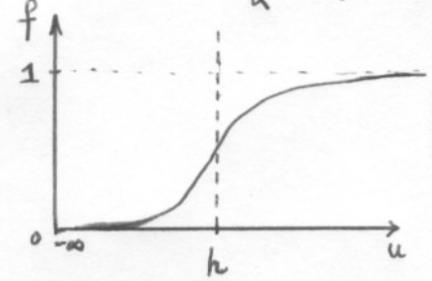
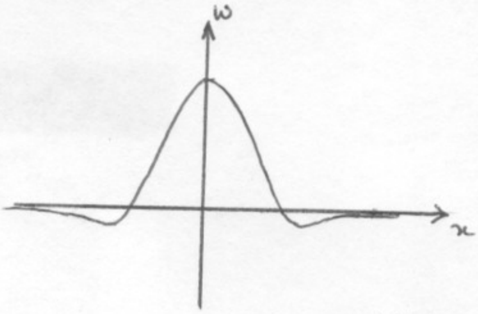
①

Neural Field Theory

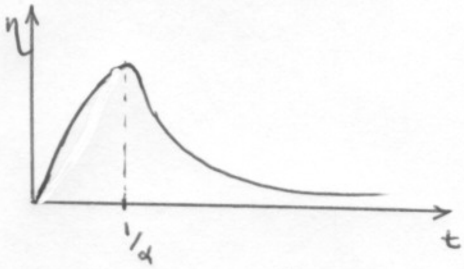
$$\frac{1}{\alpha} u_t(x,t) = -u(x,t) + \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(x-y)\, f(u(y,t))\, dy$$

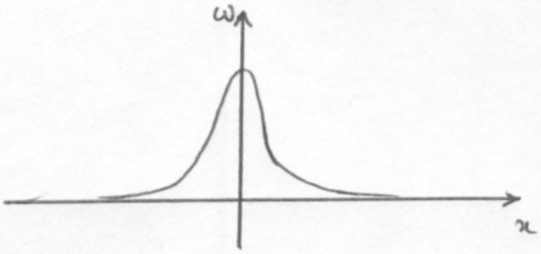




$f(u) = \dfrac{1}{1+e^{-\beta(u-h)}}$ یا $f(u) = H(u-h)$

$\omega(x) = \dfrac{1-|x|}{4} e^{-|x|}$ Mexican hat





$\eta(t) = \alpha^2 t e^{-\alpha t}$

$\omega(x) = \dfrac{e^{-|x|}}{2}$

$$Q = 1 + \alpha^{-1}\partial_t \Rightarrow Qu = (\omega \otimes f\circ u)(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(x-y)\, f(u(y,t))\, dy$$

به شرط آغازی $u(x,0)=0$. $\Rightarrow u(x,t) = \int_0^t \alpha e^{-\alpha s} (\omega \otimes f)(x, t-s)\, ds$

$$\eta(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{u = \eta * \omega \otimes f\circ u}$$

Synaptic processing kernel

$$(\eta * f)(x,t) = \int_0^t \eta(s)\, f(x, t-s)\, ds$$

گزینه دیگر برای η، $\eta(t) = \alpha^2 t e^{-\alpha t} \leftarrow Q = (1+\alpha^{-1}\partial_t)^2$

نکته: $\Psi(x,t) = \omega \otimes f\circ u \Leftarrow \hat{\Psi} = \hat{\omega}\,(f\circ u)^\wedge$

* اگر $\omega(x) = \frac{e^{-|x|}}{2} \Rightarrow \hat{\omega}(z) = \frac{1}{1+z^2} \Rightarrow (1+z^2)\hat{\Psi} = (f\circ u)^\wedge \Rightarrow \Psi - \partial_{xx}\Psi = f\circ u$

$$\Downarrow$$

$$(1-\partial_{xx})(1+\alpha^{-1}\partial_t)u = f\circ u$$

* $\omega(x) = \frac{1-|x|}{4} e^{-|x|} \Rightarrow \hat{\omega}(z) = \frac{z^2}{(1+z^2)^2} \Rightarrow (1+z^2)^2 \hat{\Psi} = z^2 (f\circ u)^\wedge \Rightarrow$ ؟

جواب Steady State

$$\frac{1}{\alpha}u_t=-u+\omega\otimes(f\circ u)$$

$$u(x,t)=\bar u \quad\Rightarrow\quad \bar u=\int_{-\infty}^{+\infty}\omega(x-y)\,f(\bar u)\,dy=k\,f(\bar u)$$

$$k=\int_{-\infty}^{+\infty}\omega(y)\,dy$$

خطی سازی در $u(x,t)=\bar u$:

$$\frac{1}{\alpha}u_t=-u+\int_{-\infty}^{+\infty}\omega(x-y)\,f'(\bar u)\,u(y,t)\,dt$$

$$f'(\bar u)=\gamma \Rightarrow \frac{1}{\alpha}u_t=-u+\gamma(\omega\otimes u)=\mathcal{L}u$$

* بررسی نقاط ویژه:

$$\mathcal{L}u=\lambda u$$

تبدیل فوریه $\Rightarrow$ $-\hat u+\gamma\hat\omega\hat u=\lambda\hat u \Rightarrow [\gamma\hat\omega-1-\lambda]\hat u=0$

اگر برای هر $z\in\mathbb{R}$ ، $\lambda\neq\gamma\hat\omega(z)-1$ آنگاه $\hat u(z)=0 \Leftarrow u=0$.

$$\sigma_p(\mathcal{L})\subseteq\{\lambda\in\mathbb{C} : \lambda=\gamma\hat\omega(z)-1 \text{ ، برای یک مقدار } z\in\mathbb{R}\}$$

برعکس برای هر $z\in\mathbb{R}$ ، $u(x)=e^{izx}$ یک تابع ویژه متناظر مقدار ویژه $\lambda=\gamma\hat\omega(z)-1$ است.

$$\sigma_p(\mathcal{L})=\{\lambda\in\mathbb{C} : \lambda=\gamma\hat\omega(z)-1 \text{ ، } z\in\mathbb{R}\}$$

* بررسی σ_{ess} :

$$(\mathcal{L}-\lambda I)u=h$$

$$\Rightarrow -\hat u+\gamma\hat\omega\hat u-\lambda\hat u=\hat h \Rightarrow$$

مشابه نکته صفحه قبل ω باید در یک معادله با ضرایب ثابت صدق کند مثلاً برای $\omega=\frac{e^{-|x|}}{2} \Leftarrow \hat\omega=\frac{1}{1+z^2}$

$$\Rightarrow \gamma\hat u-(1+\lambda)(1+z^2)\hat u=(1+z^2)\hat h \Rightarrow \gamma u-(1+\lambda)(1-\partial_{xx})u=(1-\partial_{xx})h$$

اگر معادله همگن $\gamma u-(1+\lambda)(1-\partial_{xx})u=0$ تنها جواب صفر داشته باشد، آنگاه معادله ناهمگن

$$\gamma u-(1+\lambda)(1-\partial_{xx})u=g$$

برای هر تابع g جواب دارد. در این صورت $\lambda\in\rho(\mathcal{L})$ خواهد بود. بنابراین $\sigma_{ess}=\phi$ و

$$Spec(\mathcal{L})=\sigma_p(\mathcal{L})$$

$$Spec(\mathcal{L}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = \gamma \hat{\omega}(z) - 1\}$$

بررسی پایداری :

شرط پایداری $\gamma \hat{\omega}(z) < 1$ برای هر $z \in \mathbb{R}$.

اگر $\max \hat{\omega}(z) = \hat{\omega}_{max}$

- برای $\gamma < \frac{1}{\hat{\omega}_{max}}$ ، $u(x,t) = \bar{u}$ پایدار جهانی است .
- برای $\gamma = \frac{1}{\hat{\omega}_{max}}$ ، ناپایدار است و pattern هایی به صورت $e^{\pm i z_c x}$ ظاهر می‌شود.

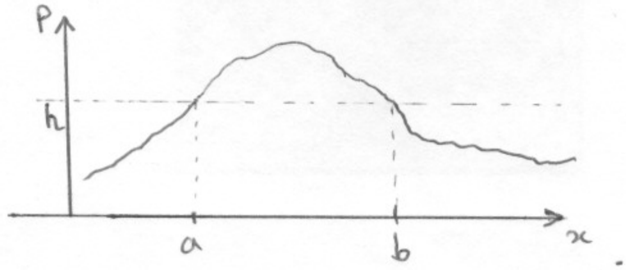
که $\hat{\omega}(\pm z_c) = \hat{\omega}_{max}$.

✓ برای $z_c = \pm 1 \Leftarrow \hat{\omega} = \frac{z^2}{(1+z^2)^2} \Leftarrow \omega(x) = \frac{1-|x|}{4} e^{-|x|}$

✓ برای bulk instability $\Leftarrow z_c = 0 \Leftarrow \hat{\omega} = \frac{1}{1+z^2} \Leftarrow W(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}$

Bumps

اگر h آستانه تأثیر نقطه y در نقطه x باشد، یک جواب 1-bump ، تابعی شکل $u(t,x) = p(x)$ است که $p(x) > h$ در یک بازه $[a,b]$ و در بقیه نقاط $p(x) < h$.



همینطور یک N-bump جوابی است که در N بازه مجزا، از آستانه تحریک بزرگتر باشد.

مثال -

$$u_t = -u + \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(x-y)\, H(u(t,y)-h)\, dy$$

فرض کنید $p(x)$ یک جواب 1-bump باشد که در بازه $[-a,a]$ ، $p(x) > h$ ،

$$p(a) = p(-a) = h$$

$$\Rightarrow \quad p(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(x-y)\, H(p(y)-h)\, dy = \int_{-a}^{a} \omega(x-y)\, dy$$

$$W(x) = \int_0^x \omega(y)\,dy \quad \Rightarrow \quad p(x) = W(x+a) - W(x-a)$$

باید a در شرایط تابع p صدق کند.

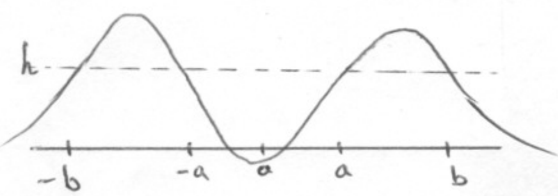
$$p(a)=h \quad \Rightarrow \quad W(2a)=h$$

اگر $\omega(x)$ تابع زوج باشد شرط دیگر $p(-a)=h$ متناظر شرط $-W(-2a)=h$ است که با شرط فوق یکسان خواهد بود.

به عنوان مثال اگر $\omega(x) = Ke^{-|x|} \Leftarrow W(x) = K(1-e^{-x})$ برای $x>0$

$$W(2a)=h \quad \Rightarrow \quad e^{-2a} = 1 - \frac{h}{K}$$

به شرط $h<K$ تنها یک جواب 1-bump وجود خواهد داشت.



بررسی 2-bump :

$$p(x) > h \qquad x \in [a,b] \cup [-b,-a]$$

$$p(x) = \int_{-b}^{-a} \omega(x-y)\,dy + \int_a^b \omega(x-y)\,dy = W(x+b) - W(x+a) + W(x-a) - W(x-b)$$

برای $\omega(x) = Ke^{-|x|}$ جواب به صورت 2-bump وجود ندارد.

$$h = p(a) = W(a+b) - W(2a) - W(a-b)$$
$$h = p(b) = W(2b) - W(a+b) + W(b-a)$$

$$\Rightarrow W(2a) + W(2b) = 2\,W(a+b)$$

$$e^{-2a} + e^{-2b} = 2\,e^{-(a+b)}$$

$$\Rightarrow (e^{-a} - e^{-b})^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a=b$$

بررسی پایداری 1-bump :

$$\mathcal{L}u = -u + \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(x-y)\, \delta(p(y)-h)\, u(y)\, dy \qquad \delta(p(y)-h) = \frac{\delta(y-a)}{|p'(a)|} + \frac{\delta(y+a)}{|p'(-a)|}$$

$$\mathcal{L}u = -u + \frac{\omega(x-a)u(a)}{|p'(a)|} + \frac{\omega(x+a)u(-a)}{|p'(-a)|}$$

$$\mathcal{L}u = \lambda u \Rightarrow (\lambda+1)\, u(x) = \frac{\omega(x-a)u(a)}{|p'(a)|} + \frac{\omega(x+a)u(-a)}{|p'(-a)|}$$

$$x = \pm a \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} \frac{\omega(0)}{|p'(a)|} & \frac{\omega(2a)}{|p'(-a)|} \\ \frac{\omega(-2a)}{|p'(a)|} & \frac{\omega(0)}{|p'(-a)|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(a) \\ u(-a) \end{bmatrix} = (\lambda+1) \begin{bmatrix} u(a) \\ u(-a) \end{bmatrix}$$

$$p(x) = W(x+a) - W(x-a) \Longrightarrow p'(x) = \omega(x+a) - \omega(x-a)$$

$$\Longrightarrow |p'(a)| = |p'(-a)| = |\omega(2a) - \omega(0)| = h$$

$$\Longrightarrow \det \begin{bmatrix} \frac{\omega(0)}{h} - (\lambda+1) & \frac{\omega(2a)}{h} \\ \frac{\omega(2a)}{h} & \frac{\omega(0)}{h} - (\lambda+1) \end{bmatrix} = 0$$

Evans Function

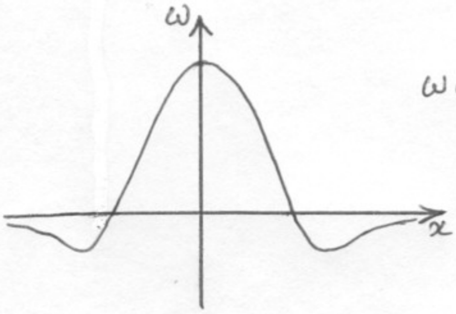
$$\Rightarrow \left[\frac{\omega(0) - \omega(2a)}{h} - (\lambda+1)\right]\left[\frac{\omega(0) + \omega(2a)}{h} - (\lambda+1)\right] = 0$$

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{L}) = \left\{ \frac{\omega(0) - \omega(2a)}{h} - 1 \,,\; \frac{\omega(0) + \omega(2a)}{h} - 1 \right\}$$

$$= \left\{ 0, \frac{1+e^{-2a}}{1-e^{-2a}} \right\}$$

تمرین- بررسی وجود و پایداری 1-bump برای حالت $\omega(x) = \frac{1-|x|}{4} e^{-|x|}$.

مثال- $u_t = -u + \int_{-\infty}^{+\infty} w(x-y)\, H(u(y,t))\, dy + h$

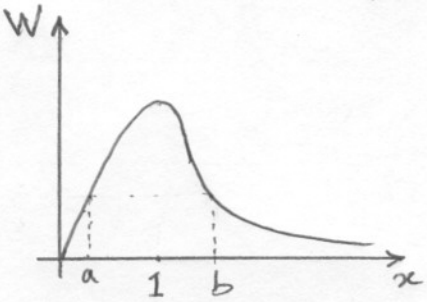


$$w(x) = (1-|x|)e^{-|x|}$$

بررسی 2-bump :

تنها برای $a<|x|<b$ ، $p(x)>0$

$$p(x) = \int_{-b}^{-a} + \int_{a}^{b} w(x-y)\, dy + h$$



$$= W(x+b) - W(x+a) + W(x-a) - W(x-b) + h$$

$$W(x) = \int_0^x w(y)\, dy = x e^{-x}$$

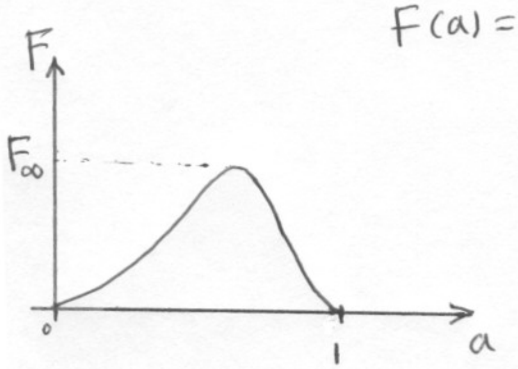
$$\begin{cases} 0 = p(a) = W(a+b) - W(2a) - W(a-b) + h \\ 0 = p(b) = W(2b) - W(a+b) + W(b-a) + h \end{cases}$$

$$\Rightarrow W(2a) + W(2b) = 2\,W(a+b) \Rightarrow W(a) = W(b)$$

برای هر مقدار $0<a<1$ ، دقیقاً یک مقدار $b_a > 1$ وجود دارد که رابطهٔ بالا برقرار باشد.

وقتی $a \to 0$ ، $b_a \to +\infty$ و وقتی $a \to 1$ ، $b_a \to 1$. برای اینکه یک 2-bump وجود داشته باشد

باید: $F(a) = W(a+b_a) - W(2a) - W(a-b_a) = -h$



$$F_\infty = \max_{0<a<1} F(a)$$

نتیجه: برای هر مقدار $-F_\infty < h < 0$ ، حداقل دو جواب 2-bump وجود دارد. برای $h = -F_\infty$ دقیقاً یک جواب 2-bump داریم.

بررسی پایداری : $= -u + \sum_{y=\pm a, \pm b} w(x-y)\frac{u(y)}{|p'(y)|} \Longleftarrow \mathcal{L}u = -u + \int_{-\infty}^{+\infty} w(x-y)\,\delta(p(y))\,u(y)\, dy$

(۷)

$$\mathcal{L}u = \lambda u \implies (\lambda+1)u(x) = \sum_{y=\pm a, \pm b} \omega(x-y)\,\frac{u(y)}{|p'(y)|}$$

$$|p'(\pm a)| = |\omega(a+b) - \omega(2a) + \omega(0) - \omega(b-a)|$$

$$|p'(\pm b)| = |\omega(2b) - \omega(b+a) + \omega(b-a) - \omega(0)|$$

$$x = \pm a, \pm b \implies (\lambda+1)\begin{bmatrix} u(a) \\ u(-a) \\ u(b) \\ u(-b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\omega(0)}{|p'(a)|} & \frac{\omega(2a)}{|p'(-a)|} & \frac{\omega(b-a)}{|p'(b)|} & \frac{\omega(a+b)}{|p'(-b)|} \\ \frac{\omega(2a)}{|p'(a)|} & \frac{\omega(0)}{|p'(-a)|} & \frac{\omega(a+b)}{|p'(b)|} & \frac{\omega(b-a)}{|p'(-b)|} \\ \frac{\omega(b-a)}{|p'(a)|} & \frac{\omega(b+a)}{|p'(-a)|} & \frac{\omega(0)}{|p'(b)|} & \frac{\omega(2b)}{|p'(-b)|} \\ \frac{\omega(b+a)}{|p'(a)|} & \frac{\omega(b-a)}{|p'(-a)|} & \frac{\omega(2b)}{|p'(b)|} & \frac{\omega(0)}{|p'(-b)|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(a) \\ u(-a) \\ u(b) \\ u(-b) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \omega(0) & \omega(2a) \\ \omega(2a) & \omega(0) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \omega(b-a) & \omega(a+b) \\ \omega(a+b) & \omega(b-a) \end{bmatrix}$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{|p'(a)|} \qquad \gamma_2 = \frac{1}{|p'(b)|}$$

Evans Function $\longrightarrow$ $$D(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} \gamma_1 A & \gamma_2 B \\ \gamma_1 B & \gamma_2 A \end{bmatrix} - (\lambda+1)I\right)$$

$$= \det\left[(\gamma_1 A - (\lambda+1)I)(\gamma_2 A - (\lambda+1)I) - \gamma_1\gamma_2 B^2\right]$$

$$= \det\left[\gamma_1\gamma_2(A^2 - B^2) - (\gamma_1+\gamma_2)(\lambda+1)A + (\lambda+1)^2 I\right]$$

برای پایداری باید $\lambda=0$ تکرر ۱ داشته باشد و بقیه مقادیر ویژه در شرط $Re\,\lambda<0$ صدق کنند.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u(x,t) + \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(x-y)\, f(u(y,t))\, dy$$

$$f(u) = \frac{1}{1+e^{-\beta(u-h)}}$$

- ω یک تابع مثبت، زوج و مشتق‌پذیر که $\int_{-\infty}^{+\infty} \omega(y)\,dy = 1$.

- $F(u) = f(u) - u$ دارای سه ریشه $u = A_\pm, A_0$ است که $A_- < A_0 < A_+$، $F'(A_\pm) < 0$.

با شرایط بالا، معادله دارای جواب یکتای Wave Front، مثل $u(x,t) = V(x-ct)$ است که

$V(\xi) \longrightarrow A_\pm$ وقتی $\xi \to \mp\infty$

به علاوه $C = \dfrac{\int_{A_-}^{A_+} F(u)\,du}{\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 f(u)\,du}$.

مرجع: Ermentrout, G.B., and McLeod, J.B., Existence and uniqueness of travelling waves for a neural network. Proc. Roy. Soc. Edin. A, 123: 461-478, 1993.

مدل $\beta \longrightarrow +\infty$. $\quad f(u) = H(u-h) \quad\quad u(x,t) = V(x-ct)$

$$V(0) = h, \quad V(\xi) < h \quad \xi > 0$$
$$V(\xi) > h \quad \xi < 0$$

$$-cV_\xi + V = \int_{-\infty}^{0} \omega(\xi-\eta)\,d\eta = \int_{\xi}^{+\infty} \omega(\eta)\,d\eta =: W(\xi)$$

$$\Rightarrow V(\xi) = h e^{\xi/c} - \frac{1}{c}\int_0^{\xi} e^{\frac{\xi-\eta}{c}}\, W(\eta)\,d\eta$$

باید وقتی $\xi \to \pm\infty$، $V(\xi)$ کران‌دار باشد. برای $c>0$، وقتی $\xi \to +\infty$ تنها در صورتی $V(\xi)$ کران‌دار است که

$$h = \frac{1}{c}\int_0^{\infty} e^{-\eta/c}\, W(\eta)\,d\eta$$

اگر $c>0$ وقتی $\xi \to -\infty$ ، $V(\xi)$ تنها در صورتی کران دار است که

$$h = \frac{1}{-c}\int_0^{+\infty} e^{+\frac{\eta}{c}}\, W(-\eta)\, d\eta$$

اگر $\omega(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$ آنگاه

$$W(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-x} & x>0 \\ 1-\frac{1}{2} e^{+x} & x<0 \end{cases}$$

برای $c>0$: $h = \frac{1}{2(1+c)} \Leftarrow h<\frac{1}{2}$ ، $V(-\infty)=1\ ,\ V(+\infty)=0$

برای $c<0$: $h = \frac{1-2c}{2(1-c)} \Leftarrow h>\frac{1}{2}$ ، $V(-\infty)=1\ ,\ V(+\infty)=0$

بررسی پایداری:

$$u_t = -u(x,t) + \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(x-y)\, H(u(y,t)-h)\, dy$$

$$u(x,t) = \tilde{V}(x-ct,t)$$

$$\tilde{V}_t - c\tilde{V}_\xi = -\tilde{V} + \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(x-y)\, H(\tilde{V}(y-ct,t)-h)\, dy$$

$$= -\tilde{V} + \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(\xi-\eta)\, H(\tilde{V}(\eta,t)-h)\, d\eta$$

$V(\xi)$ جواب Travelling Wave است و با خطی سازی حول این جواب معادله خطی زیر را خواهیم داشت:

$$u_t = \mathcal{L}u \quad , \quad \mathcal{L}u = c u_\xi - u + \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(\xi-\eta)\, \delta(V(\eta)-h)\, u(\eta)\, d\eta$$

$$\mathcal{L}u = c u_\xi - u + \frac{\omega(\xi)}{|V'(0)|} u(0)$$

$$\mathcal{L}u = \lambda u \Rightarrow c u_\xi - (1+\lambda) u = \frac{\omega(\xi)}{|V'(0)|} u(0)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi}\left(e^{-(\frac{1+\lambda}{c})\xi} u(\xi)\right) = -\frac{1}{c} e^{-(\frac{1+\lambda}{c})\xi} \frac{\omega(\xi)}{|V'(0)|} u(0)$$

برای $\frac{Re\lambda+1}{c}>0 \Rightarrow$ انتگرالگیری از رابطه بالا روی بازه $[\xi,+\infty)$

$$-e^{(\frac{1+\lambda}{c})\xi} u(\xi) = \frac{-u(0)}{c|V'(0)|}\int_\xi^{+\infty} e^{-(\frac{1+\lambda}{c})\eta}\, \omega(\eta)\, d\eta$$

$$\xi=0 \Rightarrow \overset{+}{\mathcal{E}}(\lambda) = 1 - \frac{1}{c|V'(0)|}\int_0^{+\infty} e^{-(\frac{1+\lambda}{c})\eta}\, \omega(\eta)\, d\eta = 0$$

انتگرال‌گیری روی بازه $(-\infty, \xi]$ $\Leftarrow$ برای $\frac{Re\lambda+1}{c}<0$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{E}^-(\lambda) = 1 + \frac{1}{c|V'(0)|}\int_{-\infty}^{0} w(\eta)\, e^{-(\frac{1+\lambda}{c})\eta}\, d\eta$$

ریشه‌های $\mathcal{E}^+(\lambda)=0$ در $\frac{Re\lambda+1}{c}>0$ و ریشه‌های $\mathcal{E}^-(\lambda)=0$ در $\frac{Re\lambda+1}{c}<0$ مقادیر ویژه $\mathcal{L}$ را می‌دهند. $\sigma_{ess}(\mathcal{L})$ برابر $\sigma_{ess}(cu_\xi - u)$ است که تهی می‌باشد.

برای $w(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$ و برای $c>0$ ، $(h<\frac{1}{2})$ ، مقادیر ویژه در نیم‌صفحه $-1<Re\lambda$ ریشه‌های

$$\mathcal{E}^+(\lambda) = 1 - \frac{1+c}{1+\lambda+c}$$

و برای $c<0$ ، $(h>\frac{1}{2})$ ریشه‌های $\mathcal{E}^-(\lambda) = 1 + \frac{1-c}{1+\lambda+c}$ خواهند بود.

بنابراین تنها مقدار ویژه در نیم‌صفحه $-1<Re\lambda$ ، $\lambda=0$ با تکرر یک است. بنابراین جواب پایدار است.

تمرین: وجود و پایداری جواب Travelling Wave را برای حالت $w(x)=\frac{(1-|x|)e^{-|x|}}{4}$ بررسی کنید.

تمرین: برای $w(x)=\frac{e^{-|x|}}{2}$ جوابی را پیدا کنید که $V(+\infty)=1$ ، $V(-\infty)=0$ و پایداری آن را بررسی کنید.

مراجع:

1- Bressloff, P.C., Lectures in mathematical neuroscience, chapter 5, 77-99.

2- Terman, D.H., and Ermentrout, G.B., book?, chapters 7, 13.

3- Sandstede, B., Stability of travelling Waves.

4- Coombes, S., Neural Field, Scholarpedia.