دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی
صندوق پستی ۹۴۱۵-۱۱۱۵۵ تهران
sharif university of technology
department of mathematical sciences
p o box 11155-9415, tehran, iran

۸۹/۹/۱۱

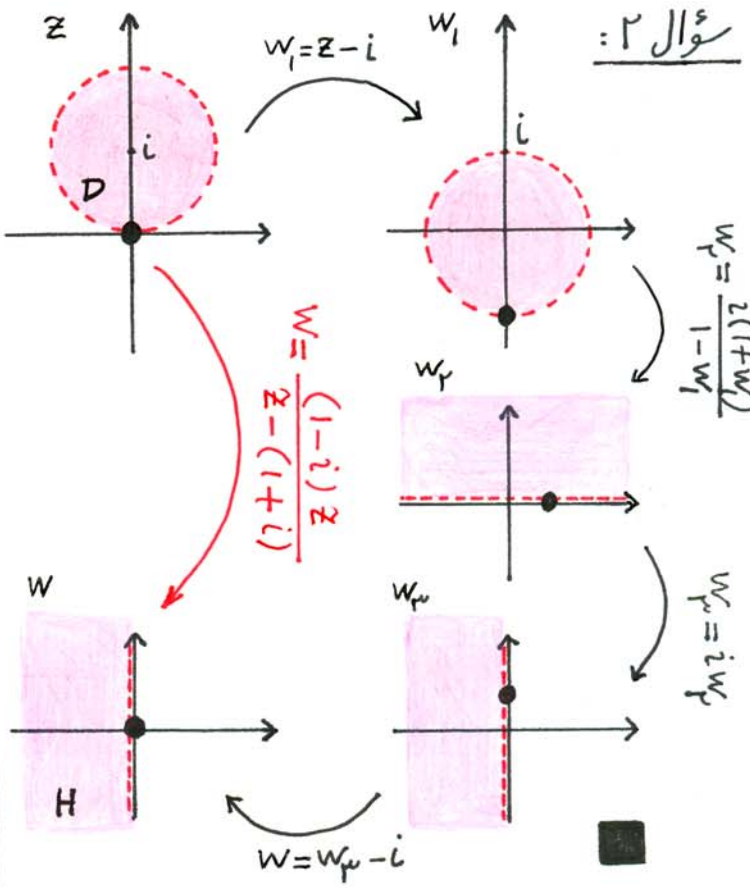
حل مسایل امتحان نهایی از بخش اول ریاضی مهندسی

سؤال ۱: چون f در D تحلیلی است، توابع u و v روی D در روابط کشی - ریمان صدق می‌کنند: $u_x = v_y$ و $u_y = -v_x$. از طرفی فرض نتیجه می‌دهد که تساوی های $au_x + bv_x = 0 = au_y + bv_y$ در D برقرارند. پس روی D داریم:

$$\begin{cases} au_x + bv_x = 0 \\ bu_x - av_x = 0 \end{cases}$$

اما دترمینان ضرایب در دستگاه بالا برابر است با $-a^2 - b^2$ که بنابر فرض مخالف صفر است. پس روی D داریم $u_x = v_x = 0$ و لذا $f' = u_x + iv_x = 0$. پس f تابعی ثابت روی D است. ■

سؤال ۲:



■

سؤال ۳: فرض کنید $l \ge 1$ عدد طبیعی دلخواهی باشد. فرض کنید $R > r$ عدد حقیقی باشد. بنابر قضیهٔ مشتق داریم:

$$f^{(n+l)}(0) = \frac{(n+l)!}{2\pi i}\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{n+l+1}}\,dz.$$

اما چون $R > r$، روی دایرهٔ $|z| = R$ می‌توانیم بنویسیم

$$\left|\frac{f(z)}{z^{n+l+1}}\right| \le \frac{a|z|^n}{|z|^{n+l+1}} = \frac{a}{R^{l+1}},$$

و لذا

$$\left|f^{(n+l)}(0)\right| \le \frac{(n+l)!}{2\pi}\frac{a}{R^{l+1}}(2\pi R) = \frac{(n+l)!\,a}{R^l}.$$

پس برای هر $R > r$ ثابت کرده‌ایم

$$\left|f^{(n+l)}(0)\right| \le \frac{(n+l)!\,a}{R^l},$$

و لذا با فرض $R \to \infty$ بدست می‌آوریم $f^{(n+l)}(0) = 0$.
چون $l \ge 1$ دلخواه بود، پس $f^{(n+1)}(0) = f^{(n+2)}(0) = \cdots = 0$.
اکنون قضیهٔ تیلر نتیجه می‌دهد که برای هر $z \in \mathbb{C}$،

$$f(z) = f(0) + f'(0)z + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n,$$

که نشان می‌دهد f یک چندجمله‌ای از درجهٔ حداکثر n است. ■

سؤال ۴: (الف)

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z}\,\frac{1}{z^2+1} \\ &= \frac{1}{z}\left(1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{z} - z + z^3 - z^5 + \cdots \end{aligned}$$

■

(ب)

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^3}\,\frac{1}{1 + 1/z^2} \\ &= \frac{1}{z^3}\left(1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^6} + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^7} - \frac{1}{z^9} + \cdots \end{aligned}$$

■

tel: (+98 21) 66005217
fax: (+98 21) 66005117
www.mathsci.sharif.ir
mathinfo@sharif.ir
تلفن ۶۶۰۰۵۲۱۷ (۰۲۱)
نمابر ۶۶۰۰۵۱۱۷ (۰۲۱)

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی
صندوق پستی ۹۴۱۵-۱۱۱۵۵ تهران
sharif university of technology
department of mathematical sciences
p o box 11155-9415, tehran, iran

۸۹/۹/۱۱

سؤال ۵: (الف) پربایش هریک از اضلاع مربع داده شده، از ضلع جنوبی در جهت مثلثاتی، به ترتیب به صورت زیر است:

$\gamma_1(t)=t-i,\ -1\le t\le 1$; $\gamma_2(t)=1+it,\ -1\le t\le 1$;

$\gamma_3(t)=-t+i,\ -1\le t\le 1$; $\gamma_4(t)=-1-it,\ -1\le t\le 1.$

در نتیجه

$$\int_C \bar{z}\,dz=\int_{-1}^{1}\Big((t+i)(1)+(1-it)(i)+(-t-i)(-1)+(-1+it)(-i)\Big)dt=\int_{-1}^{1}(4t+4i)\,dt=8i. \quad ■$$

(ب) نقطهٔ $z=0$ تنها نقطهٔ تکین منفرد تابع زیرانتگرال است که داخل خم C نیز قرار دارد. برای محاسبهٔ ماندهٔ تابع زیرانتگرال در $z=0$، روی $|z|>0$ سری لوران تابع مذکور حول $z=0$ را می‌نویسیم:

$$e^{1/z}\sin z=\Big(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\cdots\Big)\times\Big(z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\frac{1}{7!}z^7+\cdots\Big)=\cdots+\Big(\frac{1}{2!}\frac{1}{1!}-\frac{1}{4!}\frac{1}{3!}+\frac{1}{6!}\frac{1}{5!}-\cdots\Big)\frac{1}{z}+\cdots$$

پس $Res(e^{1/z}\sin z,0)=\frac{1}{2!}\frac{1}{1!}-\frac{1}{4!}\frac{1}{3!}+\frac{1}{6!}\frac{1}{5!}-\cdots$ و لذا

$$\int_C e^{1/z}\sin z\,dz=2\pi i\Big(\frac{1}{2!}\frac{1}{1!}-\frac{1}{4!}\frac{1}{3!}+\frac{1}{6!}\frac{1}{5!}-\cdots\Big). \quad ■$$

سؤال ۶: (الف)

$$\int_0^{2\pi} e^{e^{ix}}\,dx=\frac{1}{i}\int_0^{2\pi}\frac{e^{e^{ix}}}{e^{ix}}(ie^{ix})\,dx=\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z}\,dz=\frac{1}{i}(2\pi i e^0)=2\pi. \quad ■$$

(ب) تابع f را با ضابطهٔ $f(z)=\frac{ze^{iz}}{z^4+10z^2+9}=\frac{ze^{iz}}{(z^2+1)(z^2+9)}$ در نظر می‌گیریم. خم C را به صورت $C=L_R\cup C_R$ تعریف می‌کنیم که در آن L_R خطی است که $-R$ را به R وصل می‌کند و C_R نیم دایره‌ای است که R را به $-R$. هم‌چنین R نیز به قدری بزرگ است که نقاط i و $3i$ داخل خم C قرار می‌گیرند. در نتیجه

$$\int_C f(z)\,dz=2\pi i\Big(Res(f(z),i)+Res(f(z),3i)\Big)=2\pi i\Big(\frac{ze^{iz}}{(z+i)(z^2+9)}\Big|_{z=i}+\frac{ze^{iz}}{(z^2+1)(z+3i)}\Big|_{z=3i}\Big)=2\pi i\Big(\frac{1}{16e}-\frac{1}{16e^3}\Big)=\frac{\pi}{8}\Big(\frac{1}{e}-\frac{1}{e^3}\Big)i.$$

پس

$$\int_{-R}^{R}\frac{xe^{ix}}{x^4+10x^2+9}\,dx+\int_{C_R}f(z)\,dz=\frac{\pi}{8}\Big(\frac{1}{e}-\frac{1}{e^3}\Big)i,$$

که با فرض $R\to\infty$ و نیز مطالب خوانده شده بدست می‌آوریم:

$$P.V.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ix}}{x^4+10x^2+9}\,dx=\frac{\pi}{8}\Big(\frac{1}{e}-\frac{1}{e^3}\Big)i.$$

اکنون محاسبه‌ای ساده نشان می‌دهد که

$$\int_0^{\infty}\frac{x\sin x}{x^4+10x^2+9}\,dx=\frac{\pi}{16}\Big(\frac{1}{e}-\frac{1}{e^3}\Big). \quad ■$$

tel: (+98 21) 66005217
fax: (+98 21) 66005117
www.mathsci.sharif.ir
mathinfo@sharif.ir
تلفن ۶۶۰۰۵۲۱۷ (۰۲۱)
نمابر ۶۶۰۰۵۱۱۷ (۰۲۱)