

به نام او

وقت ۱۵۰ دقیقه

۸۴، ۸، ۲۶

میان ترم درس ریاضی مهندسی گمره‌های ۹-۱۲

۱- مقادیر زیر را با ارائه کامل راه حل به دست آورید. (۱۵ نمره)

الف، $(i - \sqrt{3})^{i + \sqrt{3}}$ ب، $\operatorname{Re}\left(\left(\frac{-1 + 5i}{2 + 3i}\right)^{1384}\right)$ ج، $\cos^{-1}(3)$

۲- نشان دهید که تابع $f(x + iy) = x^3 + iy^3$ در چه نقاطی مشتق پذیر و در چه نقاطی تحلیلی است. مشتق تابع را در این نقاط به دست آورید. (۱۵ نمره)

۳- مقدار سری زیر را برای مقادیر $y > 0$ به دست آورید. (۱۰ نمره)

$$e^{-y} \cos x + e^{-2y} \cos 2x + e^{-3y} \cos 3x + \dots$$

۴- مقدار انتگرالهای زیر را به دست آورید. (۲۰ نمره)

الف - $\int_{|z|=2} \frac{|z| e^{\bar{z}}}{z^2} dz$ ب - $\int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin \theta \cos \theta}{1 + \cos \theta}\right)^2 d\theta$

۵- کلیه قطب‌های تابع $f(z) = \frac{\tan(\sin z)}{z^3}$ را به دست آورده، مرتبه و مانده هر یک را مشخص کنید. (۲۰ نمره)

۶- الف) با استفاده از محاسبه انتگرال تابع $f(z) = (1+z^2)^{-1}$ روی مرز مستطیل

$$S = \{z \mid |x| \leq a, 0 \leq y \leq b\}$$

تساوی زیر را برای مقدار $0 < b < 1$ اثبات نمایید.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - b^2 + x^2) dx}{(1 - b^2 + x^2)^2 + 4b^2 x^2} = \pi$$

ب - مقدار انتگرال فوق را در حالتی $b = 1$ و $a > 1$ به دست آورید. (۲۰ نمره)