Reaction - Diffusion Equations

مدلهای رشد جمعیت

$p(t) =$ مقدار جمعیت در یک نقطه خاص یا در یک جامعه

(I) مدل رشد خطی

$$\frac{dP}{dt} = kP(t)$$

$K =$ میانگین زاد و ولد − میانگین مرگ و میر = ضریب رشد

(II) مدل لجستیک

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1-\frac{P}{N}\right)$$

$N =$ ظرفیت جامعه

(III) مدل Allee_Effect

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1-\frac{P}{N}\right)\left(\frac{P}{M}-1\right)$$

$M =$ ضریب بقاء جامعه

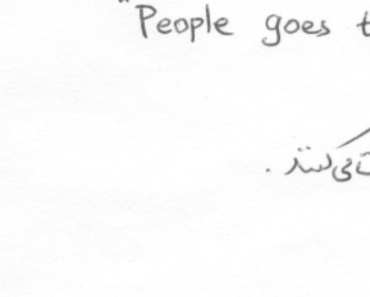
مدلهای انتشار جمعیت

$u(x,t) =$ میانگین جمعیت در نقطه x در زمان t

ضرب المثل چینی: "People goes to high place, water flows to low place"

قانون Fick : ذرات از نقاط با چگالی بالا به سمت نقاط با چگالی پایین حرکت می‌کنند.

شار $J(t,x) = -d(x)\nabla_x u(t,x)$



ضریب انتشار $d(x) > 0$

مقدار جمعیت در ناحیه $\Omega = \int_\Omega u(t,x)\,dx$

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u(t,x)\,dx = -\int_{\partial\Omega} J(t,x)\cdot\vec{n}\,ds + \int_\Omega f(t,x,u)\,dx$$

نرخ تغییر جمعیت $= f(t,x,u)$

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\,dx = -\int_\Omega \operatorname{div} J(t,x)\,dx + \int_\Omega f(t,x,u)\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = +\operatorname{div}\left(d(x)\nabla u(t,x)\right) + f(t,x,u)$$

ثابت $d(x)=d \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = d\,\Delta u + f(t,x,u)$

مثال - مدل لجستیک : $\frac{\partial P}{\partial t} = d\,\Delta P + kP\left(1-\frac{P}{M}\right)$

<u>تعبیر دیگری از مدلهای انتشار :</u>

ذراتی که در زمان t_0 در نقطه x_0 هستند در لحظه $t=t_0+\Delta t$ با احتمال $\frac{1}{2}$ به نقطه $x_0+\Delta x$ و با احتمال $\frac{1}{2}$ به نقطه $x_0-\Delta x$ می روند.

$$u(t_0+\Delta t, x_0) = \frac{1}{2}u(t_0, x_0-\Delta x) + \frac{1}{2}u(t_0, x_0+\Delta x)$$

$$\begin{cases} u(t_0+\Delta t, x_0) = u(t_0,x_0) + \frac{\partial u}{\partial t}(t_0,x_0)\cdot\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t_0,x_0)(\Delta t)^2 + \cdots \\ u(t_0, x_0-\Delta x_0) = u(t_0,x_0) - \frac{\partial u}{\partial x}(t_0,x_0)\cdot\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_0,x_0)(\Delta x)^2 + \cdots \\ u(t_0, x_0+\Delta x_0) = u(t_0,x_0) + \frac{\partial u}{\partial x}(t_0,x_0)\cdot\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_0,x_0)(\Delta x)^2 + \cdots \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial t}(t_0,x_0)\,\Delta t + \cdots = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_0,x_0)(\Delta x)^2 + \cdots$$

$\Delta x, \Delta t \to 0$ وقتی $\frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \longrightarrow D > 0 \quad \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

کمیت $D = \frac{(\text{طول})^2}{\text{زمان}}$

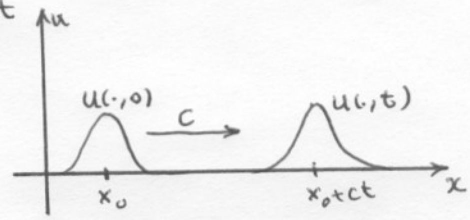
مجذور مقدار فاصله‌ای که یک ماده منتشر می شود متناسب است با مدت زمان انتشار

Travelling Waves

$$u_t = D u_{xx} + f(u) \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0,\ u(x,t) \in \mathbb{R}^n$$

$$D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n) \quad d_i > 0$$

$$u(x,t) = V(x - ct) \qquad \xi = x - ct$$

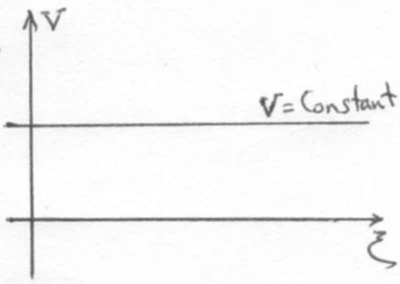


$$\Rightarrow \quad -cV_\xi = D V_{\xi\xi} + f(V)$$

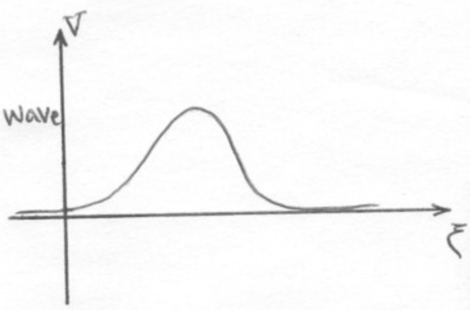
$$\Rightarrow \begin{cases} V_\xi = W \\ W_\xi = -D^{-1}[cW + f(V)] \end{cases}$$

$D V_{\xi\xi} + c V_\xi + f(V) = 0$ جوابهای

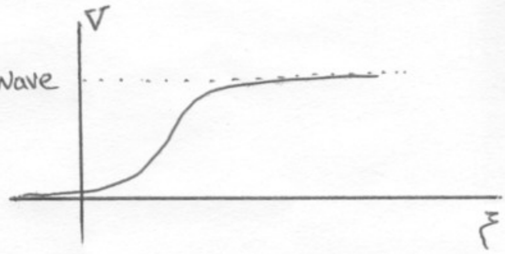
rest state



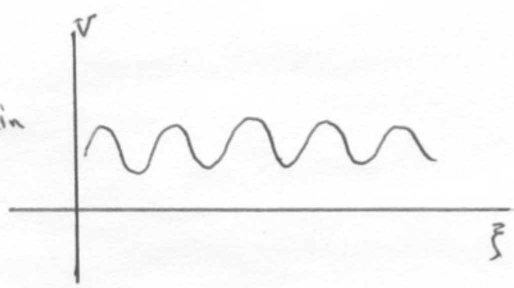
Pulse wave



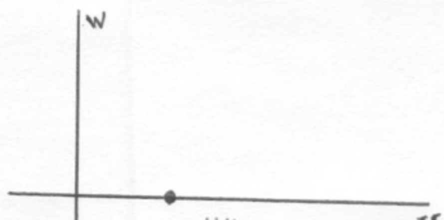
Front wave



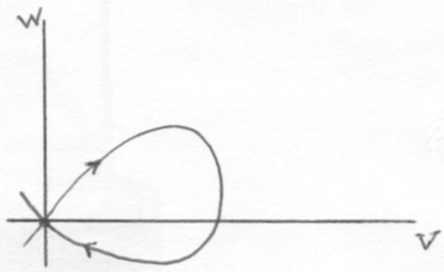
Wave train



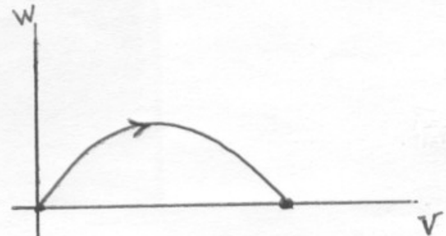
$\begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix}_\xi = \begin{pmatrix} W \\ -D^{-1}[cW + f(V)] \end{pmatrix}$ جوابهای



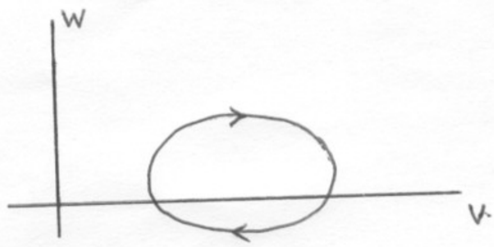
equilibrium



homoclinic orbit



hetroclinic orbit



Periodic orbit

مثال - FitzHugh-Nagumo

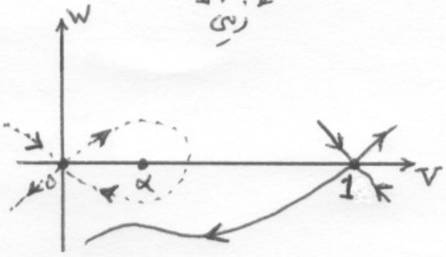
$$u_t = u_{xx} + f(u)$$

$$f(u) = u(1-u)(u-\alpha) \qquad 0<\alpha<\frac{1}{2}$$

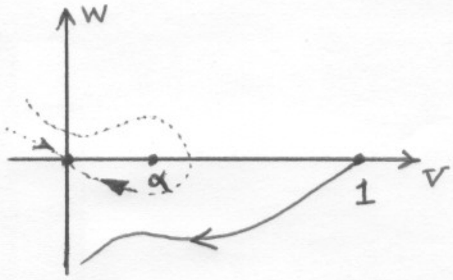
$$u(x,t) = V(x-ct) \Rightarrow -cV_\xi = V_{\xi\xi} + f(V)$$

$$\begin{cases} V_\xi = W \\ W_\xi = -cW - f(V) \end{cases} \Rightarrow$$ نقاط ساکن $(0,0)$ و $(1,0)$ و $(\alpha,0)$

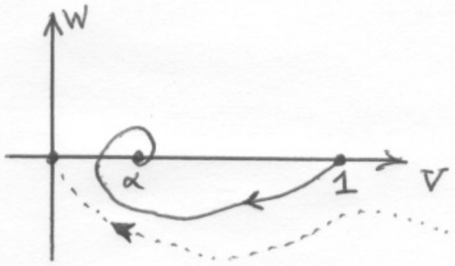
زینی



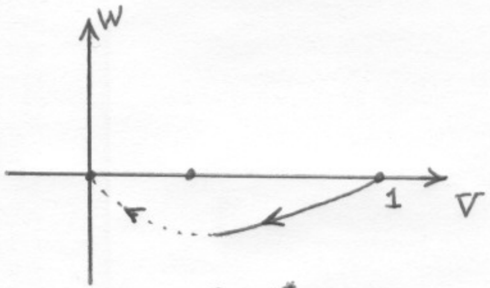
$c=0$



$-1 \ll c < 0$



$c \ll -1$



$c = c^*$

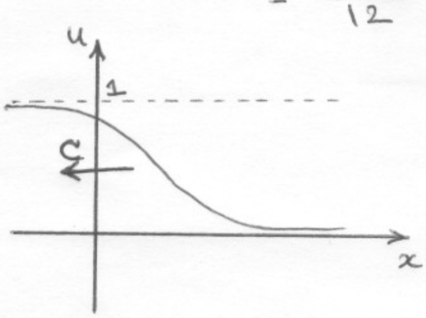
بررسی علامت c :

$$-c\int_{-\infty}^{+\infty} (V_\xi)^2\, d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} V_\xi V_{\xi\xi} + V_\xi f(V)\, d\xi$$

$$= \underbrace{\cancel{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{d\xi}\left[\frac{1}{2}(V_\xi)^2\right] d\xi}}_{0} + \int_0^1 f(V)\, dV$$

$$V: (-\infty,+\infty) \xrightarrow{\text{نزولی}} (0,1)$$

$$= \frac{1-2\alpha}{12} \qquad \Rightarrow \qquad c<0$$



- حالت $\alpha = \frac{1}{2}$ $\Leftarrow$ Stand wave

- حالت $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ $\Leftarrow$ $c>0$ و موج V از صفر به یک حرکت می‌کند

$$\lim_{\xi\to+\infty} V(\xi) = 1, \quad \lim_{\xi\to-\infty} V(\xi) = 0$$

مثال-

$$\begin{cases} v_t = v_{xx} + f(v) - u \\ u_t = \beta v \end{cases}$$

$f(v) = v(1-v)(v-\alpha)$

$0<\alpha<1 \;,\; 0<\beta$

$$v(x,t) = V(x-ct) \;,\quad u(x,t) = U(x-ct)$$

$$\begin{cases} V_\xi = W \\ W_\xi = -cW - f(V) + U \\ U_\xi = -\frac{\beta}{c} V \end{cases} \longrightarrow$$

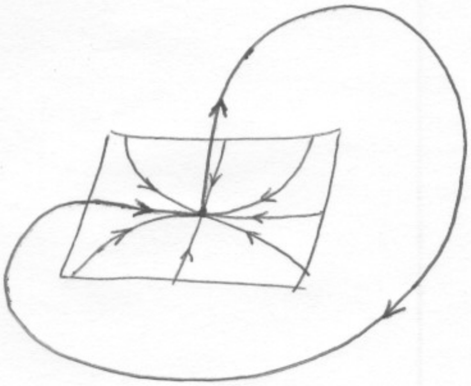
تنها نقطه بحرانی $(0,0,0)$

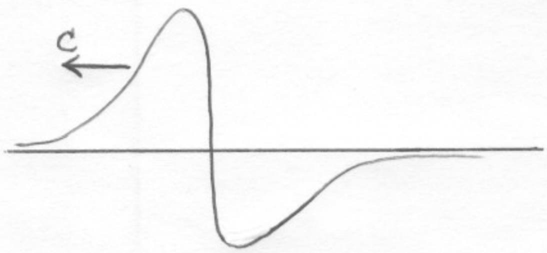
$\downarrow$

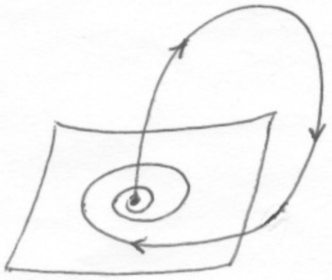
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \alpha & -c & 1 \\ -\beta/c & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

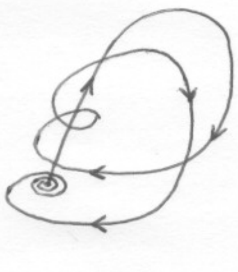
برای همه مقادیر $c>0$ ، یک مقدار ویژه مثبت وجود دارد و دو مقدار ویژه با بخش حقیقی منفی

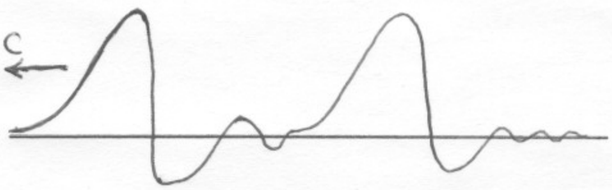
سؤال: برای چه مقادیری از c مدار هوموکلینیک یا تناوبی وجود دارد؟











Stability of the Travelling Wave

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = F(u) \\ u(t_0) = u_* \end{cases} \qquad F : X \longrightarrow X$$

X یک فضای تابعی است و معمولاً $X = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ یا $X = C_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$

F عملگر دیفرانسیل یا انتگرالی مثلاً $F(u) = Du_{\xi\xi} + cu_\xi + f(u)$ یا

$$F(u)(x) = -u + \int_{-\infty}^{+\infty} w(x-y)\, f(u(y))\, dy$$

اگر $u_0(x)$ نقطه تعادل باشد یعنی $F(u_0)=0$ ، پایدار مجانبی گفته می‌شود اگر برای هر $\varepsilon>0$ ، مقدار $\delta>0$ وجود دارد که اگر $\|u_* - u_0\|_X < \delta$ آنگاه $\lim_{t\to+\infty} \|u(t,\cdot) - u_0(\cdot)\|_X = 0$.

خطی‌سازی: اگر $u=0$ نقطه تعادل پایدار مجانبی در دستگاه خطی $\dfrac{du}{dt} = F'(u_0)[u]$ باشد $u_0(x)$ در دستگاه غیرخطی پایدار مجانبی است. $\left(F'(u_0)[u] = \dfrac{d}{dr} F(u_0 + ru)\Big|_{r=0} \right)$

مثال - $u_t = u_{xx} + u(u-1)$ ⟵ نقطه تعادل $u_0 = p(x)$ است اگر $p'' + p(p-1) = 0$

خطی‌سازی: $u_t = u_{xx} + 2p(x)u - u$

* اگر فضای برداری X بعد متناهی داشته باشد، پایداری مجانبی $u=0$ در دستگاه خطی معادل این است که قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه منفی باشد. این مطلب برای بعد نامتناهی با کمی تغییر در تعریف مقدار ویژه درست است.

تعریف: اگر $\mathcal{L} : X \to X$ عملگر خطی باشد، مجموعه حلال (resolvent) آن به صورت زیر تعریف می‌شود

$\rho(\mathcal{L}) = \{ \lambda \in \mathbb{C}$: عملگر $\mathcal{L} - \lambda I$ وارون پیوسته دارد $\}$

$$= \{ \lambda \in \mathbb{C} : \exists k>0\ \forall h \in X\ \exists!\, u \in X,\ (\mathcal{L} - \lambda I)u = h,\ \|u\|_X \le k \|h\|_X \}$$

طیف عملگر $\mathcal{L}$ ⟵ $\mathrm{Spec}(\mathcal{L}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{L})$

$\mathcal{L}-\lambda I$ یک به یک نیست $\leftarrow$ $\exists u\neq 0,\ \mathcal{L}u=\lambda u$ $\leftarrow$ λ مقدار ویژه، u تابع ویژه

$\lambda \in Spec(\mathcal{L})$

$\mathcal{L}-\lambda I$ یک به یک است ولی پوشا نیست. (از قضیه نگاشت باز نتیجه می‌شود وارون هر عملگر خطی یک به یک و پوشا پیوسته است.)

$$Spec(\mathcal{L})=\sigma_p \cup \sigma_{ess},\qquad \begin{array}{l}\sigma_p = \text{Point Spectrum, eigenvalue}\\ \sigma_{ess} = \text{essential spectrum}\end{array}$$

مثال- $\mathcal{L}u = u_{xx}$ ، $X=\{u\in C^2(0,1) : u(0)=u(1)=0\}$ همراه با نرم $\|\cdot\|_\infty$

$$u_{xx}-\lambda u=0 \Rightarrow \lambda_n = -(n\pi)^2$$

اگر $\lambda\notin\sigma_p(\mathcal{L})$ برای هر تابع f، معادله $u_{xx}-\lambda u=f$ دارای جواب یکتا است و

$$\|u\|\le C\|f\|$$

بنابراین $\sigma_{ess}=\phi$.

<u>قضیه پایداری خطی:</u> $u_t=\mathcal{L}u$

اگر قسمت حقیقی همه مقادیر طیف $\mathcal{L}$ نامثبت باشد، $u=0$ پایدار است.

اگر قسمت حقیقی همه مقادیر طیف $\mathcal{L}$ کوچکتر از مقدار $-\sigma<0$ باشد، $u=0$ پایدار مجانبی است.

مثال- $u_t=u_{xx}$ $\Leftarrow$ $Spec(\mathcal{L})=\{-(n\pi)^2\}_{n\ge1}$ $\Leftarrow$ $u=0$ پایدار مجانبی است.

<u>پایداری جوابهای travelling wave:</u>

$$u_t = Du_{xx}+f(u)$$

$$u(x,t)=\tilde{V}(x-ct,t)$$

$$\Rightarrow \tilde{V}_t = c\tilde{V}_\xi + D\tilde{V}_{\xi\xi} + f(\tilde{V})$$

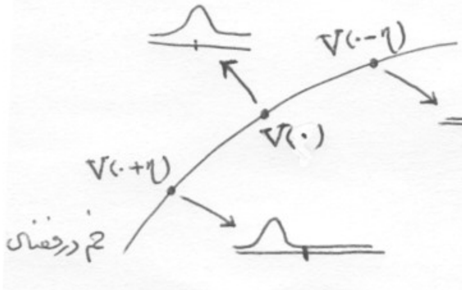
جوابهای Travelling Wave نقاط تعادل معادله بالا هستند. اگر $V(\xi)$ نقطه تعادل باشد یعنی $V_{\xi\xi}+cV_\xi+f(V)=0$

خطی شده معادله بالا در نقطه $V(\xi)$ به صورت زیر است:

$$u_t = Du_{\xi\xi}+cu_\xi+f'(V)\cdot u = \mathcal{L}u$$

نکته مهم: اگر $V(\xi)$ جواب $DV_{\xi\xi}+cV_\xi+f(V)=0$ باشد و $0\neq V_\xi\in X$، آنگاه $0\in Spec(\mathcal{L})$

$$DV_{\xi\xi}+cV_\xi+f(V)=0 \xrightarrow{\frac{d}{d\xi}} \mathcal{L}(V_\xi)=D(V_\xi)_{\xi\xi}+c(V_\xi)_\xi+f'(V)\cdot V_\xi=0$$



توضیح هندسی: تمام توابع $V(\cdot+\tau)$ برای هر مقدار ثابت τ یک نقطه تعادل است و همه آنها جواب‌های Travelling Wave هستند.

$$\frac{d}{d\tau}V(\cdot+\tau)\Big|_{\tau=0}=V'(\cdot)$$

همانطور که در بعد متناهی انتظار داریم یک خم جواب برای معادله غیرخطی مماس به بردار ویژه قسمت خطی وجود داشته باشد

در اینجا نیز خم بالا مماس به بردار ویژه V' در فضای X است.

قضیه Evans: اگر $\lambda=0$ مقدار ویژه ساده باشد و بقیه طیف در $\{\lambda\in\mathbb{C}: Re\lambda\le-\alpha<0\}$ قرار بگیرد، آنگاه $V(\xi)$ پایدار مجانبی است.

$$\mathcal{L}u=Du_{\xi\xi}+cu_\xi+f'(V)u$$

$$(\mathcal{L}-\lambda I)u=h \Rightarrow \begin{cases}u_\xi=w\\ w_\xi=D^{-1}[-cw+(\lambda-f'(V))u]+h\end{cases}$$

$$\Rightarrow \binom{u}{w}_\xi=A(\lambda,\xi)\binom{u}{w}+\binom{0}{h}\quad,\quad A(\xi,\lambda)=\begin{pmatrix}0&1\\ D^{-1}[\lambda-f'(V)]&-cD^{-1}\end{pmatrix}$$

λ مقدار ویژه است اگر دستگاه $\binom{u}{w}_\xi=A(\xi,\lambda)\binom{u}{w}$ جواب غیربدیهی داشته باشد. (یا معادله $Du_{\xi\xi}+cu_\xi+f'(V)u=\lambda u$ جواب غیربدیهی داشته باشد.)

$\lambda\in\rho(\mathcal{L})$ اگر و تنها اگر برای هر تابع $h\in X$، دستگاه فوق دارای جواب یکتا باشد که $\|\binom{u}{w}\|\le C\|h\|_X$

حالت Rest-State: $V(\xi)=V_0$ تابع ثابت است. $\Leftarrow$ $A(\xi,\lambda)=A(\lambda)$

اگر $A=A(\lambda)$ هذلولوی باشد، آنگاه ماتریس‌های $\Phi^s(t)$ و $\Phi^u(t)$ وجود دارند که $e^{tA}=\Phi^s(t)+\Phi^u(t)$

$$\|\Phi^s(t)\|\le e^{-\mu t}\qquad t>0$$
$$\|\Phi^u(t)\|\le e^{\mu t}\qquad t<0$$

برای یک مقدار ثابت $0<\mu$.

در این صورت جواب دستگاه $\dot{X}=AX+h(t)$ در رابطه زیر صدق می‌کند

$$X(t)=\int_{-\infty}^{t}\Phi^{s}(t-\theta)\,h(\theta)\,d\theta-\int_{t}^{+\infty}\Phi^{u}(t-\theta)\,h(\theta)\,d\theta$$

$$\Rightarrow \quad \|X\|\le C\cdot\|h\|$$

نتیجه: اگر برای مقدار λ، ماتریس $A(\lambda)$ هذلولوی باشد، آنگاه $\lambda\in\rho(\mathcal{L})$.

برعکس اگر برای یک مقدار λ، ماتریس $A(\lambda)$ مقدار ویژه به صورت $\nu=i\omega$ داشته باشد:

$$0=\det(A(\lambda)-\nu I)=\det\begin{pmatrix}-\nu I & I\\ D^{-1}[\lambda-f'(v_0)] & -cD^{-1}-\nu I\end{pmatrix}=\det\left(c\nu D^{-1}+\nu^{2}I-D^{-1}[\lambda-f'(v_0)]\right)$$

$$d(\lambda,\nu)=\det\left[\nu^{2}D+(c\nu+f'(v_0)-\lambda)I\right]=0 \longrightarrow$$ ریشه‌ای به صورت $\nu=i\omega$ دارد.

اگر قرار دهیم $u(\xi)=e^{i\omega\xi}$ $\Leftarrow$ $(\mathcal{L}-\lambda I)u=d(\lambda,i\omega)\,u=0$ یعنی λ مقدار ویژه $\mathcal{L}$ است.

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{L})=\{\lambda\in\mathbb{C}:\ d(\lambda,i\omega)=0 \text{ برای یک مقدار } \omega\in\mathbb{R}\}$$

مثال- $u_t=u_{xx}+u(1-u)(u-\alpha)$ ، $0<\alpha<1$.

$u(x,t)=V(x-ct)\Rightarrow V_{\xi\xi}+cV_{\xi}+f(V)=0 \Rightarrow$ $V_0=0,\alpha,1$ حالت‌های rest-state هستند

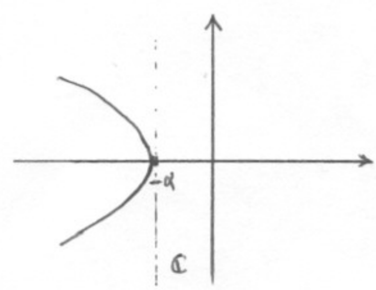
$$\mathcal{L}u=u_{\xi\xi}+cu_{\xi}+f'(V_0)u$$

$$\Rightarrow A(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -f'(V_0)+\lambda & -c\end{pmatrix}\Rightarrow d(\lambda,\nu)=\nu^{2}+c\nu+f'(V_0)-\lambda$$

$$V_0=0 \Rightarrow d(\lambda,i\omega)=-\omega^{2}+ic\omega-(\lambda+\alpha)=0$$

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{L})=\{\lambda=-\omega^{2}+ic\omega-\alpha\}$$

$\Rightarrow$ $V_0=0$ پایدار مجانبی است.



$V_0=1 \Rightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{L})=\{\lambda=-\omega^{2}+ic\omega+\alpha-1\}\Rightarrow$ پایدار مجانبی

$V_0=\alpha \Rightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{L})=\{\lambda=-\omega^{2}+ic\omega+\alpha(1-\alpha)\}\Rightarrow$ ناپایدار

Wave ...

$V(\xi+T)=V(\xi)$ متناوب با دوره T .

$$A(\xi,\lambda)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ D^{-1}[\lambda-f'(V(\xi))] & -cD^{-1}\end{pmatrix}$$

$$A(\xi+T,\lambda)=A(\xi,\lambda)$$

__نمایش فلوکه__ : ماتریس $B(\lambda)$ و ماتریس متناوب $R(\xi,\lambda)$ با دوره تناوب T وجود دارند ($R(\xi+T,\lambda)=R(\xi,\lambda)$) به طوری که هر جواب $\dot{X}=A(t,\lambda)X$ به صورت $X(t)=R(t,\lambda)e^{tB(\lambda)}X_0$ نمایش داد.

__با تغییر متغیر__ $Y=R(t,\lambda)X$ دستگاه فوق تبدیل به دستگاه با ضرایب ثابت می‌شود.

$$\dot{Y}=B(\lambda)Y$$

$Spec(\mathcal{L})=\{\lambda\in\mathbb{C} :$ هذلولوی نیست $B(\lambda)\}=\{\lambda\in\mathbb{C} \mid \det(B(\lambda)-i\omega)=0$ ، برای یک مقدار $\omega\in\mathbb{R}\}$

نکته ـ تمام اعضای طیف مقدار ویژه هستند و متناظر هر $\omega\in\mathbb{R}$ که $\det(B(\lambda)-i\omega)=0$ تابع ویژه ای به صورت

$$u(\xi)=V_{per}(\xi)\,e^{i\omega\xi}$$

وجود دارد که $V_{per}(\xi)$ یک تابع متناوب با دوره T است.

__Front Wave__

$$\lim_{\xi\to-\infty}V(\xi)=V_-,\quad \lim_{\xi\to+\infty}V(\xi)=V_+$$

$\lambda\in\rho(\mathcal{L}) \Leftrightarrow$ برای هر تابع h $\binom{u}{w}_\xi=A(\xi,\lambda)\binom{u}{v}+\binom{0}{h}$ جواب دارد

$\Phi(t,\theta)$: ماتریس اساسی $A(t,\lambda)$ یعنی جواب $X(t)=\Phi(t,\theta)X_0$ $\begin{cases}\dot{X}=A(t,\lambda)X\\ X(\theta)=X_0\end{cases}$ است.

اگر بتوانیم مشابه حالت Rest-State ، $\Phi(t,\theta)=\Phi^s(t,\theta)+\Phi^u(t,\theta)$ تجزیه کنیم که

$$\|\Phi^s(t,\theta)\|\le e^{-\mu(t-\theta)}\qquad t>\theta$$

$$\|\Phi^u(t,\theta)\|\le e^{\mu(t-\theta)}\qquad t<\theta$$

$\mu>0$ مقدار ثابت است.

آنگاه $X(t)=\int_{-\infty}^{t}\Phi^s(t,\theta)h(\theta)d\theta-\int_{t}^{+\infty}\Phi^u(t,\theta)h(\theta)d\theta$ جواب $\dot{X}=A(t,\lambda)X+h(t)$ است.

ستونهای $\Phi^{s}(t,\theta)$ جوابهایی هستند که وقتی $t \to +\infty$ به صفر میل می‌کنند

ستونهای $\Phi^{u}(t,\theta)$ جوابهایی هستند که وقتی $t \to -\infty$ به صفر میل می‌کنند.

$$\mathcal{E}^{+}(t_0,\lambda) = \left\{ X_0 \in \mathbb{C}^{2n} \;\middle|\; \lim_{t \to +\infty} X(t) = 0 \;,\; X(t_0) = X_0 \right\}$$

$$\mathcal{E}^{-}(t_0,\lambda) = \left\{ X_0 \in \mathbb{C}^{2n} \;\middle|\; \lim_{t \to -\infty} X(t) = 0 \;,\; X(t_0) = X_0 \right\}$$

اگر $\mathcal{E}^{+}(0,\lambda) \cap \mathcal{E}^{-}(0,\lambda) \neq \{0\}$ ، آنگاه نمی‌توان تجزیه بالا را داشت و در نتیجه $\lambda \in Spec(\mathcal{L})$.

قضیه: $\lim_{\xi \to +\infty} A(\xi,\lambda) = A_{+}(\lambda)$ و $\lim_{\xi \to -\infty} A(\xi,\lambda) = A_{-}(\lambda)$

الف) $\lambda \in \rho(\mathcal{L})$ اگر و تنها اگر $A_{\pm}(\lambda)$ هر دو هذلولوی باشند و شاخص مرس هر دو برابر باشد (بعد زیرفضای ناپایدار هر دو برابر است)

و $\mathcal{E}^{+}(0,\lambda) \oplus \mathcal{E}^{-}(0,\lambda) = \mathbb{C}^{2n}$

ب) $\lambda \in \sigma_p(\mathcal{L})$ اگر و تنها اگر $A_{\pm}(\lambda)$ هر دو هذلولوی با شاخص مرس برابر ولی

$$\mathcal{E}^{+}(0,\lambda) \cap \mathcal{E}^{-}(0,\lambda) \neq \{0\}$$

ج) $\lambda \in \sigma_{ess}(\mathcal{L})$ اگر و تنها اگر حداقل یکی از $A_{\pm}(\lambda)$ هذلولوی نباشد و یا اگر هر دو هذلولوی بودند شاخصهای مرس آنها متفاوت باشد.

<u>Evans Function</u>

اگر $\{V_1^{+}(\lambda), \dots, V_n^{+}(\lambda)\}$ پایه‌ای برای $\mathcal{E}^{+}(0,\lambda)$ که نسبت به λ تحلیلی است و

اگر $\{V_1^{-}(\lambda), \dots, V_n^{-}(\lambda)\}$ پایه‌ای برای $\mathcal{E}^{-}(0,\lambda)$ باشد

$$D(\lambda) := \det\left[V_1^{+}, \dots, V_n^{+}, V_1^{-}, \dots, V_n^{-} \right]$$

$$\lambda \in \sigma_p(\mathcal{L}) \iff D(\lambda) = 0 \qquad (1)$$

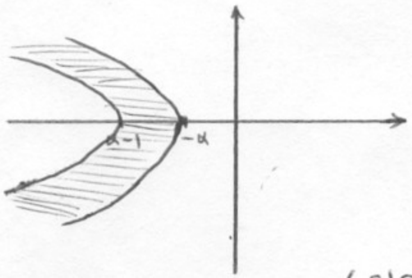
(۲) تکرر مقدار ویژه λ برابر تکرر λ به عنوان ریشه تابع $D(\lambda)=0$ است.

مثال - $u_t = u_{xx} + u(1-u)(u-\alpha)$ ، $\lim\limits_{\xi\to+\infty} V(\xi)=0$, $\lim\limits_{\xi\to-\infty} V(\xi)=1$

$$A(\xi,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda - f'(V(\xi)) & -c \end{pmatrix}$$

وقتی $\xi\to+\infty$ $\quad A(\xi,\lambda) \longrightarrow A_+(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda+\alpha & -c \end{pmatrix}$

وقتی $\xi\to-\infty$ $\quad A(\xi,\lambda) \longrightarrow A_-(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda+1-\alpha & -c \end{pmatrix}$



برای $A_+(\lambda)$ $\quad \lambda = -\omega^2 + ic\omega - \alpha$ هذلولوی نیست.

برای $A_-(\lambda)$ $\quad \lambda = -\omega^2 + ic\omega + \alpha - 1$ هذلولوی نیست.

شاخص مرس $A_+(\lambda)$ در خارج از خم $\lambda = -\omega^2 + ic\omega - \alpha$ ثابت می‌ماند (چرا؟)

همینطور برای $A_-(\lambda)$. بنابراین شاخص مرس A_+ در سمت راست خم بالا برابر یک (مثلاً $\lambda = 0$ قرار دهید)

و در سمت چپ برابر صفر است. (مثلاً $\lambda = -2\alpha$)

نتیجه: $\sigma_{ess}(\mathcal{L})$ = ناحیه بین دو خم $\qquad$ سؤال: $\sigma_p = ?$

<u>Pulse Wave</u> $\qquad \lim\limits_{\xi\to\pm\infty} V(\xi) = V_0$

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} A(\xi,\lambda) = A_0(\lambda)$$

همه قضیه قبل برقرار است و نیازی به بررسی شاخص مرس نیست.

$$\left.\begin{array}{l} \lambda \in \sigma_{ess} \Leftrightarrow A_0(\lambda) \text{ هذلولوی نیست} \\ \lambda \in \sigma_p \Leftrightarrow A_0(\lambda) \text{ هذلولوی است ولی } E^+(0,\lambda)\cap E^-(0,\lambda)\neq\{0\} \\ \lambda \in \rho(\mathcal{L}) \Leftrightarrow A_0(\lambda) \text{ هذلولوی است و } E^+(0,\lambda)\oplus E^-(0,\lambda)=\mathbb{C}^{2n} \end{array}\right\}$$

مثال - $u_t = u_{xx} + u^3 - u \Leftarrow -cV_\xi = V_{\xi\xi} + V^3 - V$

برای $c=0$ ، $V(\xi) = \sqrt{2}\,\mathrm{sech}\,\xi$ یک جواب Travelling Wave ارائه می‌کند.

خطی‌سازی در نقطه $V(\xi)$ $\longrightarrow$ $\mathcal{L}u = u_{\xi\xi} + (3V^2(\xi) - 1)u \Rightarrow A(\xi,\lambda) = \left(\begin{matrix} 0 \\ -3V^2+1+\lambda \end{matrix}\right.$

$$A(\xi,\lambda) \longrightarrow A_0(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1+\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

$$0 = \det \begin{vmatrix} -i\nu & 1 \\ 1+\lambda & -i\nu \end{vmatrix} = -\nu^2-1-\lambda \quad \Rightarrow \quad \sigma_{ess}(\mathcal{L}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = -1-\nu^2 ,\ \nu \in \mathbb{R}\} = (-\infty,-1]$$

$$u_-(\xi,\lambda) = e^{\sqrt{1+\lambda}\,\xi}\left[1+\frac{\lambda}{3} - \sqrt{1+\lambda}\tanh(\xi) - \operatorname{sech}^2(\xi)\right]$$

$$u_+(\xi,\lambda) = e^{-\sqrt{1+\lambda}\,\xi}\left[1+\frac{\lambda}{3} + \sqrt{1+\lambda}\tanh(\xi) - \operatorname{sech}^2(\xi)\right]$$

$\lim\limits_{\xi\to-\infty} u_-(\xi,\lambda) = 0$ و $\lim\limits_{\xi\to+\infty} u_+(\xi,\lambda) = 0$ ، $Re\lambda > -1$ برای

$$D(\lambda) = \det\begin{pmatrix} u_-(0,\lambda) & u_+(0,\lambda) \\ u_-'(0,\lambda) & u_+'(0,\lambda) \end{pmatrix} = -\frac{2}{9}\lambda(\lambda-3)\sqrt{\lambda+1}$$

- تکرر $\lambda=0$ برابر یک است.
- $\sigma_p = \{0, 3, -1\}$

Waves in a threshold model

$$u_t = -\frac{1}{\tau}u + u_{xx} + H(u-h) \qquad H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$h>0$: یک مقدار ثابت

$$u(x,t) = V(x-ct) \Rightarrow -c V_\xi = \frac{-1}{\tau}V + V_{\xi\xi} + H(V-h)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_\xi = W \\ W_\xi = \frac{1}{\tau}V - cW - H(V-h) \end{cases}$$

میدان ناپیوسته است و نقاط بحرانی $(0,0)$ ، $(V,W)=(\tau,0)$ اگر $\tau>h$ ، $0<h<\tau$

هر جواب Travelling Wave با یک انتقال نیز همچنان جواب Travelling Wave است. پس می‌توان فرض کرد

$$V(0)=h , \quad \begin{cases} V(\xi) > h & \xi > 0 \\ V(\xi) < h & \xi < 0 \end{cases}$$

$$\xi>0 \Rightarrow \quad V_{\xi\xi}+cV_\xi-\frac{V}{\tau}+1=0 \Rightarrow V(\xi)=Ae^{r_1\xi}+Be^{r_2\xi}+\tau$$

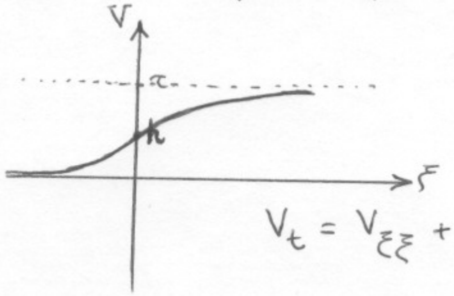
$$r_{1,2}=\frac{-c\pm\sqrt{c^2+4\varepsilon}}{2} \qquad \varepsilon=\frac{1}{\tau}$$

$$\xi<0 \Rightarrow \quad V_{\xi\xi}+cV_\xi-\frac{V}{\tau}=0 \quad\Rightarrow V(\xi)=Ce^{r_1\xi}+De^{r_2\xi}$$

$\lim_{\xi\to-\infty}V(\xi)=0,\ \lim_{\xi\to+\infty}V(\xi)=\tau,\ V(0)=h$ باید $V(\xi), V'(\xi)$ در $\xi=0$ پیوسته باشند، به علاوه

$D=A=0 \qquad h=V(0)=B+\tau=C$

$$V'(0)=r_1C=r_2B \quad\Rightarrow (r_1-r_2)h=-r_2\tau$$



$$\Rightarrow \sqrt{c^2+4\varepsilon}\ h=\tau\left(\frac{+c+\sqrt{c^2+4\varepsilon}}{2}\right) \Rightarrow c=?$$

$$V_t=V_{\xi\xi}+cV_\xi-\frac{1}{\tau}V+H(V-h)$$

پایداری جواب :

$$u_t=u_{\xi\xi}+cu_\xi-\frac{1}{\tau}u+\delta(V-h)u$$

$V^{-1}(h)=\{\xi_1,\dots,\xi_n\}$ اگر $\delta(V(\xi)-h)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta(\xi)}{|V'(\xi_i)|}$

$$\mathcal{L}u=u_{\xi\xi}+cu_\xi-\frac{1}{\tau}u+\frac{\delta(\xi)}{|V'(0)|}u$$

$$\mathcal{L}u=\lambda u \Rightarrow Qu=\frac{\delta(\xi)}{|V'(0)|}u \quad, Q=-\partial_{\xi\xi}-c\partial_\xi+\left(\lambda+\frac{1}{\tau}\right)$$

$u(\xi)=\eta*\left[\frac{\delta(\xi)}{|V'(0)|}u\right]=\frac{\eta(\xi)}{|V'(0)|}u(0)\Leftarrow$ اگر $\eta(\xi)$ تابع گرین عملگر Q باشد

$\varepsilon=\frac{1}{\tau},\qquad (x^2-icx+\lambda+\varepsilon)\hat{\eta}=1 \quad \xLeftarrow{\text{تبدیل فوریه}} Q\eta=\delta \qquad$: * محاسبه تابع η

$$\eta(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix\cdot\xi}\,dx}{x^2-icx+\lambda+\varepsilon}=\frac{1}{K_+(\lambda)-K_-(\lambda)}\begin{cases}e^{K_-(\lambda)\xi} & \xi\ge 0\\ e^{K_+(\lambda)\xi} & \xi<0\end{cases}$$

$$K_\pm(\lambda)=\frac{-c\pm\sqrt{c^2+4(\lambda+\varepsilon)}}{2}$$

$$u(\xi)=\eta(\xi)\frac{u(0)}{|V'(0)|} \overset{\xi=0}{\Rightarrow} D(\lambda)=\frac{\eta(0)}{|V'(0)|}-1=0 \longrightarrow \text{Evans Function}$$

$$\Rightarrow D(\lambda)=\frac{\sqrt{c^2+4\varepsilon}}{\sqrt{c^2+4(\lambda+\varepsilon)}}-1 \quad, D(0)=0,\ D'(0)\neq 0$$