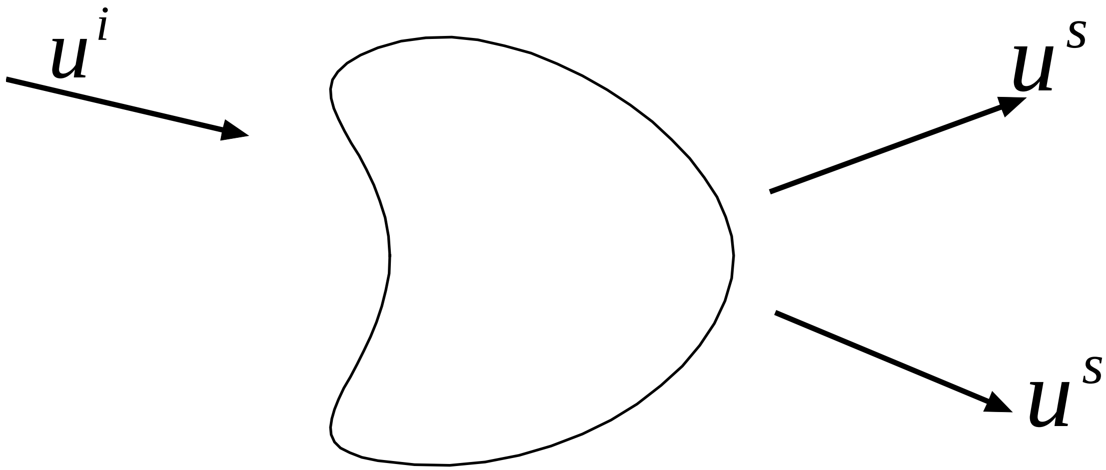
بسم الله الرحمن الرحیم

مسایل وارون پراکندگی امواج

پراکندگی امواج



$$u = u^i + u^s$$

$$U(x,t) = \mathrm{Re}\{u(x)e^{-i\omega t}\}$$

$$\Delta u(x) + \frac{\omega^{۲}}{c(x)^{۲}}(۱ + i\frac{\gamma}{\omega})u = ۰$$

$$k := \frac{\omega}{c_{۰}} > ۰\ , \qquad n(x) := \frac{c_{۰}^{۲}}{c(x)^{۲}}(۱ + i\frac{\gamma}{\omega})$$

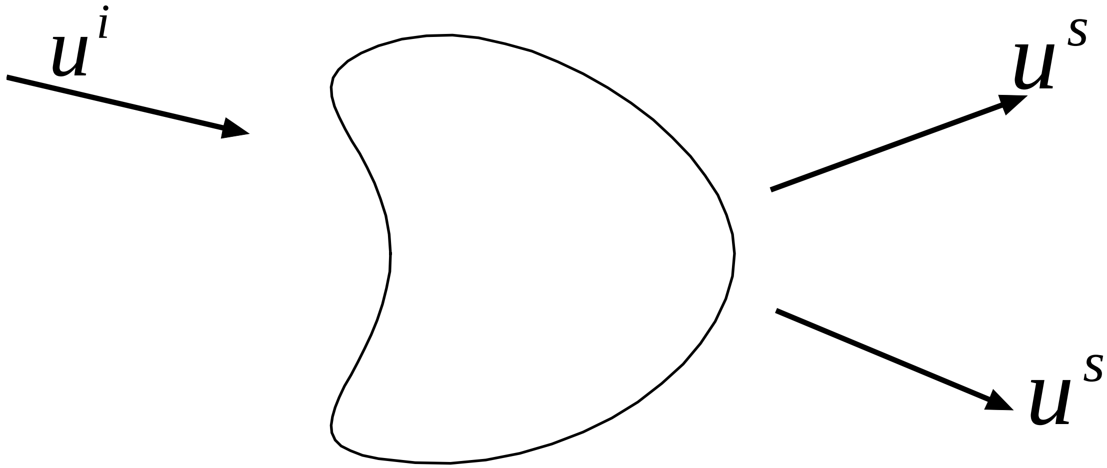
$$\Delta u + k^{۲} n u = ۰$$

$$\Delta u + k^{۲} n u = ۰$$

$$D = \{x \,|\, n(x) \neq ۱\}$$

$$\begin{aligned} \Delta u + k^{۲} u &= ۰ \quad \text{در } \mathbb{R}^{۳} \setminus \bar{D} \\ u &= ۰ \quad \text{روی } \partial D \end{aligned}$$

شرط تشعشعی زامرفلد



$$u = u^i + u^s$$

$$\lim_{r \to \infty} r^{\frac{m-۱}{۲}} \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s \right) = ۰$$

الگوی میدان دور (far field pattern)

$$u = u^i + u^s$$

$$\lim_{r\to\infty} r^{\frac{m-۱}{۲}}\left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s\right) = ۰$$

$$u^s(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|^{\frac{m-۱}{۲}}}\left\{u^\infty(\hat{x}) + o\left(\frac{۱}{|x|}\right)\right\}$$

مساله وارون

با فرض دانستن u^{∞} برای یک یا چند موج مختلف u^{i}

چگونه شکل مانع D را بازیابی کنیم؟

$$u^{\infty} \text{ و } u^{i} \quad \Longrightarrow \quad \text{شکل } D$$

یکتایی در بازیابی شکل D

اگر بر اثر برخورد موج u^i با دو مانع D_1 و D_2 الگوهای میدان دور برابر باشند، آیا

$D_1 = D_2$ ؟

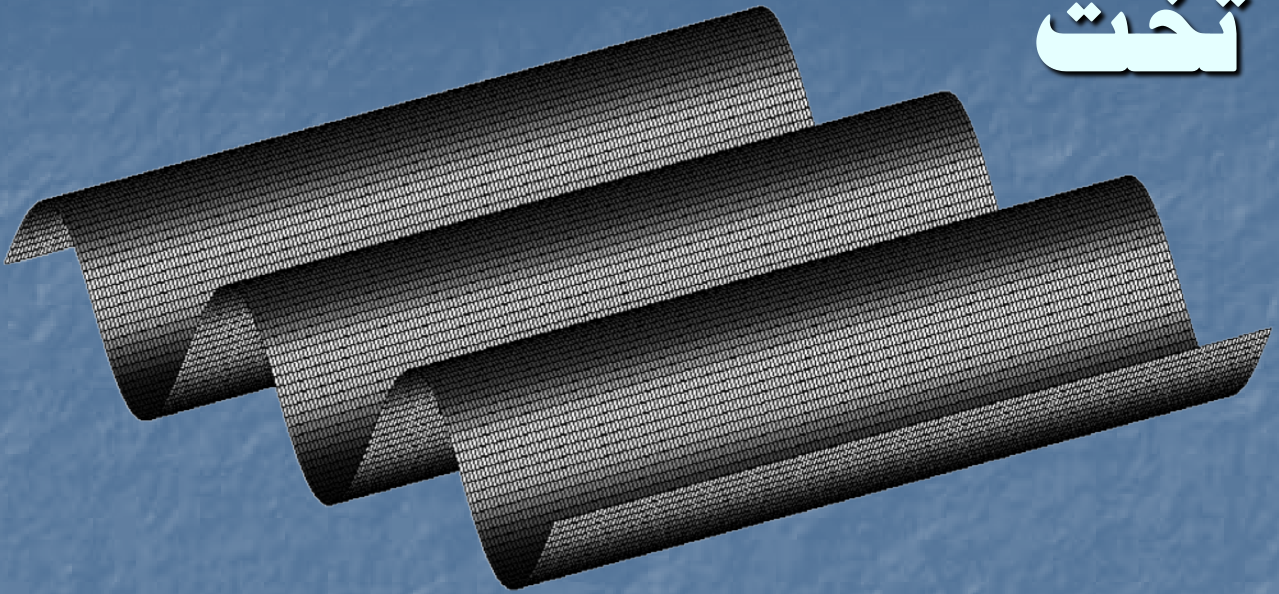
مثال نقض:

D گوی به شعاع $R = r + \frac{m\pi}{k}$ باشد

$$u^i(x) = \frac{\sin k|x|}{|x|} \qquad u^s(x) = -\frac{\sin kR}{e^{ikR}} \frac{e^{ik|x|}}{|x|}$$

$$u^\infty(\hat{x}) = -\frac{\sin kr}{e^{ikr}}$$

امواج تخت



$$u^i(x,d) := e^{ikx\cdot d}$$

$$u^s(x,d)$$

$$u^\infty(\hat{x},d)$$

مساله وارون

با اطلاعات $u^{\infty}(\hat{x}, d)$ برای امواج تخت در همه

راستاهای تابیده شده d و همه راستاهای مشاهده

شده $\hat{x}$

$$u^{\infty}(\hat{x}, d) \quad \Longrightarrow \quad D \text{ شکل}$$

یکتایی بازیابی مانع (Schiffer-1960)

اگر D_1 و D_2 دو مانع باشند که الگوهای میدان دور به دست آمده از پراکندگی تعداد نامتناهی موج تخت برابر باشد، $u_1^\infty(\hat{x},d) = u_2^\infty(\hat{x},d)$ ، آنگاه $D_1 = D_2$

یکتایی تنها با یک موج تخت

- اگر $\frac{2\pi}{k} > diamD$ ، (Colton-Sleeman-1983)
- اگر مانع یک گوی باشد(Liu-1997)
- D یک چند وجهی باشد، (Rondi-2003)

مساله باز: برای یکتایی چقدر از اطلاعات الگوی میدان دور لازم است ؟

موانع به طور موضعی پوشیده شده

- شرط مرزی مرکب:

$$u = 0 \qquad \text{روی } \Gamma_D$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + i\lambda u = 0 \qquad \text{روی } \Gamma_I$$

روشهای بازیابی مانع

- روش نیوتن
- روش منبع نقطه ای
- روش نمونه برداری خطی
- روش منابع تکین

روش نیوتن

$$F(x) = y$$

$$x_{n+۱} = x_n - (F'(x_n))^{-۱}(F(x_n) - y)$$

روش نیوتن

$$\mathcal{F} : \partial D \longmapsto u_\infty$$

$$\mathcal{F}(\partial D) = u_\infty$$

روش نیوتن

$$\partial D_r = \{x + r(x)\nu_\circ(x) \ : \ x \in \partial D_\circ\}$$

$$F : C^{۲}(\partial D_\circ) \longrightarrow L^{۲}(\Omega)$$

$$F(r) := \mathcal{F}(\partial D_r) = u^\infty$$

روش نیوتن

عملگر $F : C^{۲}(\partial D_{\circ}) \longrightarrow L^{۲}(\Omega)$ که مرز یک مانع نرم ـ صوت را به الگوی میدان دور متناظر می‌سازد، به معنای فرشه مشتق‌پذیر است و $F'(r)h$ برابر است با الگوی میدان دور تابع v_h که جواب تشعشعی معادله هلموتز در $\mathbb{R}^{۳} \setminus \bar{D}_r$ با شرط مرزی دیریکله

$$v_h = -h\frac{\partial u}{\partial \nu} \qquad \text{روی } \partial D_r$$

می‌باشد. تابع u در این رابطه میدان مجموع $u = u^i + u^s$ متناظر ناحیه D_r است.

روش نیوتن

در حالت شرط مرزی امپدانس $\frac{\partial u}{\partial \nu} + i\lambda u = ۰$ مشتق $F'(r)h$ برابر الگوی میدان v_h است که در شرط مرزی امپدانس زیر صدق می کند.

$$\frac{\partial v_h}{\partial \nu} + i\lambda v_h = \{k^۲ - \lambda^۲ + i\lambda \mathbf{H}\}hu + \mathbf{Div}(h\,\mathbf{Grad}\,u)$$

u جواب متناظر ناحیه D_r، $\mathbf{H}$ انحنای میانگین ∂D_r و $\mathbf{Div}$ و $\mathbf{Grad}$ به ترتیب دیورژانس و گرادیان سطح می‌باشند.

روش نیوتن

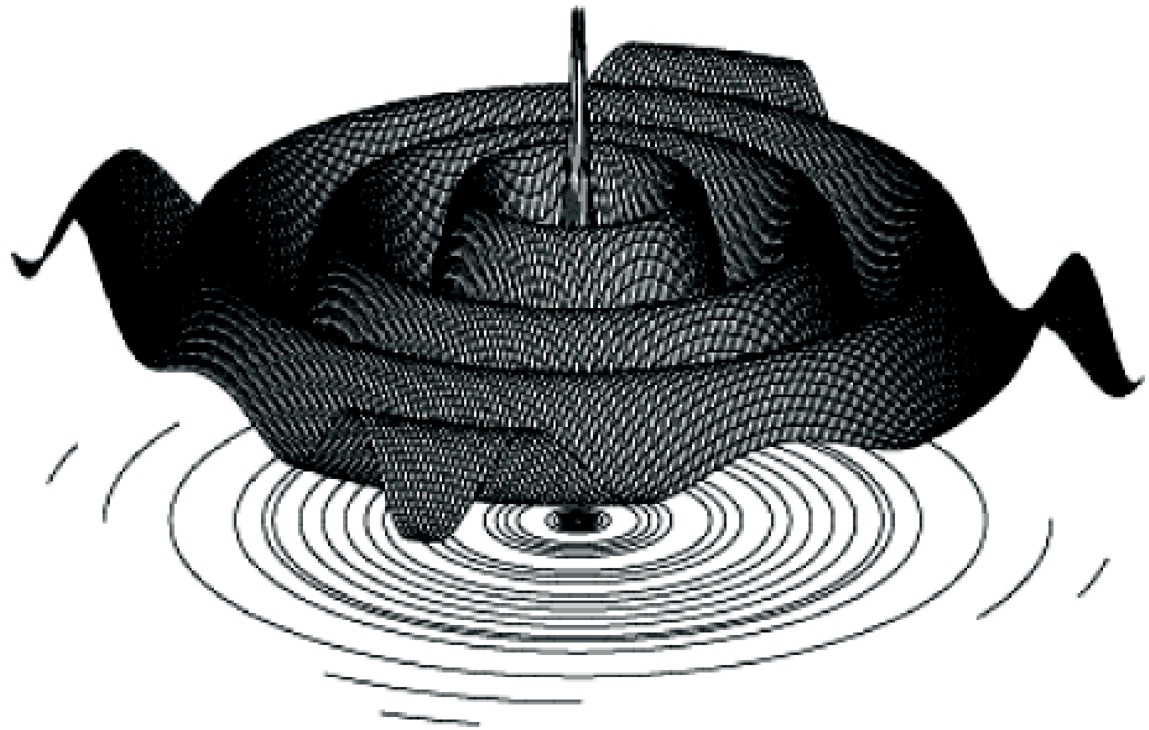
$$F(r) = u_\infty$$

$$F(r_n) + F'(r_n) \cdot q_n = u_\infty$$

$$r_{n+1} = r_n + q_n$$

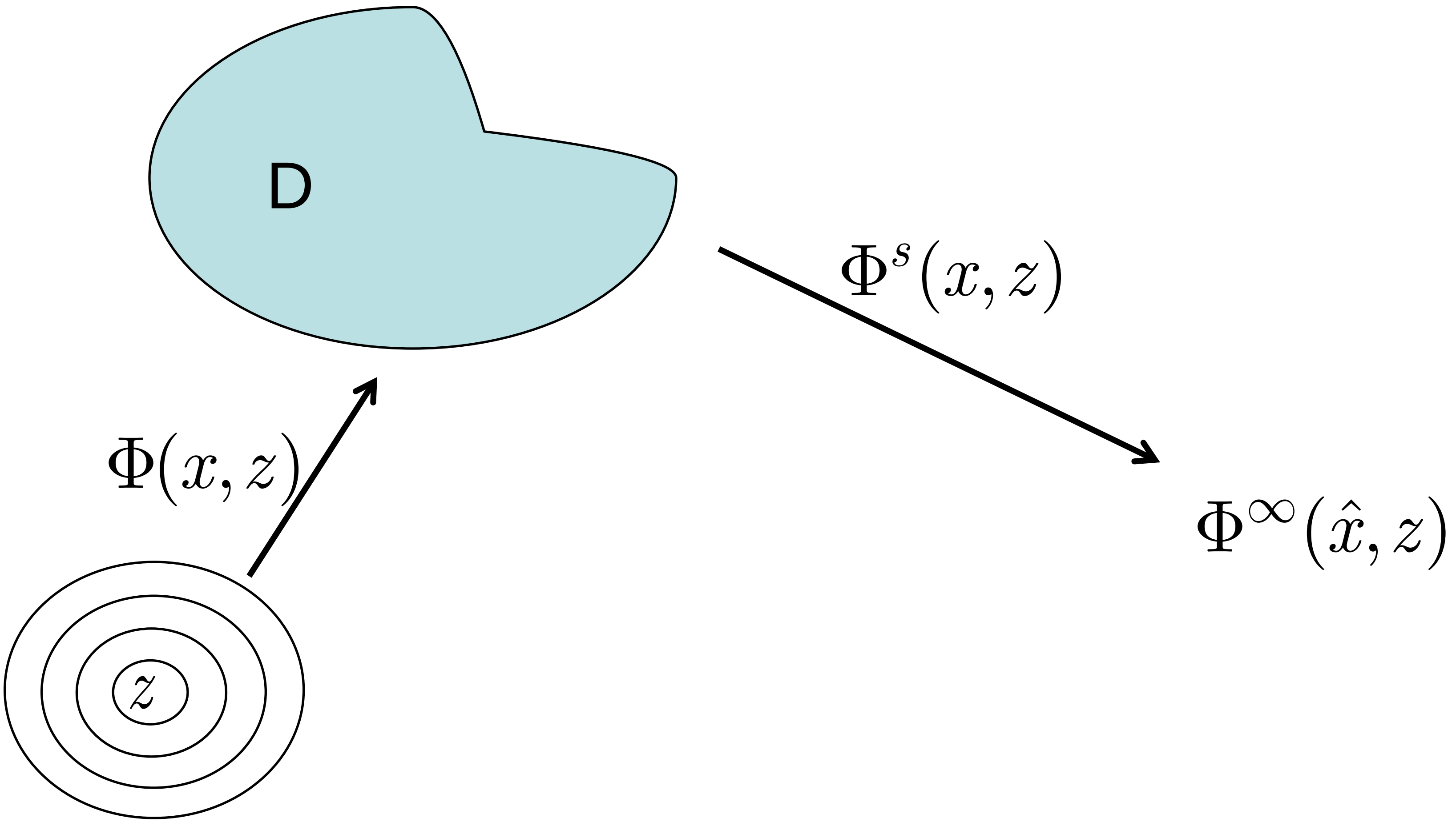
روش منبع نقطه‌ای

امواج کروی



$$\Phi(x,y) = \begin{cases} \frac{i}{۴} H_{\circ}^{(۱)}(k|x-y|) & m = ۲ \\ \frac{۱}{۴\pi}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} & m = ۳ \end{cases}$$

روش منبع نقطه ای



روش منبع نقطه ای

اگر نقطه z داخل مانع D قرار داشته باشد

$$\Phi^s(x,z) = -\Phi(x,z)$$

و

$$\boldsymbol{\Phi}^{\infty}(\hat{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{z}) = -\gamma_m e^{-ik\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{z}}$$

تخمین $u^\infty(\hat{x}, d)$ از $\Phi^\infty(\hat{x}, z)$

$$v_g(x) := \int_\Omega e^{ikx\cdot d} g(d)\, ds(d), \qquad x \in \mathbb{R}^m$$

$$v_g^s(x) \;=\; \int_\Omega u^s(x,d) g(d)\, ds(d), \qquad x \in \mathbb{R}^m \setminus \bar{D}$$

$$v_g^\infty(\hat{x}) \;=\; \int_\Omega u^\infty(\hat{x},d) g(d)\, ds(d), \qquad \hat{x} \in \Omega$$

روش منبع نقطه ای

$$(Hg)(x) := v_g(x)$$

اگر G ناحیه‌ای باشد که $k^۲$ مقدار ویژه دیریکله آن برای عملگر $-\Delta$ نباشد، در این صورت عملگر $H : L^۲(\Omega) \longrightarrow L^۲(\partial G)$ تصویر چگال دارد.

روش نمونه برداری خطی

$$\Phi^{\infty}(\hat{x}, z) = -\gamma_m e^{-ik\hat{x}\cdot z}$$

$$(Fg)(\hat{x}) = \gamma_m e^{-ik\hat{x}\cdot z}$$

$$(Fg)(\hat{x}) := \int_{\Omega} u^{\infty}(\hat{x}, d) g(d) ds(d)$$

$$\lim_{z \to \Gamma} \|g(\cdot, z)\|_{L^{۲}(\Omega)} = \infty$$

روش منابع تکین

- اثبات رفتار تکینگی

$$|\Phi^s(z,z)| \to \infty$$

وقتی نقطه Z به مرز نزدیک شود.

- تخمین $\Phi^s(z,z)$ به کمک اطلاعات الگوی میدان دور $u^\infty(\hat{x},d)$