بسمه

⇦ خلاصه معادلات حرکت با هندسه یک‌بعدی و فیزیک تک‌فاز

⟵ فرمولاسیون پیوسته:

با استفاده از قانون عام پیوستگی (بیلان جرم در حجم) و قانون خاص دارسی به معادله حاکم (با مشتقات پیوسته) و مستقل از دستگاه مختصات می‌رسیم (استفاده از اپراتور ∇)

$$\nabla \cdot \frac{\rho k}{\mu}(\nabla P - \gamma \nabla z) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho \phi) \pm \tilde{q}$$

به طوری که $\tilde{q}$ ترم چشمه/چاه و به صورت حجمی می‌باشد و نباید با چاه تولید/تزریق اشتباه شود. در صورتی که بخواهیم چاه تزریق یا تولید را محسوب کنیم، معادله دارای تکینگی نقطه‌ای یا خطی (با استفاده از تابع دیراک) خواهد شد.

برای حالت افقی، یک‌بعدی و بدون چشمه یا چاه (در واحد حجم)، به شکل زیر می‌رسیم:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho \phi)} \quad \text{یا} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial P}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{B}\right)$$

همانطور که معلوم است یک معادله داریم ولی دو کمیت دیفرانسیلی (P و $\rho\phi$)!

گلوگاه کار در تعریف دانسیته (ρ) و ϕ (تخلخل) و دقیقاً رابطه آنها با فشار (P) می‌باشد. این تعریف ریاضی باید سازگار و همتراز با کاربردهای عملی یعنی فیزیک مسئله باشد.

— حالت فیزیکی جریان سیال تراکم‌ناپذیر و تخلخل ثابت (معین): معادل ریاضی‌اش می‌شود ثابت $= \rho$ و ثابت $= \phi$. پس معادله بالا به شکل زیر می‌شود:

$$\rho \text{ یا } \phi \text{ یا } \rho\phi = \text{ثابت} \rightarrow \partial/\partial t\,(\rho\phi) = 0 \rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{\rho k}{\mu}\frac{dP}{dx}\right) = 0} \quad (1) \text{ جریان تراکم‌ناپذیر}$$

▽ بدین ترتیب نمی‌توان شکل فیزیکی این پدیده را شبیه‌سازی کرد و به تسافیزیکی با پدیده موج متحرک فشاری روبرو خواهیم شد.

$\lambda \triangleq \frac{k}{\mu B}$ ، $\frac{\rho k}{\mu}$: به طور عام λ موسوم به تحرک (mobility) سیال است و با تحرک نسبی سیال یا فاز تعامد/اشتباه نشود.

۳- حالات فیزیکی جریان تراکم پذیر : (تحت کنترل دیفرانسیلی اساسی ρ ، Φ یا $\Phi\rho$)

معادل ریاضی آن با رویکرد تاریخی (دیدگاه مهندسی مکانیک) و فاکتور فشردگی سیال در ارتباط با
و نه مهندسی شیمی
دانسیته (ρ) به شکل زیر شروع می‌شود:

$$c_f \triangleq -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial P}\Big|_T \quad \text{یا} \quad -\frac{\partial \ln V}{\partial P} \longrightarrow \text{تبدیل آن به } \rho \rightarrow$$

$$c_f \triangleq \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial P}\Big|_T$$

* علت درج $\frac{1}{V}$ یا $\frac{1}{\rho}$ به سبب رویکرد تاریخی و مکانیک جامدات برمی‌گردد.

به طور خلاصه، برگرفته از تعاریف انبساط طولی (سطحی و حجمی) جامدات می‌باشد.

از آنجایی که زبان مادری مهندسین، «» ترتیب بعد از تعریف «» است، لذا، فرض می‌شود که این c_f مقدار ثابتی است، در دست‌شان به ضرایب انبساط حرارتی. بدین ترتیب می‌توان از رابطه بالا انتگرال گرفت:

$$\rho = \rho_0 \exp[c_f (P-P_0)]$$

زیرنویس ۰، همان شرط مرزی برای مشخص‌سازی ثوابت انتگرال می‌باشد! یعنی ρ_0، مقدار دانسیته سیال در یک فشار مرجع مثل P_0 می‌باشد.

* معادل دانشگاهی - آزمایشگاهی «دانسیته» یا ρ، فاکتور حجمی یا B می‌باشد. این فاکتور حجمی نزد [illegible] بسیار معروف است و برای همه نوع سیال اعم از گاز و مایع کاربرد دارد. به طور خلاصه، فاکتور حجمی، به صورت عکس دانسیته تعریف می‌شود. بدین ترتیب:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{B_0}{B} = \exp[c_f (P-P_0)]$$

گرچه از اینجا به بعد می‌توان تابعیت ρ یا B با فشار را جایگذاری کرد و به معادله دیفرانسیل پاره‌ای جریان پرداخت ولی از آن جایی که به یک شکل قیاسی و مشابه به سایر پدیده‌ها (نظیر پدیده نفوذ) منجر نمی‌شود، لذا، باز هم ترتیب به کار می‌بریم. با این ترتیب به دو حالت مجزا برای جریان تراکم پذیر می‌رسیم:

جریان کمی تراکم پذیر (مخصوص مایعات) و جریان خیلی تراکم پذیر! (مخصوص گازها)

← جریان سیال کمی تراکم‌پذیر (نوعاً درچه مایعات یا گازها تحت فشارهای کم‌فشاری)

این حالت فیزیکی، متناظر با شکل ریاضی ترتیب بالاتر می‌باشد. به عبارت دیگر تابعیت نمایی فشار را خطی‌سازی کنیم:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{B_0}{B} = \exp\{c_f (P - P_0)\}$$

$$= 1 + c_f (P - P_0) + \underbrace{\frac{1}{2!} c_f^2 (P - P_0)^2 + HOT}_{\text{تقریباً صفر}} \rightarrow$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{B_0}{B} \approx 1 + c_f (P - P_0)$$

تابعیت ϕ با P: برای سنگ مخزن نیز می‌توان حالت مشابهی را فرض کرد:

$$c_R \triangleq -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P}\Big|_T \rightarrow \text{رابطه نمایی} \rightarrow \text{خطی‌سازی} \rightarrow \frac{\phi}{\phi_0} \cong 1 + c_R (P - P_0)$$

جایگذاری ρ و ϕ تابع فشار (P) در معادله جریان: (از ترم درجات فشار صرف‌نظر شده)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial P}{\partial x}\right) = \left(\phi \frac{c_f}{B_0} + \phi_0 \frac{c_R}{B}\right) \frac{\partial P}{\partial t}$$

اگر باز هم تقریب را فراتر ببریم، می‌توان از مقدار c_R در برابر c_f صرف‌نظر کرد یا $c_R \cong 0$ و با بازکردن عبارت سمت چپ، به معادله زیر رسید:

جریان کمی تراکم‌پذیر (۲)

$$\boxed{\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\phi \mu c_f}{k} \frac{\partial P}{\partial t}}$$

این معادله موسوم به معادله نفوذ می‌باشد و برای آن حل تحلیلی موجود است.

← جریان سیال خیلی تراکم پذیر (تقریباً ویژه سیالات گازی)

برای این نوع سیالات، نمی‌توان فرض c ثابت را در نظر گرفت. لذا، رویکرد مکانیکی به فیزیک گازها یا رویکرد مهندسی شیمی (یعنی استفاده از «معادله حالت») تحویل می‌شود.

معادله حالت یک گاز، عملاً رابطه چگالی (دانسیته) با دما و فشار می‌باشد:

$$\rho = \frac{P M_w}{Z R T}$$

به طوری که M_w، جرم مولکولی (مخلوط) گازی و Z، فاکتور فشردگی غیر ایده‌آلی می‌باشد.
(برای گازهای ایده‌آل یا کامل، Z معادل واحد می‌باشد)

با جایگذاری این رابطه و فرض $c_R = 0$، به معادله زیر می‌رسیم: (همیشه افقی است یا از تأثیر جاذبه برای گاز صرف نظر کنیم)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} P^2 = \dfrac{\phi \mu c}{k} \dfrac{\partial}{\partial t} P^2 \\ c = \dfrac{1}{P} - \dfrac{1}{Z}\dfrac{dZ}{dP} \end{cases}$$

(برای گاز کامل یعنی $Z=1$، رابطه c به صورت $c = \frac{1}{P}$ است.)

* دقت شود کمیت پتانسیل در اینجا مربع فشار، یعنی P^2 است.

* برای تشابه‌یابی این معادله با سایر پدیده‌ها، الحسینی (1966)، پیشنهاد کرد از یک کمیت گازی به نام «شبه فشار» (Pseudo-Pressure) استفاده کنیم تا فشار به صورت مجذوری ظاهر نشود. برای این کار، کمیت شبه فشار را به شکل زیر تعریف کرده، که البته از پشتیبانی فیزیکی و ترمودینامیکی قوی برخوردار است:

$$\text{(شبه فشار)} \quad \psi \triangleq 2\int_{P_0}^{P} \frac{P}{\mu Z}\, dP$$

← (P متغیر کور انتگرال است) ← با بازآرایی و جایگذاری

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\phi \mu c}{k} \frac{\partial \psi}{\partial t}} \quad (۳)$$

جریان خیلی تراکم پذیر

دوباره به معادله پخش رسیدیم ولی کمیت انتقالی در اینجا نه فشار است، نه جرم و نه دما، بلکه شبه فشار است.

* دقت شود، شبه فشار (ψ)، با شبه پتانسیل (Φ) که در جریان چندفازی کاربرد دارد، اشتباه نشود

کمی بحث مهندسی مخزن و مسائل آمار مهندسی (قبل از ترک فرمولاسیون پیوسته)

* واحد تراوایی در سیستم SI[1]، مجذور متر یا m^2 می‌باشد. واحد عملی یا فیلد[2] بر حسب دارسی (d) بیان می‌شود. شکل متداولتر آن میلی‌دارسی (md) است. به طور خلاصه $1[darcy] \cong 10^{-12}[m^2]$. واحد تراوایی در سیستم آزمایشگاهی[3] به صورت cm^2 (یعنی سیستم cgs) بیان می‌شود

* مفهوم تراوایی یا permeability (ونه permeativity یا permitivity) در دو جا کاربرد دارد، یکی جریان هیدروکربورها در مخازن نفت و گازی و دیگری در آب‌های زیرزمینی در آبده‌ها (aquifers) یا سفره‌های زیرزمینی.
کاربردهای فیزیکی، الکترومغناطیسی و غشایی (در مهندسی شیمی) مدنظر ما نیست.

* برای سنگ مخزنی که نفت قابل استفاده داشته باشد (بدون تحریک مثل ترکدار کردن هیدرولیکی یا اسیدزنی)، تراوایی حداقل ۱۰۰ میلی دارسی لازم است. برای تراوایی‌های زیر ۱ یا ۲ میلی دارسی، یا هر نوع (س) لازم است یا فشارهای بسیار بالا (در حد تولید الماس طبیعی!)

* اگر ریه خود را پر از هوا کرده و حبس کنیم، یک فشار استاتیکی حداکثر 0.17 بار یا اتمسفر تولید کرده‌ایم! فشار باد تایر اتومبیل‌های سواری، حدوداً 28 یا 30 پام (پاوند بر اینچ مربع یا psig) یا معادلاً 2 بار یا اتمسفر می‌باشد. فشار بالای کمپرسور آپاراتی‌ها، حدوداً 6 تا 8 بار (یا اتمسفر) می‌باشد. فشار عملیاتی کمپرسورهای سرچاهی یا فشار متوسط مخازن چیزی در حدود 3000 تا 8000 پام می‌باشد. فشار هیدرواستاتیکی در کف سد امیرکبیر (کرج) که غواص باید تحمل کند، حدوداً 25 بار یا معادلاً 350 پام می‌باشد. برای تولید الماس مصنوعی فشاری حدود 10000 پام و در طبیعت (الماس طبیعی)، فشار حدوداً 100000 پام مورد نیاز است.

* رابطه دارسی (در سیستم SI) : (دیدگاه مهندسی E&P)

$$v = \frac{k}{\mu}\frac{\Delta P}{\Delta x}$$

, $v \triangleq$ superficial velocity [m/s]

$k \triangleq$ permeability (Absolute) [m^2] (خاصیت سنگ)

$\mu \triangleq$ dynamic (or absolute) viscosity [Pa.s]

$\Delta P \triangleq$ pressure diff. [Pa]

$\Delta x \triangleq$ Thickness [m]

* رابطه با ثابت کانداکتیویته هیدرولیکی (K) : (دیدگاه مهندسین هیدرولوژیست یا عمران - آب)

$$k = K\frac{\mu}{\rho g}$$

$k \triangleq$ Permeability [m^2]

$K \triangleq$ hydraulic conductivity [m/s] (خاصیت سیال هم در خود دارد)

$\mu \triangleq$ dynamic viscosity [kg/m.s] یا [Pa.s]

$\rho \triangleq$ density of fluid [kg/m^3]

$g \triangleq$ acceleration due to gravity [m/s^2]

* مفهوم عبورپذیری بین شبکه، موسوم به transmissibility نزد مهندسین نفت یا موسوم به transmissivity نزد مهندسین هیدرولوژیست.

گرچه اطلاق اخیر (رایج هیدرولوژی) از نظر معنای لغوی و مفهومی، صحیح‌تر است. این کمیت از شکل ساده و خام آن (در پزشکی و ارتعاشات و الکترومغناطیس) نوعاً به مفهوم نسبت خروجی به ورودی می‌باشد و بعضاً تعبیر به بهره (gain) هم می‌شود ولی در شبیه‌سازی مخازن، در بخش گسسته‌سازی و فرمولاسیون اپراتور گسسته‌سازی تفاضلی به نوعی میکس تراوایی (خاصیت سنگ)، کانداکتیویته هیدرولیکی (خاصیت سنگ و سیال) و ارتباطات میان بلوکی (المان‌های ساختاریافته یا غیرساختاریافته)، فرم (shape) بلوک (مثلثی، مستطیلی، ...) و سایر فواصل گسسته‌سازی (Δx، Δy و Δz) و کلاً به اندرکنش و تعامل سنگ و سیال (یعنی کمیت دیگر، اعم از مطلق و نسبی) می‌باشد. در بخش گسسته‌سازی به آن خواهیم پرداخت.

* واحدهای ویسکوزیته :

(سیستم SI) $1\ Pa.s = 1\ N.s/m^2 = 1\ kg/m.s$

(اصطلاح عملی در آزمایشگاه) 1 poise (پوآز) = 100 cP (سانتی پوآز)

$\rightarrow \boxed{1\ Pa.s = 1000\ cP}$

← برای این که یک حس فیزیکی یا ارتباط معنادار به زعم مهندسی مفهومی ارزش‌مند داشته باشیم، سرعت ظاهری یک ذره (مثلی ارزن) را در مغزه یک متری مثال خودمان را به طور کاملاً تقریبی و خام (خط‌کشی با گچ!) حساب می‌کنیم :

طول مغزه = $1\ [m]$

ویسکوزیته هوا ≃ $1.98\times10^{-2}\ [cP]$ یا $0.02\ [cP]$

تراوایی سنگ مغزه ≃ $100\ [md] = 0.1\ [d] = 0.1\times10^{-12}\ [m^2]$

اختلاف فشار دو سر مغزه ≃ $8-1=7\ [atm]$ (استفاده از کپسول آزمایشگاهی)

$\simeq 709'275\ [Pa]$ یا $0.71\ [MPa]$

سرعت (ظاهری) خطی ارزن :

$$v = \frac{k}{\mu}\cdot\frac{\Delta P}{\Delta x} = \frac{0.1\times10^{-12}}{1.983\times10^{-5}}\times\frac{709275}{1}$$

$$= 0.0036\ [m/s] \simeq \boxed{3.5\ mm/s}$$

یعنی یک ارزن برای طی کردن مسیر یک متری مغزه متخلخل ،

معادل $\frac{1000\ mm}{3.5}$ یا 279.58 ثانیه یا تقریباً 5 دقیقه، وقت صرف می‌کند!

* در میدان پارس جنوبی (به زعم ما ایرانیها) یا پارس شمالی (به زعم قطری ها) سهم اشتراکی به صورت 40 (ایران) – 60 (قطر) درصد می‌باشد. در فاصله رکود تحریمی و احیای تولید، قطری‌ها آن قدر به سرعت گاز برداشت کردند که منجر به پدیده مهاجرت گاز از طرف ایران به سمت قطر شد، با سرعت 1 فوت در روز! یعنی حدوداً 13 میلی‌متر در ساعت!!! تخمین زده می‌شود به خاطر مهاجرت گاز، آن سهام مصوب 40 - 60، تبدیل به سهام محقق 30 - 70 شده باشد! جان به کف ایران به دشمن دهیم

← اعداد مورد استفاده در مثال رسانش گرمی همزمان

* طول مغزه: معادل $1\ [m]$

* سیال مورد استفاده: آب (کمی تراکم پذیر)

* تراکم پذیری آب:

$$C_f = 10^{-5} - 10^{-6}\ atm^{-1} \Rightarrow$$

$$C_f \simeq 0.5 \times 10^{-6}\ \frac{1}{atm} \times \frac{1\ atm}{101325\ Pa} \simeq 5 \times 10^{-12}\ [Pa^{-1}]$$

* ویسکوزیته آب: $\longleftarrow 1\ cP$

$$\mu = 1\ cP \times \frac{1\ Pa.s}{1000\ cP} = 10^{-3}\ Pa.s$$

* تراوایی سنگ مغزه: $k = 100\ (md)$ (فرض)

$$= 0.1\ [d] = 10^{-13}\ [m^2]$$

* تخلخل: $\phi = 0.25$ فرض

* فشار سمت چپ: $P_L = 8\ [atm] = 810'600\ [Pa]$

* فشار سمت راست: $P_R = 1\ [atm] = 101'325\ [Pa]$

معادله حاکم انتشار فشاری: ← خروجی فرمولاسیون تئوری

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\phi \mu C_f}{k} \frac{\partial P}{\partial t} \quad \text{یا}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{k}{\phi \mu C_f} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \quad I.C., \ @\, t=0,\ P=P_R, \quad B.C.s \begin{cases} @\, x=0,\ P=P_L \\ @\, x=1,\ P=P_R \end{cases}$$

$$\alpha \triangleq \frac{k}{\phi \mu C_f} = \frac{10^{-13}}{0.25 \times 10^{-3} \times 5 \times 10^{-12}} = \frac{4}{5} \times 10^2 = 80$$

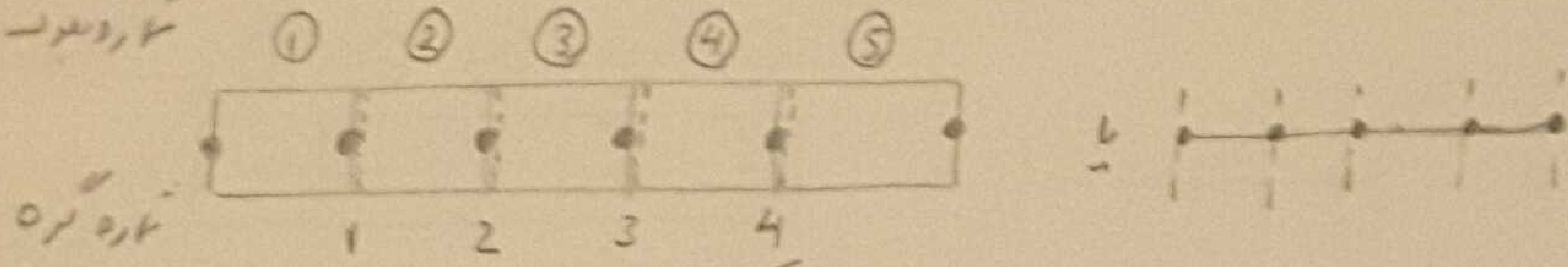
روش‌های گسسته‌سازی (گسسته‌سازی نیمه یا ODE یا Method of lines) (زمانی)

(خط‌تور: صفحات عمود بر جهت‌ها / بلوک‌ها، مرز بلوک)
(خط‌چین: صفحات یا خطوط شبکه (ریاضی))

← گسسته‌سازی مکانی: سه رویکرد برای اینکار در نرم‌افزار مشهور شد:

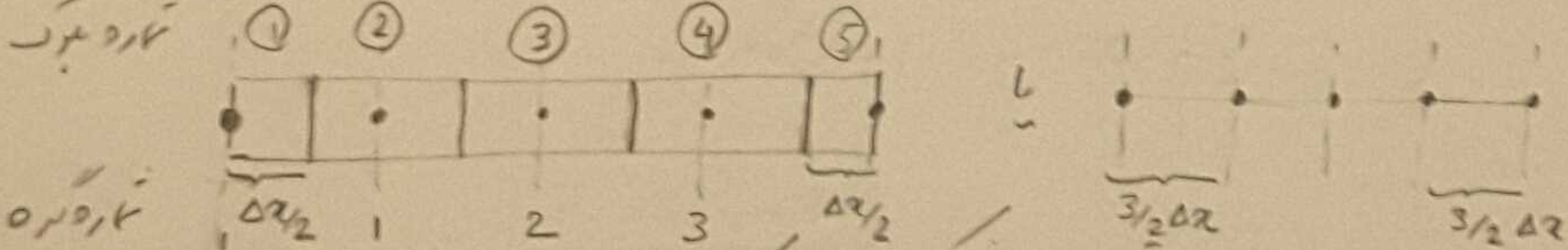
① میان‌شبکه‌ای (Mesh-centered): در این حالت، خطوط شبکه در مرز یا صفحات عمودی رسم می‌شوند و همهٔ گره‌ها (نقاط اشتقاق برای بسط تیلور) روی خطوط شبکه قرار می‌گیرند.

برای حالت ساده ۵ بلوکی به شکل زیر می‌شود.



برای فواصل مساوی، طول هر بلوک معادل $\Delta x = 1/5$ یا 0.2 متر می‌شود ولی چهار مجهول (مکانی) داریم، یعنی به دنبال تغییرات فشار در P_1، P_2، P_3 و P_4 هستیم. دو گره حدی (سر و انتهای مغزه) معلوم هستند، چون شرایط مرزی دیریکله داریم. محل گره‌های ناشناخته در یک بردار چهارتایی مثل $[0.2, 0.4, 0.6, 0.8]^T$ قرار دارند.

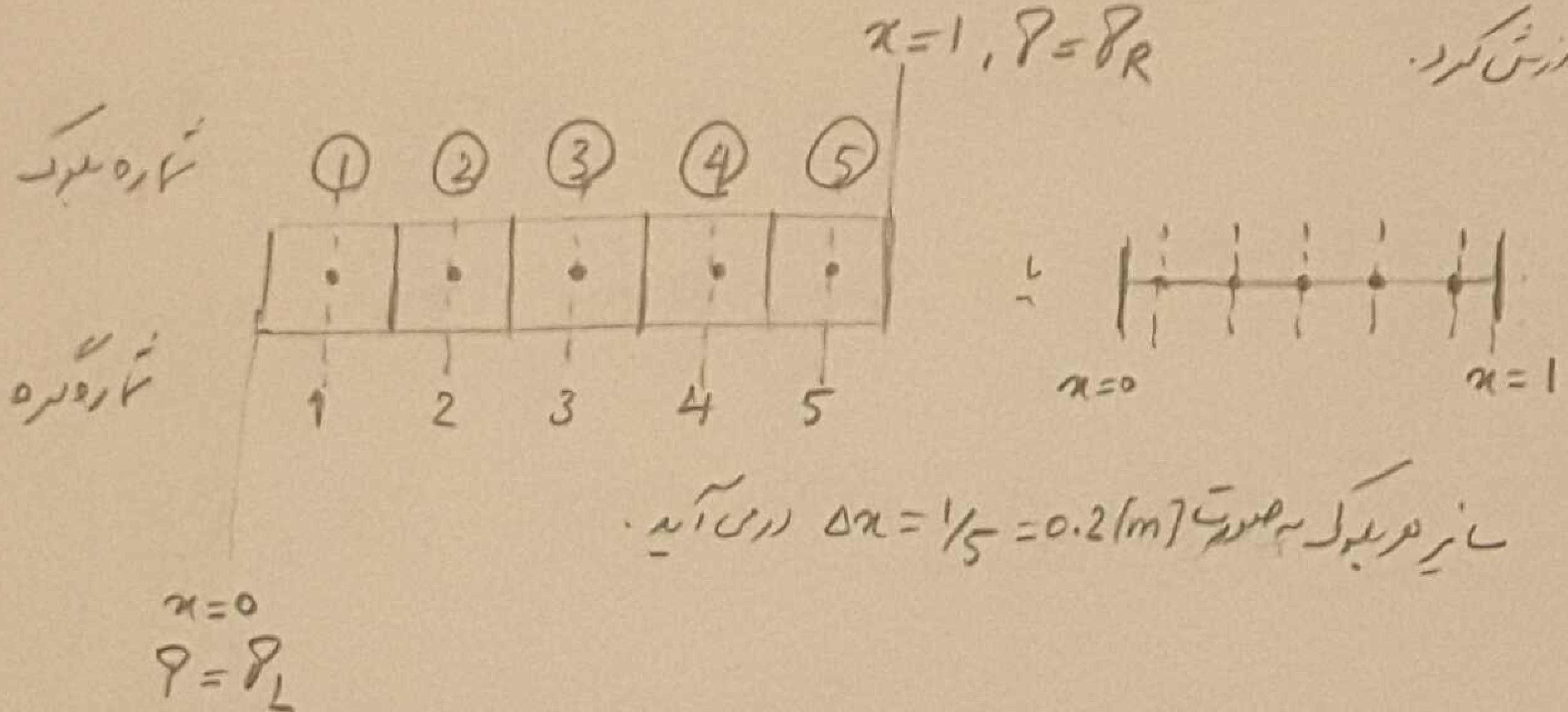
② شبکه توزیعی نقطه‌ای (point-distributed): در این حالت، اولین و آخرین نقاط شبکه را در دو سر مغزه می‌گذاریم و سپس بقیه نقاط را به صورت مساوی در این فاصله پخش می‌کنیم.



بدین ترتیب، برای شبکه پنج بلوکی، مقدار Δx برای بلوک‌های میانی معادل $\Delta x = 1/4$ یا 0.25 متر می‌شود ولی بلوک اول و آخر، نصف این مقدار می‌شود یعنی هرکدام 0.125 متر.

این رویکرد توسط ستاری و عزیز در سال 1972 پیشنهاد شد و از نظر خواص پایداری بهتر از رویکرد دیگر عمل می‌کند. نرم‌افزار Eclipse، قابلیت این را دارد که برای گوشه‌های تیز متحرک از این نوع شبکه‌بندی استفاده کند. دقت شود چون سه تا مجهول داریم (دو گره دیگر به خاطر شرایط دیریکله دارای فشار معلوم هستند)، محل مجهولات سه‌تایی در یک بردار سه‌تایی مثل $[0.25, 0.5, 0.75]^T$ هستند و با رویکرد ① در بالا فرق دارند.

۳) شبکه میان بلوکی (Block-Centered): در این حالت، فاصله مغزه را به تعداد مساوی 5 بلوک تقسیم کرده و گره‌ها را در مرکز بلوک قرار می‌دهیم. این رویکرد نزد مهندسین نفت محبوب است، چون تعداد گره‌ها با تعداد بلوک‌ها مساوی بوده و عملاً تعداد مجهولات (فشار در محل گره‌ها) را بیان می‌کنند. علی‌رغم این سهولت در فرمولاسیون پیاده‌سازی کامپیوتری، این اشکال را دارد که برای هر نوع شرط مرزی، باید گره‌های مجاور مرز را به شکلی متفاوت نسبت به گره‌های میانی دامنه حل پردازش کرد.



سایز هر بلوک به صورت $\Delta x = 1/5 = 0.2\,(m)$ در می‌آید.

در ادامه، هندسه گسسته‌سازی را همان مورد سوم، یعنی شبکه میان بلوکی در نظر می‌گیریم.

تقریب سانترال برای مشتق دوم در نظر می‌گیریم:

$$\left.\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_{i=1} \simeq \frac{P_2 - 3P_1 + 2P_L}{(3/4)(\Delta x)^2}$$ گره مجاور مرز

$$\left.\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_{i} \simeq \frac{P_{i+1} - 2P_i + P_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$ گره عمومی i

$$\left.\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_{i=5} \simeq \frac{2P_R - 3P_5 + P_4}{(3/4)(\Delta x)^2}$$

⟸ مرحله سوم پیاده سازی (روش خطوط - Method of lines)

با جایگذاری و بازآرایی اجمالی ترتیب مکانی به دستگاه معادله دیفرانسیل معمولی زیر می‌رسیم: (دقت شود چون مشتق زمانی را گسسته نکردیم، لذا، بحث صریح و ضمنی و اشباه آنها بلاموضوع است، فافهم.)

$$
\begin{cases}
\dfrac{dP_1}{dt} = -4\gamma P_1 + \frac{4}{3}\gamma P_2 + \frac{8}{3}\gamma P_L \\[2mm]
\dfrac{dP_2}{dt} = \gamma P_1 - 2\gamma P_2 + \gamma P_3 \\[2mm]
\dfrac{dP_3}{dt} = \gamma P_2 - 2\gamma P_3 + \gamma P_4 \\[2mm]
\dfrac{dP_4}{dt} = \gamma P_3 - 2\gamma P_4 + \gamma P_5 \\[2mm]
\dfrac{dP_5}{dt} = \frac{4}{3}\gamma P_4 - 4\gamma P_5 + \frac{8}{3}\gamma P_R
\end{cases}
$$

به طوری که، $\gamma \triangleq \dfrac{\alpha}{(\Delta x)^2} = \dfrac{80}{0.2} = 400$

بردار مجهولات یا کمیات دیفرانسیلی همان مقدار فشار در محل گره‌ها می‌باشد، یعنی $P_1(t)$، $P_2(t)$، $P_3(t)$، $P_4(t)$ و $P_5(t)$.

⟵ یک بحث سیستمی (فضای حالت)

دستگاه معادلات دیفرانسیل بالا را می‌توان از منظر مدل سازی یک سیستم دینامیکی بررسی کرد.
به دستگاه معادلات جبری - دیفرانسیل زیر می‌گویند فضای حالت غیرخطی:
(DAE)

$$
\begin{cases}
\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) \\
\underline{y} = \underline{g}(\underline{x}, \underline{u})
\end{cases}
$$

به طوری که بردار $\underline{x}$، موسوم به بردار حالات می‌باشد و معمولاً همان کمیات دیفرانسیلی (برحسب زمان) هستند. بردار $\underline{u}$، متغیرهای کنترل کننده یا تاثیرگذار بوده، حال آن که بردار $\underline{y}$، متغیرهای کنترل شونده یا تاثیرپذیر هستند.

* شکل خطی فضای حالت در حالت پیوسته به شکل زیر:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A_c \underline{x} + B_c \underline{u} \\ \underline{y} = C_c \underline{x} + D_c \underline{u} \end{cases}$$

در حالت گسسته به شکل زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} = A_d \underline{x}_k + B_d \underline{u}_k \\ \underline{y}_k = C_d \underline{x}_k + D_d \underline{u}_k \end{cases}$$

به بخش دینامیکی فضای حالت (مثلاً پیوسته) دقت کنید. این بخش می‌گوید تغییر (همان مشتق) یا تکامل هر حالت، از دو جا ریشه می‌گیرد. یکی مقادیر لحظه قبل) خود حالات (جمله $A\underline{x}$) و دیگری تحریک بیرونی یا ورودی‌های سیستم (جمله $B\underline{u}$). بخش استاتیکی یا جبری سیستم نیز گویای مسیر یا کانال تأثیر ورودی‌ها روی خروجی‌های سیستم است. برای سیستم‌های طبیعی (قابل تحقق) در بخش جبری ورودی‌ها ظاهر نمی‌شوند! یعنی در سیستم‌های طبیعی، به خاطر وجود اینرسی و لختی، تأثیر ورودی‌های $\underline{u}$ روی خروجی‌های $\underline{y}$ از کانال $\underline{x}$ می‌گذرد، یعنی هر اتفاقی در طبیعت در ظرف زمان صورت می‌گیرد و دفعتاً یا به طور جهشی $\underline{u}$ روی $\underline{y}$ اثر نمی‌کند. به همین خاطر می‌گویند، در تکامل، جهشی نداریم! هرگونه تغییر در $\underline{u}$، ابتدا در بخش دینامیکی یا دیفرانسیلی فضای حالت، روی حالات ($\underline{x}$) اثر گذاشته و سپس در بخش جبری، $\underline{x}$ روی $\underline{y}$ اثر می‌گذارد.

برای مثال خودمان، بردار حالات $\underline{x}$ عبارتست از $[P_1, P_2, P_3, P_4, P_5]$، بردار متغیرهای کنترل کننده می‌تواند از طریق دستکاری فشارهای سمت چپ یا راست باشد، یعنی $[P_L, P_R]^T \triangleq \underline{u}$. متغیرهای خروجی، معمولاً دست خودمان است و بستگی دارد چه کمیتی یا چه ترکیبی از حالات را اندازه بگیریم. برای این مغزه مورد نظر، فرض می‌کنیم پنج پراب (probe) اندازه‌گیری فشار (مثل dp-cell) روی نگهدارنده مغزه (core holder) نصب کرده‌ایم تا فشارها را اندازه بگیریم. به بیان دیگر بردار $\underline{y}$ همان بردار $\underline{x}$ می‌باشد.

بدین ترتیب، شکل فضای حالت مثال تحت مطالعه به شکل زیر در می‌آید:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A \underline{x} + B \underline{u} \\ \underline{y} = C \underline{x} \end{cases}$$

به طوری که

$$\underline{x} \triangleq [P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4 \quad P_5]^T$$

$$\underline{u} \triangleq [P_L \quad P_R]^T$$

$$\underline{y} \triangleq \underline{x}$$

$$A \triangleq \begin{bmatrix} -4\gamma & 4/3\gamma & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & -2\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -2\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -2\gamma & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 4/3\gamma & -4\gamma \end{bmatrix}, \quad B \triangleq \begin{bmatrix} 8/3\gamma & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 8/3\gamma \end{bmatrix}$$

$$C \triangleq I_{5\times 5}$$

- مقادیر ویژه ماتریس بهره حالات (A)، اطلاعات جالبی درباره پایداری حل، دینامیک تند یا کند، کنترل پذیری، مشاهده پذیری و ... کلاً وجوه تحلیلی به دست می‌دهند:

$$\underline{\lambda} = \begin{bmatrix} -1874.6 \\ -1811.0 \\ -1169.7 \\ -588.9 \\ -155.6 \end{bmatrix}$$

- چون تمامی مقادیر ویژه منفی هستند، لذا سیستم از پایداری مجانبی داخلی برخوردار است.

- هرچه مقدار ویژه به سمت $-\infty$ رفته باشد، نشان دهنده دینامیک سریع میرایی است و هرچه از چپ به مبدأ نزدیک شوند نشان دهنده وجود مودهای دینامیکی لاکپشتی می‌باشد (یعنی خیلی کند هستند).

- در سیستم مورد ملاحظه، نسبت قدر مطلق بزرگترین مقدار ویژه به کوچکترین آنها، چیزی حدود 12 می‌باشد. یعنی هم دینامیک سریع داریم و هم کند. لذا، موقع حل باید مواظب حل کننده‌های مثل Runge-Kutta باشیم. چون این نوع حل کننده‌ها موقعی جواب دقیق می‌دهند که همه دینامیک‌ها از یک مرتبه معادل باشند، یعنی یا همه کند باشند یا همه تند. سیستم مورد ملاحظه ما بطور ملایم stiff می‌باشد.

- استفاده از عدد حالت (Condition Number) که نسبت مقادیر تکین است، معیار بهتری می‌باشد.

← گسسته سازی کامل

در ادامه به چند روش گسسته سازی زمانی می پردازیم:

* فرمولاسیون صریح: (برای جمله عمومی یا گره نمونه i)

$$\frac{P_{i+1}^{t} - 2P_i^{t} + P_{i-1}^{t}}{(\Delta x)^2} = \frac{\phi \mu c_t}{k} \cdot \frac{\overset{\text{مجهول}}{P_i^{t+\Delta t}} - P_i^{t}}{\Delta t}$$

ترتیب پیشرو برای جمله $\partial/\partial t$

* فرمولاسیون کاملاً ضمنی (برای جمله عمومی یا گره نمونه i)

$$\frac{\overset{\text{مجهول}}{P_{i+1}^{t+\Delta t}} - 2\overset{\text{مجهول}}{P_i^{t+\Delta t}} + \overset{\text{مجهول}}{P_{i-1}^{t+\Delta t}}}{(\Delta x)^2} = \frac{\phi \mu c_t}{k} \frac{\overset{\text{مجهول}}{P_i^{t+\Delta t}} - P_i^{t}}{\Delta t}$$

ترتیب پیشرو برای جمله $\partial/\partial t$

* فرمولاسیون نیمه ضمنی (برای جمله عمومی یا گره نمونه i)

$$\frac{1}{2}\left[\frac{P_{i+1}^{t} - 2P_i^{t} + P_{i-1}^{t}}{(\Delta x)^2} + \frac{\overset{\text{مجهول}}{P_{i+1}^{t+\Delta t}} - 2\overset{\text{مجهول}}{P_i^{t+\Delta t}} + \overset{\text{مجهول}}{P_{i-1}^{t+\Delta t}}}{(\Delta x)^2}\right] = \frac{\phi \mu c_t}{k} \frac{\overset{\text{مجهول}}{P_i^{t+\Delta t}} - P_i^{t}}{\Delta t}$$

ترتیب سانترال برای جمله $\partial/\partial t$

! برای گره های مرزی نیز باید به طور مشخص جملات مربوطه را نوشت.

* سایر روش های حل ODE.

می توان از گسسته سازی نقاط مکانی، یعنی دستگاه ODE شروع کرد و از روش های حل ODE استفاده کرد.

! باید دقت کرد که برای پیاده سازی کامپیوتری (گسسته سازی کامل)، باید جملات را بازآرایی کنیم ولی شکل نهایی آن برخلاف نمایش فضای حالت گسسته به شکل زیر در می آید:

$$A \underline{P}^{t+\Delta t} = \underline{b}$$

لذا برای آن که به فرم فضای حالت تبدیل کنیم، باید عملیات بازآرایی بیشتری انجام دهیم (نظیر معکوس گرفتن ماتریس A)