالابری نفت، توسط مینیمم فشار ته چاه محدود شده‌اند. اگر چاهی به این حد برسد باید به چاهی با فشار ته چاه ثابت تبدیل شود.

کسر جزئی آب در سطح:

$$f_{w_i} = \frac{q'_{w_i}}{q'_{w_i} + q'_{o_i}}$$

به طور معمول، به دلیل محدودیت در تجهیزات فرآیند، دبی چاه‌ها توسط ماکزیمم کسر جزئی آب محدود شده است. اگر چاهی در بلوکی به این محدودیت برسد، بلوکی که بالاترین مقدار کسر جزئی آب را دارد بسته می‌شود و یا آنکه دبی تولید را کاهش می‌دهند.

دبی ثابت تولید مایع

در این مورد، مجموع دبی ثابت تولید مایع Q_{Li} (مثبت) در چاهی در بلوک i معین می‌شود.

$$Q_{L_i} = Q_{o_i} + Q_{w_i}$$

با نادیده گرفتن فشار موئینگی داریم:

$$q'_{o_i} = \frac{\lambda_{o_i}}{\lambda_{o_i} + \lambda_{w_i}} \frac{Q_{L_i}}{A\Delta x_i}$$

و

$$q'_{w_i} = \frac{\lambda_{w_i}}{\lambda_{o_i} + \lambda_{w_i}} \frac{Q_{L_i}}{A\Delta x_i}$$

تولید در نرخ ثابت تخلیه مخزن

این شرط به این گونه بیان می‌شود. فرض کنید دبی تزریق سطحی آب در بعضی از بلوک‌ها $Q_{w_{inj}}$ ثابت باشد. تولید نفت به گونه‌ای است که حجم کل برداشت مایع از چاهی در بلوک i، با کل حجم آب تزریق شده به مخزن برابر است (در نتیجه فشار در مخزن تقریباً ثابت باقی می‌ماند) بنابراین:

$$Q_{o_i} B_{o_i} + Q_{w_i} B_{w_i} = -Q_{w_{inj}} B_{w_{inj}}$$

دوباره با نادیده گرفتن فشار موئینگی داریم:

$$q'_{o_i} = \frac{\lambda_{o_i}}{\lambda_{o_i} B_{o_i} + \lambda_{w_i} B_{w_i}} \left(-Q_{w_{inj}} B_{w_{inj}}\right) \Big/ \left(A\Delta x_i\right)$$

و

$$q'_{w_i} = \frac{\lambda_{w_i}}{\lambda_{o_i} B_{o_i} + \lambda_{w_i} B_{w_i}} \left(-Q_{w_{inj}} B_{w_{inj}}\right) \Big/ \left(A\Delta x_i\right)$$

تولید در فشار ثابت ته چاه

با استفاده از یک چاه تولید در بلوک i با فشار ثابت ته چاه P_{bh_i} :

$$Q_{o_i} = WC_i \lambda_{o_i} \left(P_{o_i} - P_{bh_i}\right)$$

و

$$Q_{w_i} = WC_i \lambda_{w_i} \left(P_{w_i} - P_{bh_i}\right)$$

با جایگذاری در جملات جریان در معادلات جریان، داریم:

$$q'_{oi} = \frac{WC_i}{A\Delta x_i} \lambda_{oi} \left(P_{o_i} - P_{bh_i}\right)$$

و

$$q'_{wi} = \frac{WC_i}{A\Delta x_i} \lambda_{wi} \left(P_{w_i} - P_{bh_i} \right)$$

به دلیل آنکه جملات دبی دارای فشارهای مجهول هستند، در هنگام حل فشار، این فشارهای مجهول باید در ضرایب مناسب ماتریس وارد شوند.

دبی‌های واقعی در پایان هر گام زمانی توسط این معادلات محاسبه می‌شوند و همچنین کسر جزئی آب که معادله آن قبلاً بیان شده است.

حل به روش IMPES

در معادلات فوق فشار نفت (P_{o_i}) و اشباع‌شدگی آب (S_{w_i}) متغیرهای اولیه مجهولند که باید حل شوند. همه ضرایب این معادلات، ضرایب عبورپذیری و انباشتگی، توابعی از این مجهولاتند. همچنین فشارهای موئینگی در طرف چپ معادله آب توابعی از اشباع‌شدگی هستند. بنابراین معادلات، قبل از آنکه ضرایب و فشارهای موئینگی حساب شوند، نمی‌توانند حل شوند به مانند آنکه، این ضرایب و فشارهای موئینگی هم نمی‌توانند حساب شوند مگر آنکه فشارها و اشباع‌شدگی‌ها حل شوند. آشکارا روشی مورد نیاز است که علاوه بر تکرار بر روی حل مجهولات با به روز کردن ضرایب و فشارهای موئینگی و با تکرار آن ، معادلات به جواب نهایی همگرا شوند.یا روش دیگری که فشارهای موئینگی و ضرایب را قبل از حل مشکلات تخمین زند. IMPES روش ساده ای است. این روش بطور گسترده استفاده می شود مخفف IMPES برای جمله روش فشار ضمنی و اشباع شدگی صریح به کار می رود. این روش با جزئیات کامل در زیر توصیف خواهد شد.

در روش IMPES کلید حل معما در تقریب ضرایب و فشارهای موئینگی نهفته است. به طور ساده این ضرایب در زمان t حساب می‌شوند. این کار ما را قادر می‌سازد تا فشارها و اشباع‌شدگی-ها را بدون داشتن روش تکراری حل نمائیم. بنابراین فرضیات زیر انجام می‌شوند:

$$T_{xo}^{\ t}, T_{xw}^{\ t}, C_{po}^{\ t}, C_{pw}^{\ t}, C_{so}^{\ t}, C_{sw}^{\ t}, P_{cow}^{\ t}$$

با داشتن فرضیات فوق معادلات به شکل زیر می‌شوند:

$$\begin{aligned} & T_{xo_{i+1/2}}^{\ t} \left(P_{o_{i+1}} - P_{oi} \right) + T_{xo_{i-1/2}}^{\ t} \left(P_{o_{i-1}} - P_{oi} \right) - q'_{oi} \\ & \qquad = C_{poo_i}^{\ t} \left(P_{o_i} - P_{o_i}^{\ t} \right) + C_{swoi}^{\ t} \left(S_{w_i} - S_{wi}^{\ t} \right) \qquad i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & T_{xw_{i+1/2}}^{\ t} \left[\left(P_{o_{i+1}} - P_{oi} \right) - \left(P_{cow_{i+1}} - P_{cow_i} \right)^t \right] \\ & \qquad + T_{xw_{i-1/2}}^{\ t} \left[\left(P_{o_{i-1}} - P_{oi} \right) - \left(P_{cow_{i-1}} - P_{cow_i} \right)^t \right] - q'_{wi} \\ & \qquad\qquad = C_{pow_i}^{\ t} \left(P_{o_i} - P_{oi}^{\ t} \right) + C_{swwi}^{\ t} \left(S_{w_i} - S_{wi}^{\ t} \right) \qquad i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

حل فشار IMPES

به دلیل آنکه اشباع‌شدگی آب فقط در طرف راست دو معادله در S_{w_i} ظاهر می‌شود، دو معادله فوق با هم ترکیب شده تا اشباع‌شدگی آب بطور کامل از مجهولات حذف شود:

$$\left(T_{xo_{i+1/2}}^{\ t}+\alpha_i T_{xw_{i+1/2}}^{\ t}\right)\left(P_{o_{i+1}}-P_{oi}\right)+\left(T_{xo_{i-1/2}}^{\ t}+\alpha_i T_{xw_{i-1/2}}^{\ t}\right)\left(P_{o_{i-1}}-P_{oi}\right)$$
$$-\alpha_i T_{xw_{i+1/2}}^{\ t}\left(P_{cow_{i+1}}-P_{cow_i}\right)^t-\alpha_i T_{xw_{i-1/2}}^{\ t}\left(P_{cow_{i-1}}-P_{cow_i}\right)^t$$
$$-q'_{oi}-\alpha_i q'_{wi}=\left(C_{poo_i}^{\ t}+\alpha_i C_{pow_i}^{\ t}\right)\left(P_{o_i}-P_{o_i}^{\ t}\right)\qquad i=1,\dots,N$$

که

$$\alpha_i=-C_{swoi}^{\ t}\big/C_{swwi}^{\ t}$$

بنابراین معادلات فشار را به قرار زیر به دست می‌آوریم:

$$a_i P_{o_{i-1}}+b_i P_{oi}+c_i P_{o_{i+1}}=d_i\qquad i=1,\dots,N$$

و

$$a_i=T_{xo_{i-1/2}}^{\ t}+\alpha_i T_{xw_{i-1/2}}^{\ t}$$
$$c_i=T_{xo_{i+1/2}}^{\ t}+\alpha_i T_{xw_{i+1/2}}^{\ t}$$
$$b_i=-\left(T_{xo_{i+1/2}}^{\ t}+T_{xo_{i-1/2}}^{\ t}+C_{poo_i}^{\ t}\right)-\alpha_i\left(T_{xw_{i+1/2}}^{\ t}+T_{xw_{i-1/2}}^{\ t}+C_{pow_i}^{\ t}\right)$$
$$d_i=-\left(C_{poo_i}^{\ t}+\alpha_i C_{pow_i}^{\ t}\right)P_{o_i}^{\ t}+q'_{oi}+\alpha_i q'_{wi}+\alpha_i T_{xw_{i+1/2}}^{\ t}\left(P_{cow_{i+1}}-P_{cow_i}\right)^t+\alpha_i T_{xw_{i-1/2}}^{\ t}\left(P_{cow_{i-1}}-P_{cow_i}\right)^t$$

اصلاحات برای شرایط مرزی

دیده شد که همه انواع دبی‌های مشخص شده برای شرایط چاه در جملات دبی q'_{o_i} و q'_{w_i} گنجانیده شده‌اند. با در نظرگرفتن گام زمانی قبلی (t) به مانند سایر ضرایب IMPES، جملات دبی به طور مناسبی در جملات d_i معادله فوق منظور می‌شود.

برای شرایط تزریق آب در فشار تعین شده ته چاه، عبارت زیر به کار برده می‌شود (در این مورد فشار موئینگی حذف شده است اما به سادگی می‌توان آنرا وارد معادله کرد):

$$Q_{w_i} = WC_i\left(\frac{B_{o_i}}{B_{w_i}}\lambda_{o_i} + \lambda_{w_i}\right)\left(P_{o_i} - P_{bh_i}\right)$$

در بلوکی با چنین چاهی، اصلاحات زیر برای ماتریس ضرایب صورت می‌گیرد:

$$b_i = -\left(T_{xo_{i+1/2}}^{\ t} + T_{xo_{i-1/2}}^{\ t} + C_{poo_i}^{\ t}\right) - \alpha_i\left[T_{xw_{i+1/2}}^{\ t} + T_{xw_{i-1/2}}^{\ t} + C_{pow_i}^{\ t} + \frac{WC_i}{A\Delta x_i}\left(\frac{B_{oi}^t}{B_{wi}^t}\lambda_{oi}^t + \lambda_{wi}^t\right)\right]$$

$$d_i = -\left(C_{poo_i}^{\ t} + \alpha_i C_{pow_i}^{\ t}\right)P_{o_i}^t - \frac{WC_i}{A\Delta x_i}\lambda_{oi}^t P_{bh_i} - \alpha_i\frac{WC_i}{A\Delta x_i}\left(\frac{B_{oi}^t}{B_{wi}^t}\lambda_{oi}^t + \lambda_{wi}^t\right)P_{bh_i} + \alpha_i T_{xw_{i+1/2}}^{\ t}\left(P_{cow_{i+1}} - P_{cow_i}\right)^t + \alpha_i T_{xw_{i-1/2}}^{\ t}\left(P_{cow_{i-1}} - P_{cow_i}\right)^t$$

برای چاه تولیدی با فشار ثابت ته چاه داریم:

$$q'_{oi} = \frac{WC_i}{A\Delta x_i}\lambda_{oi}\left(P_{o_i} - P_{bh_i}\right)$$

و

$$q'_{wi} = \frac{WC_i}{A\Delta x_i}\lambda_{wi}\left(P_{w_i} - P_{bh_i}\right)$$

در بلوکی با چنین چاهی، اصلاحات زیر برای ماتریس ضرایب صورت می‌گیرد:

$$b_i = -\left(T_{xo_{i+1/2}}^{\ t} + T_{xo_{i-1/2}}^{\ t} + C_{poo_i}^{\ t}\frac{WC_i}{A\Delta x_i}\lambda_{oi}^t\right) - \alpha_i\left(T_{xw_{i+1/2}}^{\ t} + T_{xw_{i-1/2}}^{\ t} + C_{pow_i}^{\ t} + \frac{WC_i}{A\Delta x_i}\lambda_{wi}^t\right)$$

$$d_i = -\left(C_{poo_i}^{\ t} + \alpha_i C_{pow_i}^{\ t}\right)P_{o_i}^t - \frac{WC_i}{A\Delta x_i}\lambda_{oi}^t P_{bh_i} - \alpha_i\frac{WC_i}{A\Delta x_i}\lambda_{wi}^t P_{bh_i}$$

حال، معادله فشار را می‌توان با یکی از روشها حل کرد (مثلا روش گوس).

حل اشباع‌شدگی با IMPES

با به دست آوردن فشارهای نفت از معادلات فوق، اشباع‌شدگی آب را می‌توان توسط معادلات آب و یا نفت به دست آورد. در زیر از معادلات نفت استفاده شده است.

$$T_{xo_{i+1/2}}^{\ t}\left(P_{o_{i+1}} - P_{oi}\right) + T_{xo_{i-1/2}}^{\ t}\left(P_{o_{i-1}} - P_{oi}\right) - q'_{oi} = C_{poo_i}^{\ t}\left(P_{o_i} - P_{oi}^t\right) + C_{swoi}^{\ t}\left(S_{w_i} - S_{wi}^t\right) \quad i = 1,\dots,N$$

که با حل صریح آن برای اشباع‌شدگی آب داریم:

$$S_{w_i} = S_{wi}^{\ t} + \frac{1}{C_{swoi}^{\ t}}\left[T_{xo_{i+1/2}}^{\ t}\left(P_{o_{i+1}} - P_{oi}\right) + T_{xo_{i-1/2}}^{\ t}\left(P_{o_{i-1}} - P_{oi}\right) - q'_{oi} - C_{poo_i}^{\ t}\left(P_{o_i} - P_{oi}^{\ t}\right)\right] \quad i = 1, \ldots, N$$

برای بلوک‌های که در آنها فشار معین شده است، اصلاحات زیر انجام می‌گیرد:

$$S_{w_i} = S_{wi}^{\ t} + \frac{1}{C_{swoi}^{\ t}}\left[T_{xo_{i+1/2}}^{\ t}\left(P_{o_{i+1}} - P_{oi}\right) + T_{xo_{i-1/2}}^{\ t}\left(P_{o_{i-1}} - P_{oi}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{WC_i}{A\Delta x_i}\lambda_{oi}\left(P_{o_i} - P_{bh_i}\right) - C_{poo_i}^{\ t}\left(P_{o_i} - P_{oi}^{\ t}\right)\right] \qquad i = 1, \ldots, N$$

با به دست آمدن P_{o_i} و S_{w_i} در هر گام، در صورت لزوم می‌توان دبی‌های چاهها و فشار ته چاه را از معادله تزریق به دست آورد:

$$q'_{w_i} = \frac{WC_i}{A\Delta x_i}\left(\frac{B_{o_i}}{B_{w_i}}\lambda_{oi} + \lambda_{wi}\right)\left(P_{o_i} - P_{bh_i}\right)$$

و یا معادله تولید:

$$q'_{oi} = \frac{WC_i}{A\Delta x_i}\lambda_{oi}\left(P_{o_i} - P_{bh_i}\right)$$

و

$$q'_{wi} = \frac{WC_i}{A\Delta x_i}\lambda_{wi}\left(P_{w_i} - P_{bh_i}\right)$$

کسر جزئی آب در چاه تولید:

$$f_{ws_i} = \frac{q'_{w_i}}{q'_{w_i} + q'_{oi}}$$

در پایان هر گام، قبل از به روز رسانی ضرایب، کلیه محدودیت‌های چاهها باید بررسی شود و در صورت لزوم باید تغییرات لازم در شرایط چاهها داده شود.

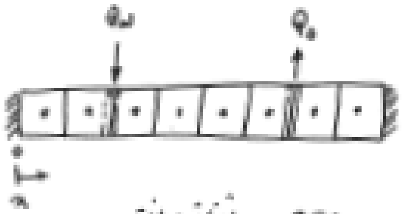
توانایی روش IMPES

تقریب‌های فرض شده در روش IMPES (محاسبه ضرایب در گام زمانی قبل، وقتی که هدف، حل فشارها و اشباع‌شدگی‌ها در زمان جدید است) بر روی حل محدودیت‌هایی می‌گذارد که گاهی اوقات بسیار شدید می‌شود. آشکارا، بزرگترین آنها روی پارامترهای وابسته به اشباع‌شدگی، نفوذپذیری نسبی و فشار موئینگی هستند. این موارد به سرعت با تغیر اشباع‌شدگی تغیر می‌کنند. بنابراین روش IMPES در مواقعی که تغیرات شدیدی اتفاق می‌افتد روش چندان مناسبی نیست.

عموماً IMPES برای شبیه‌سازی در سیستم‌هایی در مقیاس میدان و با بلوک‌هایی با اندازه‌های نسبتاً بزرگ و نرخ‌های تغییر کم استفاده می‌شود. بنابراین، این روش برای شبیه‌سازی تغیرات شدید در نزدیکی چاه‌ها، مانند پدیده‌های مخروطی‌شدن و یا دیگر سیستم‌های حاوی تغیرات شدید استفاده نمی‌شود. به هر صورت، با فراهم کردن گام زمانی کوچک، روش IMPES، حل‌های پایدار و دقیق را در بسیاری از مسائل شبیه‌سازی مخزن فراهم می‌کند.

(ضمیمه ـ سیستم آب ـ نفت)

مثال: سیستم مخزن با ویژگیهای زیر: (مطلوبست توزیع فشار و اشباع شدگی)



* $N = 8$, $\phi = 0.2$
* $S_{wi} = S_{iw} = 0.16$
* $\Delta x_i = \Delta x = \frac{100}{8} = 12.5$ ft
* ساختار چاه تزریقی در $x = 25$ ft و ساختار چاه تولیدی در $x = 75$ ft اتفاق می‌افتد.
* دبی چاه تزریقی و تولیدی برابر $q = 5$ است.
* فشار اولیه 1 atm است.
* $B_w = B_o = 1$, $k_x = 300$ mD
* از اثر مویینگی صرف نظر کنید.
* $\mu_o = \mu_w = 1$ cp
* روابط k_{rw} و k_{ro} با S_w در زیر داده شده‌اند

S_w	k_{rw}	k_{ro}
0.16	0.000	1.000
0.20	0.010	0.700
0.30	0.035	0.325
0.40	0.060	0.140
0.50	0.110	0.045
0.60	0.160	0.031
0.70	0.240	0.015
0.80	0.420	0.000

<u>Full Implicit</u>   فرمولاسیون پیوسته (هدف : فرمولاسیون گسسته - IMPES) ،

فاز نفت :
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kk_{ro}}{\mu_o B_o}\frac{\partial P_o}{\partial x}\right)-q_o' = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_o}{B_o}\right)$$

فاز آب :
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kk_{rw}}{\mu_w B_w}\frac{\partial P_w}{\partial x}\right)-q_w' = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_w}{B_w}\right)$$

$$P_{cow} = P_o - P_w = 0 \rightarrow P_o = P_w$$

$$S_w + S_o = 1$$

چون پیوسته است .

از معادله سوم استفاده می‌کنیم :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kk_{ro}}{\mu_o B_o}\cdot\frac{\partial P}{\partial x}\right)-q_o' = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_o}{B_o}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kk_{rw}}{\mu_w B_w}\cdot\frac{\partial P}{\partial x}\right)+q_w' = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_w}{B_w}\right) \\ S_w + S_o = 1 \end{cases}$$

چون تزریقی است

سمت چپ معادلات دیفرانسیل : (مشابه تک فازه) ، با اندیس t+Δt را الحاق می‌نویسیم

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kk_{ro}}{\mu_o B_o}\frac{\partial P}{\partial x}\right) = T_{xo\,i+1/2}\left(P_{i+1}-P_i\right) - T_{xo\,i-1/2}\left(P_i - P_{i-1}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kk_{rw}}{\mu_w B_w}\cdot\frac{\partial P}{\partial x}\right) = T_{xw\,i+1/2}\left(P_{i+1}-P_i\right) - T_{xw\,i+1/2}\left(P_i - P_{i-1}\right)$$

به طور کلی (برای هر فاز)

$$T_{x\,i+1/2} = \frac{2}{\Delta x_i(\Delta x_{i+1}+\Delta x_i)}\left(\frac{kk_r}{\mu B}\right)_{i+1/2} = \frac{2}{\Delta x_i(\Delta x_{i+1}+\Delta x_i)}k_{i+1/2}\lambda_{i+1/2}$$

به طوریکه : $k_{i+1/2} = \dfrac{\Delta x_{i+1}+\Delta x_i}{\dfrac{\Delta x_{i+1}}{k_{i+1}}+\dfrac{\Delta x_i}{k_i}}$ و $\lambda_{i+1/2} = \dfrac{\Delta x_{i+1}\lambda_{i+1}+\Delta x_i\lambda_i}{\Delta x_i+\Delta x_{i+1}}$

و $\lambda = \dfrac{k_r}{\mu B}$ ،

* در حالت چند فازی علاوه بر تراوایی، یک k_r هم اضافه دارد.

می‌توان ساده‌تر هم نوشت :

$$T_{x_{i+1/2}} = \frac{2}{\cancel{\Delta x_i (\Delta x_{i+1} + \Delta x_i)}} \cdot \frac{\cancel{\Delta x_{i+1} + \Delta x_i}}{\frac{\Delta x_{i+1}}{k_{i+1}} + \frac{\Delta x_i}{k_i}} \cdot \lambda_{i+1/2} \rightarrow$$

$$T_{x_{i+1/2}} = \frac{2 \lambda_{i+1/2}}{\Delta x_i \left(\frac{\Delta x_i}{k_i} + \frac{\Delta x_{i+1}}{k_{i+1}} \right)} \quad و \quad T_{x_{i-1/2}} = \frac{2 \lambda_{i-1/2}}{\Delta x_i \left(\frac{\Delta x_{i-1}}{k_{i-1}} + \frac{\Delta x_i}{k_i} \right)}$$

در این حالت خاص فواصل یکسان ($\Delta x_i = \Delta x$) و به تفکیک فاز داریم :

$$\boxed{\begin{gathered} T_{xo_{i+1/2}} = \frac{2 \lambda_{o_{i+1/2}}}{\Delta x^2 \left(1/k_i + 1/k_{i+1} \right)} \; , \; T_{xo_{i-1/2}} = \frac{2 \lambda_{o_{i-1/2}}}{\Delta x^2 \left(1/k_i + 1/k_{i-1} \right)} \\ T_{xw_{i+1/2}} = \frac{2 \lambda_{w_{i+1/2}}}{\Delta x^2 \left(1/k_i + 1/k_{i+1} \right)} \; , \; T_{xw_{i-1/2}} = \frac{2 \lambda_{w_{i-1/2}}}{\Delta x^2 \left(1/k_i + 1/k_{i-1} \right)} \\ \lambda_o \equiv \frac{k_{ro}}{\mu_o B_o} \quad , \quad \lambda_w = \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \end{gathered}}$$

محاسبه $\lambda_{o_{i+1/2}}$ و $\lambda_{w_{i+1/2}}$:

$\leftarrow$ انتخاب متوسط وزن دار :

$$\lambda_{o_{i+1/2}} = (\Delta x_i \lambda_{o_i} + \Delta x_{i+1} \lambda_{o_{i+1}}) / (\Delta x_i + \Delta x_{i+1})$$

$$= (\text{برای حالت فواصل یکسان}) = (\lambda_{o_i} + \lambda_{o_{i+1}})/2$$

$$\lambda_{w_{i+1/2}} = (\text{برای حالت فواصل یکسان}) = (\lambda_{w_i} + \lambda_{w_{i+1}})/2$$

$\leftarrow$ انتخاب بالادستی :

$$\lambda_{o_{i+1/2}} = \begin{cases} \lambda_{o_{i+1}} & \text{if } P_{i+1} \geq P_i \\ \lambda_{o_i} & \text{if } P_{i+1} < P_i \end{cases}$$

$$\lambda_{w_{i+1/2}} = \begin{cases} \lambda_{w_{i+1}} & \text{if } P_{i+1} \geq P_i \\ \lambda_{w_i} & \text{if } P_{i+1} < P_i \end{cases}$$

جملات سمت راست معادلات دیفرانسیل :

برای نفت :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_o}{B_o}\right) = \frac{\phi}{B_o}\frac{\partial S_o}{\partial t} + S_o \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{B_o}\right)$$

جمله دوم، یعنی $S_o \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{B_o}\right)$ قبلاً در حالت تک فازی ساده کرده‌ایم، پس به این شکل گسسته می‌شود :

$$S_o \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{B_o}\right) = \frac{\phi_i}{\Delta t}\left[c_r(1/B_o) + \frac{d(1/B_o)}{dP_o}\right](P_i - P_i^t)$$

در مسئله خودمان B_o = ثابت و ϕ همچنین

$$\boxed{S_o \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{B_o}\right) = \frac{\phi_i}{\Delta t}\left[c_r(1/B_o)\right](P_i - P_i^t)}$$

جمله اول، یعنی $\frac{\phi}{B_o}\frac{\partial S_o}{\partial t}$:

چون می‌خواهیم متغیرهای اصلی را فشار و اشباع شدگی آب بنویسیم :

$$\cancel{\frac{\partial S_o}{\partial t}} \quad \partial S_w = -\partial S_o$$

پس

$$\left(\frac{\phi}{B_o}\frac{\partial S_o}{\partial t}\right) \simeq -\frac{\phi_i}{B_{o_i}\Delta t}(S_{w_i} - S_{w_i}^t)$$

در مسئله خودمان ($\frac{\phi}{B_o}$ ثابت) :

$$\boxed{\left(\frac{\phi}{B_o}\frac{\partial S_o}{\partial t}\right)_i \simeq -\frac{\phi}{B_o \Delta t}(S_{w_i} - S_{w_i}^t)}$$

هر کجا t یادآوری نشود، جملات را با اندیس $t+\Delta t$ می‌گیریم.

به این ترتیب شکل کامل گسسته جملات سمت راست :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_o}{B_o}\right) = C_{poo_i}(P_i - P_i^t) + C_{swo_i}(S_{w_i} - S_{w_i}^t)$$

که در آن : $C_{poo_i} = \frac{\phi(1 - S_{w_i})}{\Delta t}(c_r/B_o)$

$$C_{swo_i} = \frac{-\phi}{B_o \Delta t}$$

به روش مشابه برای آب :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_w}{B_w}\right) = \frac{\phi}{B_w}\frac{\partial S_w}{\partial t} + S_w \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{B_w}\right)$$

جمله دوم در حالت کلی :

$$S_w \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{B_w}\right) = S_w \left\{ \frac{\partial}{\partial P_w}\left(\frac{\phi}{B_w}\right)\cdot\frac{\partial P_w}{\partial t}\right\} = \frac{\partial(\phi/B_w)}{\partial P_w}\left(\frac{\partial P_o}{\partial t} - \frac{\partial P_{cow}}{\partial t}\right)$$

و چون فشار موئینگی تابع S_w است :

$$\frac{\partial P_{cow}}{\partial t} = \frac{\partial P_{cow}}{\partial S_w}\cdot\frac{\partial S_w}{\partial t}$$

ولی روی مسأله خودمان، اولاً فشار موئینگی را صفر گرفتیم، پس $\frac{\partial P_{cow}}{\partial t} = 0$ است و ثانیاً چون ϕ و B_w را ثابت گرفتیم، پس به طور کلی، جمله $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{B_w}\right)$ می‌شود صفر.

همین عین بحث را برای نفت نیز داریم (یعنی $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{B_o}\right) S_o$ می‌شود صفر)، پس نهایتاً سمت راست جفت معادلات دیفرانسیل به شکل زیر در می‌آید:

$$\boxed{\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_o}{B_o}\right) = \frac{\phi}{B_o}\frac{\partial S_o}{\partial t} = -\frac{\phi}{B_o}\frac{\partial S_w}{\partial t} \cong C_{swoi}(S_{wi} - S_{wi}^{t}) \\
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_w}{B_w}\right) = \frac{\phi}{B_w}\frac{\partial S_w}{\partial t} \cong C_{swwi}(S_{wi} - S_{wi}^{t}) \\
&C_{swoi} = -\frac{\phi}{B_o \Delta t}, \quad C_{swwi} = \frac{\phi}{B_w \Delta t}
\end{aligned}}$$

دقت کنید در صورتی که ϕ و B ثابت نبودند و فشار موئینگی هم حضور داشت، آنگاه شکل معادلات یعنی جملات سمت راست، بسیار پیچیده می‌شد.

به طور خلاصه تا حالا به دستگاه بسته زیر رسیده‌ایم:

$$\boxed{\begin{aligned} &T_{xo_{i+1/2}}(P_{i+1}-P_i) - T_{xo_{i-1/2}}(P_i - P_{i-1}) - q'_o = C_{swoi}(S_{wi} - S_{wi}^{t}) \\ &T_{xw_{i+1/2}}(P_{i+1}-P_i) - T_{xw_{i-1/2}}(P_i - P_{i-1}) + q'_w = C_{swwi}(S_{wi} - S_{wi}^{t}) \end{aligned}}$$

به طور کلی ضرایب و پارامترها وقتی اینجا توصیف و تبیین شده‌اند. یادآوری: متغیرهای اصلی فعلاً Pها و S_wها هستند. که می‌بایست و مجدداً آن‌ها را می‌نویسیم:

$$T_{xo_{i+1/2}} = \frac{2\lambda_{o_{i+1/2}}}{\Delta x^2(1/k_i + 1/k_{i+1})} \quad , \quad T_{xo_{i-1/2}} = \frac{2\lambda_{o_{i-1/2}}}{\Delta x^2(1/k_i + 1/k_{i-1})}$$

$$T_{xw_{i+1/2}} = \frac{2\lambda_{w_{i+1/2}}}{\Delta x^2(1/k_i + 1/k_{i+1})} \quad , \quad T_{xw_{i-1/2}} = \frac{2\lambda_{w_{i-1/2}}}{\Delta x^2(1/k_i + 1/k_{i-1})}$$

$$\lambda_o = \frac{k_{ro}}{\mu_o B_o} \quad , \quad \lambda_w = \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \quad , \quad C_{swoi} = -\phi/(B_o \Delta t)$$

$$C_{swwi} = \phi/(B_w \Delta t)$$

$$\lambda_{o_{i+1/2}} \begin{cases} \lambda_{o_{i+1}} & \text{if } P_{i+1} > P_i \\ \lambda_{o_i} & \text{else} \end{cases}$$

$$\lambda_{o_{i-1/2}} \begin{cases} \lambda_{i-1} & \text{if } P_{i-1} > P_i \\ \lambda_{o_i} & \text{else} \end{cases}$$

$$\lambda_{w_{i+1/2}} = \begin{cases} \lambda_{w_{i+1}} & \text{if } P_{i+1} \geq P_i \\ \lambda_{w_i} & \text{else} \end{cases}$$

$$\lambda_{w_{i-1/2}} = \begin{cases} \lambda_{w_{i-1}} & \text{if } P_{i-1} \geq P_i \\ \lambda_{w_i} & \text{else} \end{cases}$$

اگر کسی روی مویینگی و تأثیرات آن را در معادلات سیستم معادلات را در نظر بگیرد، باید در جواب گفت که معمولاً یکی از متغیرهای اصلی را فشار فاز نفت (P_{oil}) در نظر می‌گیریم و فشار دیگر را برحسب اختلاف یا جمع آن فشار با فشار مویینگی می‌نویسیم، یعنی دو معادله بالا همیشه برحسب P_o می‌باشد (هر چه مویینگی باشد هر چه باشد).

* انواع فرمولاسیون‌ها از این جا به بعد متولد می‌شوند مثلاً IMPES از دو معادله بالا، S_w را حذف می‌کنند!

و بالاخره IMPES : چون اشباع نقطه آب (S_{wi}) در طرف راست فقط ظاهر شده است،
لذا، معادله اول را در $\frac{1}{C_{swoi}}$ و معادله دوم را در $\frac{1}{C_{swwi}}$ ضرب کرده
و از یکدیگر کم می‌کنیم:

$$\left(T_{xo_{i+1/2}} \cdot \frac{1}{C_{swoi}} - T_{xw_{i+1/2}} \cdot \frac{1}{C_{swwi}} \right)(P_{i+1} - P_i)$$

$$- \left(T_{xo_{i-1/2}} \cdot \frac{1}{C_{swoi}} - T_{xw_{i-1/2}} \cdot \frac{1}{C_{swwi}} \right)(P_i - P_{i-1}) - \frac{q'_{oi}}{C_{swoi}} + \frac{q'_{wi}}{C_{swwi}} = 0$$

طرفین ضرب در C_{swoi} و تعریف $\alpha_i = -C_{swoi}/C_{swwi}$:

$$\left(T_{xo_{i+1/2}} + \alpha T_{xw_{i+1/2}} \right)(P_{i+1} - P_i) - \left(T_{xo_{i-1/2}} + \alpha T_{xw_{i-1/2}} \right)(P_i - P_{i-1})$$

$$- q'_{oi} + \alpha q'_{wi} = 0$$

لذا، اگر معادلات فوق را به صورت 3قطری مرتب کنیم آنگاه:

قبلاً تعریف کرده‌ایم

$$a_i P_{i-1}^{t+\Delta t} + b_i P_i^{t+\Delta t} + c_i P_{i+1}^{t+\Delta t} = d_i \quad , \quad i = 1, \dots, N$$

$$a_i \triangleq T_{xo_{i-1/2}} + \alpha_i T_{xw_{i-1/2}}$$

$$b_i \triangleq -\left(T_{xo_{i+1/2}} + \alpha_i T_{xw_{i+1/2}} \right) - \left(T_{xo_{i-1/2}} + \alpha T_{xw_{i-1/2}} \right)$$

$$c_i \triangleq T_{xo_{i+1/2}} + \alpha_i T_{xw_{i+1/2}}$$

$$d_i \triangleq q'_{oi} - \alpha_i q'_{wi}$$

- بسته به نوع شرایط مرزی، ممکن است در تعریف ضرایب بالا تغییراتی حاصل شود!
علت این است که برخی شرایط مرزی در ترم q'_{oi} یا q'_{wi}، مجهول فشار $P_i^{t+\Delta t}$ را دارند
و لذا باید آن سطر را برای درآوردن شکل کامل مربوط، بازآرایی نمود.

- برای سادگی ما فعلاً، تزریق از نوع دبی ثابت (دبی کنترل‌شده در چاه) آب و
برای برداشت از نوع فشار دهانه (یا ته چاه) ثابت استفاده می‌کنیم ←

لذا برای جملهٔ q' از جملهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$q'_{oi} = \frac{WC_i}{A\Delta x_i}\,\lambda_{oi}(P_i - P_{bh_i})$$

$$WC_i = \pi h k_i / \ln(r_e/r_w)$$

در نتیجه معادلات به شکل زیر اصلاح می‌شوند: [به این ترتیب b_i (چون P_i مجهول دارد) و d_i عوض می‌شوند].

$$\boxed{\begin{aligned} b_i &= -\left\{ T_{x_{o,i+1/2}} + T_{x_{o,i-1/2}} + \alpha\left[T_{x_{w,i+1/2}} + T_{x_{w,i-1/2}} \right] \right\} - \frac{WC_i\,\lambda_{oi}}{A\Delta x_i} \\ d_i &= -\frac{WC_i}{A\Delta x_i}\,\lambda_{oi}\,P_{bh_i} - \alpha\, q'_{wi} \end{aligned}}$$

به هر حال، این ضرایب در نقطهٔ جاری محاسبه شده‌اند، در حالی که باید در نقطهٔ بعدی محاسبه شوند و در اینجا تکرار را انجام نمی‌دهیم (tearing)، چراکه این ضرایب، تابعیت از S_w دارند، لذا هر بار باید S_w را در نقطهٔ بعد حساب کرد و سپس تکرار را انجام داد.

نحوهٔ محاسبه صریح (Explicit) تعادل اشباع: از یکی از دو معادلهٔ فوق می‌توان S_w را در نقطهٔ بعد محاسبه نمود، برای مثال از معادلهٔ نفت استفاده می‌کنیم:

$$T_{xo_{i+1/2}}(P_{i+1} - P_i) - T_{xo_{i-1/2}}(P_i - P_{i-1}) - q'_o = C_{swoi}(S_{w_i} - S_{w_i}^t)$$

$$\rightarrow\quad S_{w_i}^{(n+1)} = S_{w_i}^t + \frac{1}{C_{swoi}}\left\{ T_{x_{o,i+1/2}}(P_{i+1}^{t+\Delta t} - P_i^{t+\Delta t}) - T_{x_{o,i-1/2}}(P_i^{t+\Delta t} - P_{i-1}^{t+\Delta t}) - q'_{oi} \right\}$$

(قبلاً بالانویس (n+1.) را نگذاشتیم، ناقص.)

بعد از محاسبه $S_{w_i}^{(n+1)}$ ها، باید دوباره دستگاه $A\underline{P}^{t+\Delta t} = \underline{d}$ را حل کنیم و تکرار کنیم.

o o (IMPES [illegible])

$$-(T_{xo\,3/2} + \alpha T_{xw\,3/2})P_1 + (T_{xo\,3/2} + \alpha T_{xw\,3/2})P_2 = 0$$

$$(T_{xo\,3/2} + \alpha T_{xw\,3/2})P_1 - (T_{xo\,5/2} + \alpha T_{xw\,5/2} + T_{xo\,3/2} + \alpha T_{xw\,3/2} + \cancel{\frac{wc_2\lambda_{o2}}{A\Delta x}})P_2$$
$$+ (T_{xo\,5/2} + \alpha T_{xw\,5/2})P_3 = -\alpha \frac{Q_w}{A\Delta x}$$

$$(T_{xo\,5/2} + \alpha T_{xw\,5/2})P_2 - (T_{xo\,7/2} + \alpha T_{xw\,7/2} + T_{xo\,5/2} + \alpha T_{xw\,5/2})P_3$$
$$+ (T_{xo\,7/2} + \alpha T_{xw\,7/2})P_4 = -\alpha \frac{Q_w}{A\Delta x}$$

$$(T_{xo\,7/2} + \alpha T_{xw\,7/2})P_3 - (T_{xo\,9/2} + \alpha T_{xw\,9/2} + T_{xo\,7/2} + \alpha T_{xw\,7/2})P_4$$
$$+ (T_{xo\,9/2} + \alpha T_{xw\,9/2})P_5 = 0$$

$$(T_{xo\,9/2} + \alpha T_{xw\,9/2})P_4 - (T_{xo\,11/2} + \alpha T_{xw\,11/2} + T_{xo\,9/2} + \alpha T_{xw\,9/2})P_5$$
$$+ (T_{xo\,11/2} + \alpha T_{xw\,11/2})P_6 = 0$$

$$(T_{xo\,11/2} + \alpha T_{xw\,11/2})P_5 - (T_{xo\,13/2} + \alpha T_{xw\,13/2} + T_{xo\,11/2} + \alpha T_{xw\,11/2} + \frac{wc_6}{A\Delta x}\lambda_6)P_6$$
$$+ (T_{xo\,13/2} + \alpha T_{xw\,13/2})P_7 = -\frac{wc_6\,\lambda_6\,P_{bh6}}{A\Delta x}$$

$$(T_{xo\,13/2} + \alpha T_{xw\,13/2})P_6 - (T_{xo\,15/2} + \alpha T_{xw\,15/2} + T_{xo\,13/2} + \alpha T_{xw\,13/2} + \frac{wc_7\lambda_7}{A\Delta x})P_7$$
$$+ (T_{xo\,15/2} + \alpha T_{xw\,15/2})P_8 = -\frac{wc_7\,\lambda_7}{A\Delta x}P_{bh7}$$

$$(T_{xo\,15/2} + \alpha T_{xw\,15/2})P_7 - (\underbrace{\cancel{T_{xo\,17/2}}}_{0} + \alpha \underbrace{\cancel{T_{xw\,17/2}}}_{0} + T_{xo\,15/2} + \alpha T_{xw\,15/2})P_8 = 0$$

برای مسأله خاص خودمان، کمی ساده‌سازی کنیم، معمول الگین از عملکرد الگوریتم انجام می‌دهیم:

* عبارات عبورپذیری با فرض شبکه‌بندی یکسان و Δx یکسان و k_x یکسان

$$T_{xo_{i+1/2}} = \frac{2\lambda_{o\,i+1/2}}{\Delta x^2 \left(1/k_i + 1/k_{i+1} \right)} = \frac{2\lambda_{o\,i+1/2}}{\Delta x^2 \frac{2}{k_i}} = \frac{k_x}{\Delta x^2} \frac{\lambda_{o_i} + \lambda_{o_{i+1}}}{2}$$

$$T_{xo_{i-1/2}} = \text{بطور مشابه} = \frac{k_x}{\Delta x^2} \cdot \frac{\lambda_{o_i} + \lambda_{o_{i-1}}}{2}$$

$$T_{xw\,i+1/2} = \frac{k_x}{\Delta x^2} \cdot \frac{\lambda_{w\,i} + \lambda_{w\,i+1}}{2}$$

$$T_{xw\,i-1/2} = \frac{k_x}{\Delta x^2} \cdot \frac{\lambda_{w\,i} + \lambda_{w\,i-1}}{2}$$

$$\alpha_i = -\frac{C_{swo\,i}}{C_{sww\,i}} = -\frac{\frac{-\phi}{B_o \Delta t}}{\frac{\phi}{B_w \Delta t}} = \frac{B_w \Delta t}{B_o \Delta t} = \left((B_w = B_o) \right) = 1$$

چون

* معادلات ما:

$$\boxed{a_i P_{i-1}^{t+\Delta t} + b_i P_i^{t+\Delta t} + c_i P_{i+1}^{t+\Delta t} = d_i} \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

$$a_i \triangleq T_{xo\,i-1/2} + \alpha_i T_{xw\,i-1/2} = \frac{k_x}{\Delta x^2} \frac{\lambda_{oi} + \lambda_{o\,i-1}}{2} + \frac{k_x}{\Delta x^2} \frac{\lambda_{wi} + \lambda_{w\,i-1}}{2}$$

$$= \frac{k}{2\Delta x^2} \left(\lambda_{oi} + \lambda_{o\,i-1} + \lambda_{wi} + \lambda_{w\,i-1} \right)$$

$$b_i \triangleq -\left(T_{xo\,i+1/2} + \alpha_i T_{xw\,i+1/2} \right) - \left(T_{xo\,i-1/2} + \alpha_i T_{xw\,i-1/2} \right)$$

$$= -\left\{ \lambda_{oi} + \lambda_{o\,i+1} + \lambda_{wi} + \lambda_{w\,i+1} + \lambda_{oi} + \lambda_{o\,i-1} + \lambda_{wi} + \lambda_{w\,i-1} \right\} \frac{k}{2\Delta x^2}$$

$$= -\frac{k}{2\Delta x^2} \left\{ 2\lambda_{oi} + 2\lambda_{wi} + \lambda_{o\,i-1} + \lambda_{w\,i-1} + \lambda_{o\,i+1} + \lambda_{w\,i+1} \right\}$$

$$c_i \triangleq T_{xo\,i+1/2} + \alpha_i T_{xw\,i+1/2} = \frac{k}{2\Delta x^2} \left\{ \lambda_{oi} + \lambda_{o\,i+1} + \lambda_{wi} + \lambda_{w\,i+1} \right\}$$

$$d_i \triangleq q'_{oi} - \cancel{\alpha_i} q'_{wi} = q'_{oi} - q'_{wi}$$

برای چاه که فوران تزریق از نوع دبی ثابت و برای برداشت از نوع فشار ته چاه (یا ته چاه) ثابت را استفاده کرده‌ایم:

برداشت $$q'_{oi} = \frac{WC_i}{A\Delta x_i}\lambda_{oi}(P_i - P_{bhi}) \quad , \quad WC_i = \pi h K_i / \ln(r_e/r_w)$$

پس b_i و d_i (چون مجهول P_i و همچنین با فرض ۱ درجه) عوض شده و به صورت زیر می‌نویسیم:

$$a_i = \frac{k}{2\Delta x^2}(\lambda_{o_i} + \lambda_{o_{i-1}} + \lambda_{w_i} + \lambda_{w_{i-1}})$$

$$\bar{b}_i = -\frac{k}{2\Delta x^2}\{2\lambda_{o_i} + 2\lambda_{w_i} + \lambda_{o_{i-1}} + \lambda_{w_{i-1}} + \lambda_{o_{i+1}} + \lambda_{w_{i+1}}\} - \frac{WC_i\,\lambda_{oi}}{A\Delta x}$$

$$c_i = \frac{k}{2\Delta x^2}\{\lambda_{oi} + \lambda_{o_{i+1}} + \lambda_{w_i} + \lambda_{w_{i+1}}\}$$

$$\bar{d}_i = -\frac{WC_i}{A\Delta x}\lambda_{oi}P_{bh_i} - q'_{w_i}$$

پس با همین ترتیب به ازای باز شده معادلات به شکل زیر می‌شود:

گره اول $$b_1P_1 + c_1P_2 = 0$$

گره دوم $$a_2P_1 + \bar{b}_2P_2 + c_2P_3 = -q'_w = -\frac{Q_w}{A\Delta x}$$

گره سوم $$a_3P_2 + b_3P_3 + c_3P_4 = -\frac{Q_w}{A\Delta x}$$

گره چهارم $$a_4P_3 + b_4P_4 + c_4P_5 = 0$$

گره پنجم $$a_5P_4 + b_5P_5 + c_6P_6 = 0$$

گره ششم $$a_6P_5 + \bar{b}_6P_6 + c_6P_7 = -\frac{WC_6}{A\Delta x}\lambda_6 P_{bh6}$$

گره هفتم $$a_7P_6 + \bar{b}_7P_7 + c_7P_8 = -\frac{WC_7}{A\Delta x}\lambda_7 P_{bh7}$$

گره هشتم $$b_8P_7 + c_8P_8 = 0$$

فقط باید مواظب بود: مخصوصاً در گره اول و آخر که نباید شرط مرزی را فراموش کرد. فرض کنید در اینجا $B_o = B_w = 1$ و $\mu_o = \mu_w = 1$ است.

از طرفی λ_o و λ_w فقط تابع S_w هستند.

$$\lambda_{o_i} = k_{ro_i} \quad , \quad \lambda_{w_i} = k_{rw_i}$$

به توان رسوند که به‌طور دقیق باشد، چرا که با فرضیاتی که کردیم (عدم تابعیت ϕ و B_o و B_w با فشار)
با هم فرق زیادی ندارد، چون و حتی اساساً هم داشته باشد، به همین خاطر ابتدا حل نیمه پیوسته را از توان می‌نویسیم:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{4k_{ro}}{\mu_o B_o}\right)\frac{\partial P}{\partial x} - q_o' = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_o}{B_o}\right) \rightarrow$$ گسسته‌سازی با نقطه در جهت x $\rightarrow$

$$T_{x_{o\,i+1/2}}(P_{i+1} - P_i) - T_{x_{o\,i-1/2}}(P_i - P_{i-1}) - q'_{o,i} = \frac{\phi}{B_o}\frac{\partial S_{o,i}}{\partial t}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{dS_{o,i}}{dt} = \frac{B_o}{\phi}\left[T_{x_{o,i-1/2}} P_{i-1} - (T_{x_{o\,i+1/2}} + T_{x_{o\,i-1/2}})P_i + T_{x_{o\,i+1/2}} - q'_{o,i} + q'_{w,i}\right]}$$

و چون $\partial S_w = -\partial S_o$ است، پس

$$\boxed{\frac{dS_{w,i}}{dt} = \frac{-B_o}{\phi}\left[T_{x_{o,i-1/2}} P_{i-1} - (T_{x_{o\,i+1/2}} + T_{x_{o\,i-1/2}})P_i + T_{x_{o\,i+1/2}} - q'_{o,i} + q'_{w,i}\right]}$$

همانطور که می‌بینید، هیچ تغییری در P_i ها نداریم و لذا به شکل بسیار بهتری حل‌شدنی است.

خلاصه اینکه، برای این مثال، نمی‌توان با فرضیات گفته شده، روش IMPES کاربردی را حل کرد و
در ادامه همین مثال را با فرض تغییر داشتن B_o و B_w (و به شکل ساده‌تر $C_{f,o}$ و $C_{f,w}$)
حل می‌کنیم:

$$C_{f,o} = C_{f,w} = C_f = B_o\frac{d(1/B_o)}{dP} = B_w\frac{d(1/B_w)}{dP}$$

در ادامه حل نیمه پیوسته را در پی آوردیم تا بتوان یک مطالعه تطبیقی (تا حدی یک محک benchmark)
اساسی انجام داد:

شبیه سازی آب - نفت ، دیفرانسیل پیوسته :

برداشت

$$\text{نفت}: \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k k_{ro}}{\mu_o B_o} \cdot \frac{\partial P_o}{\partial x}\right) - q'_o = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_o}{B_o}\right)$$

$$\text{آب}: \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k k_{rw}}{\mu_w B_w} \cdot \frac{\partial P_w}{\partial x}\right) + q'_w = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_w}{B_w}\right)$$

تزریق

$$P_{cow} = P_o - P_w$$

$$S_o + S_w = 1$$

فرض ناچیز بودن فشار مویینگی :

$$P_o = P_w = P$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{k k_{ro}}{\mu_o B_o} \dfrac{\partial P}{\partial x}\right) \underset{}{\overset{+q'_w}{-q'_o}} = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\phi S_o}{B_o}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{k k_{rw}}{\mu_w B_w} \cdot \dfrac{\partial P}{\partial x}\right) \underset{-q'_o}{+q'_w} = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\phi S_w}{B_w}\right) \\ S_o + S_w = 1 \end{cases}$$

سمت راست معادلات دیفرانسیل را دقت کنید، در حالت تک فازی ترم S_o یا S_w را نداشتیم

همچنین سمت چپ عبارات k_{ro} و k_{rw} نیز اضافه شده اند.

جمله سمت راست فاز نفت :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_o}{B_o}\right) = \frac{\phi}{B_o}\frac{\partial S_o}{\partial t} + S_o \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{B_o}\right)$$

بایستی کمیات ذکر شده (دوتا) را به صورت S_w و P اصلی بنویسیم :

$$\partial S_o = -\partial S_w \rightarrow \quad \text{جمله اول} : \quad \frac{\phi}{B_o}\frac{\partial S_o}{\partial t} = -\frac{\phi}{B_o}\frac{\partial S_w}{\partial t}$$

جمله دوم

$$S_o \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{B_o}\right) = (1-S_w)\left\{\frac{1}{B_o}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi \frac{\partial (1/B_o)}{\partial t}\right\}$$

$$= (1-S_w)\left\{\frac{1}{B_o}\frac{d\phi}{dP}\frac{\partial P}{\partial t} + \phi \frac{d(1/B_o)}{dP}\frac{\partial P}{\partial t}\right\}$$

طبق تعریف : $c_{f,o} = c_f = B_o \dfrac{d(1/B_o)}{dP}$, $c_r \triangleq \dfrac{1}{\phi}\dfrac{d\phi}{dP} \rightarrow$

$$S_o \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{B_o}\right) = (1-S_w)\left\{\frac{1}{B_o}\phi c_r \frac{\partial P}{\partial t} + \phi \frac{c_f}{B_o}\frac{\partial P}{\partial t}\right\}$$

$$= (1-S_w)\frac{\phi}{B_o}\left[c_r + c_{f,o}\right]\frac{\partial P}{\partial t} \rightarrow \quad \text{تعریف} \quad c_{T,o} \triangleq c_r + c_{f,o}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_o}{B_o}\right) = -\frac{\phi}{B_o}\frac{\partial S_w}{\partial t} + (1-S_w)\frac{\phi}{B_o}c_{T,o}\frac{\partial P}{\partial t}}$$

جمله سمت راست فاز آب

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_w}{B_w}\right) = \frac{\phi}{B_w}\frac{\partial S_w}{\partial t} + S_w \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{B_w}\right) \rightarrow \quad \ldots \text{به روش مشابه داریم} \rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi S_w}{B_w}\right) = \frac{\phi}{B_w}\frac{\partial S_w}{\partial t} + S_w \frac{\phi}{B_w} c_{T,w}\frac{\partial P}{\partial t}}$$

جهت سمت چپ :

نفت : $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kk_{ro}}{\mu_o B_o}\frac{\partial P}{\partial x}\right)_i = T_{x_o\,i+1/2}(P_{i+1}-P_i) - T_{x_o\,i-1/2}(P_i-P_{i-1}) - q'_{o_i} + q'_{w}$
$\triangleq f_o$

آب : $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kk_{rw}}{\mu_w B_w}\frac{\partial P}{\partial x}\right)_i = T_{x_w\,i+1/2}(P_{i+1}-P_i) - T_{x_w\,i-1/2}(P_i-P_{i-1}) - q'_{o_i} + q'_{w_i}$
$\triangleq f_w$

سمت چپ گسسته :

$$-\frac{\phi}{B_o}\frac{\partial S_{w_i}}{\partial t} + (1-S_{w_i})\frac{\phi}{B_o}C_{T,o}\frac{\partial P_i}{\partial t} = f_{o,i}$$

$$\frac{\phi}{B_w}\frac{\partial S_{w_i}}{\partial t} + S_w\frac{\phi}{B_w}C_{T,w}\frac{\partial P_i}{\partial t} = f_{w,i} \quad \rightarrow \quad \text{به شکل ماتریسی}$$

$$\begin{bmatrix} (1-S_{w_i})\frac{\phi}{B_o}C_{T,o} & -\frac{\phi}{B_o} \\ S_{w_i}\frac{\phi}{B_w}C_{T,w} & \frac{\phi}{B_w} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\partial P_i}{\partial t} \\ \frac{\partial S_{w,i}}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{o,i} \\ f_{w,i} \end{bmatrix} \rightarrow$$

بعضی وقت‌ها، انتگرال‌ها را در اینجا ماتریسی نداریم. برای دستگاه دیفرانسیل را برابر با ماتریس نوشت :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial P_i}{\partial t} \\ \frac{\partial S_{w,i}}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-S_w)\frac{\phi}{B_o}C_{T,o} & -\frac{\phi}{B_o} \\ S_w\frac{\phi}{B_w}C_{T,w} & \frac{\phi}{B_w} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} f_{o,i} \\ f_{w,i} \end{bmatrix}$$

محاسبه ماتریس معکوس 2x2 :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \Big/ (ad-bc)$$

$$\begin{bmatrix} (1-S_w)\frac{\phi}{B_o}C_{T,o} & -\frac{\phi}{B_o} \\ S_w\frac{\phi}{B_w}C_{T,w} & \frac{\phi}{B_w} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} \frac{\phi}{B_w} & \frac{\phi}{B_o} \\ -S_w\frac{\phi}{B_w}C_{T,w} & (1-S_w)\frac{\phi}{B_o}C_{T,o} \end{bmatrix}}{\det}$$

$$B_w = B_o = B = B_{Sur.}\, e^{-C_f (P - P_{surf.})}$$ با فرضیات مسأله فوران :

$$C_{T,w} = C_{T,o} = C_T = C_r + C_f$$

در نتیجه :

ماتریس نهایی $= \dfrac{\begin{bmatrix} \frac{\phi}{B} & \frac{\phi}{B} \\ -S_w \frac{\phi}{B} C_T & (1-S_w) \frac{\phi}{B} C_T \end{bmatrix}}{(1-S_w) \frac{\phi}{B} C_T \frac{\phi}{B} + S_w \frac{\phi}{B} C_T \frac{\phi}{B}}$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -S_w C_T & (1-S_w) C_T \end{bmatrix}}{(1-S_w) C_T \frac{\phi}{B} + S_w C_T \frac{\phi}{B}}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial P_i}{\partial t} \\ \dfrac{\partial S_{w,i}}{\partial t} \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -S_w C_T & (1-S_w) C_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{o,i} \\ f_{w,i} \end{bmatrix}}{S_w C_T \frac{\phi}{B} + (1-S_w) C_T \frac{\phi}{B}} \rightarrow$$

عبارت زیر $\quad S_w C_T \dfrac{\phi}{B} + (1-S_w) C_T \dfrac{\phi}{B} = C_T \dfrac{\phi}{B}$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial P_i}{\partial t} \\ \dfrac{\partial S_{w,i}}{\partial t} \end{bmatrix} = \frac{B}{\phi C_T} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -S_w C_T & (1-S_w) C_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{o,i} \\ f_{w,i} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} = \frac{B}{\phi C_T} \left(f_{o,i} + f_{w,i} \right)$$

$$\frac{\partial S_{w,i}}{\partial t} = \frac{B}{\phi C_T} \left(-S_w C_T f_{o,i} + (1-S_w) C_T f_{w,i} \right)$$

و در نتیجه :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial P_i}{\partial t} &= \frac{e^{-c_f(P_i - P_{surf.})}}{\phi\, c_T}\left(f_{o,i} + f_{w,i}\right) \\ \frac{\partial S_{w,i}}{\partial t} &= \frac{e^{-c_f(P_i - P_{surf.})}}{\phi}\left(-S_w f_{o,i} + (1 - S_w) f_{w,i}\right) \end{aligned}}$$

حال در محیط Simulink این عبارت را می‌نویسیم .

گره ۱ :

$$f_{o,1} = T_{x_{o,3/2}} \left(P_2 - P_1\right) - \overbrace{T_{x_{o\,1/2}}}^{0} \left(P_1 - P_0\right) - 0 + 0$$

$$T_{x_{o,3/2}} = \frac{2\lambda_{o\,1+1/2}}{\Delta x^2 \left(1/k_1 + 1/k_2\right)} = \frac{2\lambda_{o\,3/2}}{\Delta x^2 \frac{2}{k_1}}$$

فرض Δx ثابت و $k_i = k$ و تراوایی را به صورت میانگین در نظر می‌گیریم . $\longrightarrow$

$$= \frac{k}{\Delta x^2} \; \frac{\lambda_{o_1} + \lambda_{o_2}}{2}$$

$$\lambda_o = \frac{k_{ro}}{\mu_o B_o} = \frac{k_{ro}(S_w)}{\mu_o \, e^{-c_f(P - P_{surf.})}} \rightarrow$$

$$\lambda_{o,1} = \frac{k_{ro}(S_{w,1})}{e^{-c_f(P_1 - 1)}}$$

فرض $\mu_w = \mu_o = 1$ و $P_{surf.} = 1$

$$= k_{r_o}(S_{w,1})\, e^{c_f(P_1 - 1)}$$

$$\rightarrow \quad T_{x_{o,3/2}} = \frac{k}{\Delta x^2} \cdot \frac{k_{r_o}(S_{w,1})\, e^{c_f(P_1 - 1)} + k_{r_o}(S_{w,2})\, e^{c_f(P_2 - 1)}}{2}$$

به طریق مشابه

$$T_{x_{w,3/2}} = \frac{k}{\Delta x^2} \cdot \frac{k_{rw}(S_{w,1})\, e^{c_f(P_1 - 1)} + k_{rw}(S_{w,1})\, e^{c_f(P_2 - 1)}}{2}$$

بدین ترتیب :

$$
\begin{cases}
\dfrac{dP_1}{dt} = \dfrac{e^{-c_f(P_1-1)}}{\phi\, c_T}\left(f_{o,1} + f_{w,1}\right) \\[2ex]
\dfrac{dS_{w,1}}{dt} = \dfrac{e^{-c_f(P_1-1)}}{\phi}\left(-S_{w,1} f_{o,1} + (1-S_{w,1}) f_{w,1}\right) \\[2ex]
\quad\vdots \\[2ex]
\dfrac{dP_8}{dt} = \dfrac{e^{-c_f(P_8-1)}}{\phi\, c_T}\left(f_{o,8} + f_{w,8}\right) \\[2ex]
\dfrac{dS_{w,8}}{dt} = \dfrac{e^{-c_f(P_8-1)}}{\phi}\left(-S_{w,8} f_{o,8} + (1-S_{w,8}) f_{w,8}\right)
\end{cases}
$$

لذا ، 16 تا حالت داریم . برنامه در فولدر ضمیمه جهت تست آمده است .

نحوه محاسبه ای ها در ضمیمه نیز آمده است .

اثر تولید مایع :

$$q_L = wc(\lambda_{o_i} + \lambda_{w_i})(P_w - P_{atm})$$

$$wc = \ln\frac{3\pi}{4}, \quad P_w = \overline{P}_i$$

$$q'_{o_i} = \frac{1}{2}\frac{\lambda_{o_i}}{\lambda_{o_i}+\lambda_{w_i}}\frac{Q_L}{A\Delta x}$$

$$q'_{w_i} = \frac{1}{2}\frac{\lambda_{w_i}}{\lambda_{o_i}+\lambda_{w_i}}\frac{Q_L}{A\Delta x}$$

اثر تزریق آب ثابت :

$$q'_w = 0.03$$

$$q'_w = \frac{Q_w}{A\Delta x}$$

$$\frac{Q_w}{A\Delta x} = \frac{wc}{A\Delta x}(P_w - P_2)\cdot\frac{\lambda_{w,2}}{\lambda_{w,2}+\lambda_{w,3}} + \frac{wc}{A\Delta x}(P_w - P_3)\cdot\frac{\lambda_{w,3}}{\lambda_{w,2}+\lambda_{w,3}}$$

$$\rightarrow \quad q'_w = w'_{idx}\left[(P_w - P_2)\bar{\lambda}_{w,2} + (P_w - P_3)\bar{\lambda}_{w,3}\right]$$

$$\rightarrow \quad \frac{q'_w}{w'_{idx}} = (\bar{\lambda}_{w,2} + \bar{\lambda}_{w,3})P_w - (P_2\bar{\lambda}_{w,2} + P_3\bar{\lambda}_{w_3})$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\frac{\left\{\frac{q'_w}{w'_{idx}} + (P_2\bar{\lambda}_{w,2} + P_3\bar{\lambda}_{w,3})\right\}}{\bar{\lambda}_{w,2} + \bar{\lambda}_{w,3}} = P_w}$$

$$q'_{w,2} = w'_{idx}(P_w - P_2)\cdot\bar{\lambda}_{w,2}$$

$$q'_{w,3} = w'_{idx}(P_w - P_3)\cdot\bar{\lambda}_{w,3}$$