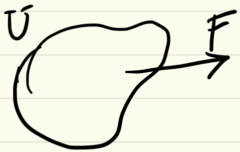
مباحث در آنالیز

جلسه اول ۹۶/۱۱/۱۵

مدل Reaction-Diffusion



$\int_U u(x,t)\,dx =$ کل جمعیت در ناحیه U

$\frac{d}{dt}\int_U u(x,t)\,dx =$ جمعیت تولید شده در U − جمعیت که از ∂U خارج شود.

$$= \int_U f(x,t)\,dx - \int_{\partial U} F\cdot\vec{n}\,ds$$

$$= \int_U \left(f(x,t) - \operatorname{div} F\right)dx$$

U دلخواه $\Rightarrow$ $\boxed{u_t + \operatorname{div} F = f}$ مدل واکنش-انتشار

اگر فرض شار F همواره از نقاط پرجمعیت به سمت نقاط کم جمعیت است.

$$F(x,t) = -\alpha(x,t)\nabla u(x,t) \qquad \alpha > 0$$

$$u_t - \mathrm{div}(\alpha \nabla u) = f$$

حالت کلی :

$$u_t - \mathrm{div}(A(x) \nabla u) = f$$

که A یک ماتریس $n \times n$ است. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $u : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

حال تعادل مدل واکنش ـ انتشاری حالتی است که $u_t = 0$ یعنی u در رابطه

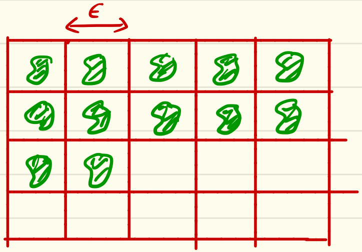
$$-\mathrm{div}(A(x) \nabla u) = f \quad \text{in } \Omega$$

منظور از جواب تابعی است که در رابطه زیر صدق کند :

$$\int_\Omega (A(x) \nabla u) \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f \varphi \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

جواب ضعیف .

مثال: (Composite) فرض کنید دو ماده مختلف با رسانایی (گرمایی یا الکتریکی) α و β با هم ترکیب شده اند. و همچنین فرض کنید ماده α به نسبت λ و β مقدار $(1-\lambda)$ ترکیب شده باشد.



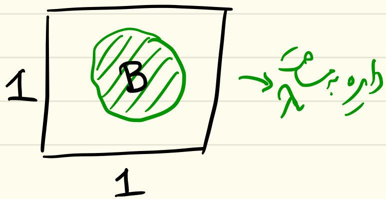
سؤال: رسانایی ماده جدید چقدر است؟

$$u_t - \operatorname{div}(a(x)\nabla u) = f$$

$a(x)$ در نقاط سبز رنگ برابر α است و خارج آن β.

فرض کنید $b(x)$ یک تابع تناوبی در صفحه باشد با دوره تناوب یک یعنی

$$b(x+e_1) = b(x+e_2) = b(x) = \alpha\chi_B + \beta - \alpha$$



$$a(x) = b\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$$

در این مدل تو‌رینی به ازای هر ϵ معادله

$$u^\epsilon_t - \operatorname{div}\left(b\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\nabla u^\epsilon\right) = f$$

را داریم. برای پیدا کردن رسانایی ماده جدید باید حالت حدی $\epsilon \to 0$ را پیدا کرد.

سؤال: (۱) آیا $\{u^\epsilon\}$ همگرا می‌شوند وقتی $\epsilon \to 0$؟ و در چه فضای همگرایی اتفاق می‌افتد؟

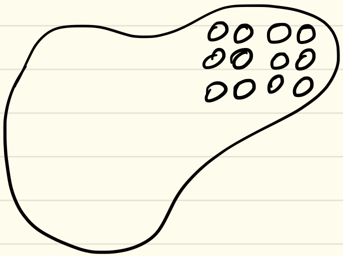
(۲) اگر $u^\epsilon \longrightarrow u^0$، u^0 در چه معادله‌ای صدق می‌کند؟ آیا رابطه

$$\partial_t u^0 - \operatorname{div}\left(a_0(x)\nabla u^0\right) = f$$

به ازای تابع a_0 برقرار است؟

(۳) تابع a_0 به عنوان رسانایی ماده جدید چگونه محاسبه می‌شود؟

مثال ۲ : فضای متخلخل : فرض کنید حفره‌های کروی با شعاع ϵ در دامنه اتفاق می‌افتند. در خارج این حفره‌ها ماده با ضریب انتشار α حرکت می‌کند.



Ω

$$\partial_t u - \mathrm{div}\left(a_\epsilon(x) \nabla u\right) = f \quad \text{in} \quad \Omega_\epsilon$$

$$a_\epsilon(x) = a\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$$

$$a : [0,1]^3 \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad a(x) = \alpha \chi_{B^c}$$

B حفره داخل مکعب است.

$$\Omega^\epsilon = \Omega \setminus Q^\epsilon$$

همه حفره‌ها $Q^\epsilon = \left\{ \epsilon(j+B) \ : \ j \in \mathbb{Z}^3 \right\}$

مشابه مثال قبل سؤالاتی درخصوص همگرایی جواب مطرح است.

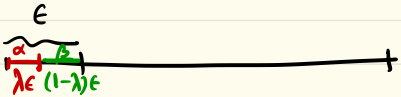
مثال ۳_ در حالت یک بعدی وقتی a دارای تناوب یک باشد، و قرار دهید

$$\frac{1}{\bar{a}} = \int_0^1 \frac{dx}{a(x)}$$

خواهیم دید که اگر $-\left(a\left(\frac{x}{\epsilon}\right) u^\epsilon_x\right)_x = f$ آنگاه $u^\epsilon \longrightarrow u^0$ که

$$-\left(\bar{a}\, u^0_x\right)_x = f$$

در مثال مواد مرکب رسانایی ماده جدید برابر است با



$$\bar{a} = \left(\frac{\lambda}{\alpha} + \frac{1-\lambda}{\beta}\right)^{-1}$$

مثال۴: (مسأله Jacques-Louis Lions)

$$\inf\left(J(a) = \int_0^1 |y - z_d|^2\, dx\right)$$

که y جواب معادله

$$-\frac{d}{dx}\left(a\frac{dy}{dx}\right) + ay = f \quad \text{in } (0,1)$$

$y(0)$, $y(1)$ مشخص شده اند.

$$a \in \mathcal{A}_{ad} = \{a \mid a \in L^\infty(0,1) \text{ و } \alpha \le a \le \beta \ \text{a.e. in } (0,1)\}$$

مقدار اینفیمم صفر است و برای $z_d(x) = 1 + x^2$ و $f=0$ مینیمم خود را اخذ نمی کند.

برای اینکه مینیمم اخذ شود باید $y = z_d$ در معادله بالا صدق کند یعنی

$$-\frac{d}{dx}(2xa) + a(1+x^2) = 0 \implies a(x) = \frac{c}{\sqrt{x}}\exp\left(\frac{x^2}{4}\right) \notin \mathcal{A}_{ad}$$

$$a^n(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{6}} & x \in \left(\frac{2k}{2n}, \frac{2k+1}{2n}\right) \quad k=0,\dots,n-1 \\ 1 + \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{6}} & x \in \left(\frac{2k+1}{2n}, \frac{2k+2}{2n}\right) \quad k=0,\dots,n-1 \end{cases}$$

جواب متناظر a^n را y^n بنامید. برای اینکه $J(a^n) \to 0$ کافیست $y^n \to z_d$ در $L^2(0,1)$

بنابر مثال ۳ دنباله y^n به y^∞ همگراست که y^∞ جواب معادله زیر است:

$$-\frac{d}{dx}\left(a^- \frac{dy^\infty}{dx}\right) + a^+ y^\infty = 0 \quad \text{in } (0,1)$$

$$a_n \longrightarrow a^+ = \int_0^1 a^n(x)\,dx = 1$$

$$\frac{1}{a^n(x)} \longrightarrow \frac{1}{a^-}, \quad a^-(x) = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{6}$$

مباحثی در آنالیز

جلسه دوم ۱۷/۱۱/۹۵

فضای باناخ X . فضای برداری نرم دار کامل روی میدان $\mathbb{R}$

همگرایی قوی : $x_n \longrightarrow x$ هرگاه $\|x_n - x\|_X \longrightarrow 0$

دوگان X که با X' نشان می‌دهیم : $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ خطی

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$f(rx) = rf(x)$$

f پیوسته است $\Longleftrightarrow$ f کران‌دار باشد یعنی

$$\|f\|_{X'} := \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_X} < \infty$$

X' با نرم $\|\cdot\|_{X'}$ یک فضای باناخ است حتی اگر X باناخ نباشد.

توپولوژی ضعیف: ضعیف‌ترین توپولوژی روی X که همه نگاشت‌های خطی کران‌دار پیوسته باشند.

$$x_n \xrightarrow{\omega} x \iff \forall f \in X' \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

همگرایی قوی $\Longrightarrow$ همگرایی ضعیف

برعکس درست نیست.

نکته: در فضای بعد متناهی هر دو توپولوژی ضعیف و قوی یکی هستند.

مثال $f_n(x) = \sin nx \in L^2(0,2\pi) \Leftarrow$ پس $\|f_n\|_{L^2} = \sqrt{\pi}$ ولی $f_n \not\to 0$

$f_n \longrightarrow 0$ زیرا برای هر $g \in L^2(0,2\pi)$ داریم $\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} g(x)\sin nx\,dx = 0$

(به علت آنالیز فوریه)

گزاره ۱: اگر X فضای باناخ آنگاه برای دنباله همگرای ضعیف $x_n \rightharpoonup x$ داریم:

(۱) دنباله $\{x_n\}$ کراندار است یعنی ثابت $C>0$ وجود دارد که

$$\|x_n\|_X \leq C$$

(۲)
$$\|x\|_X \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_X$$

نرم نسبت به توپولوژی ضعیف نیم پیوسته پایینی است.

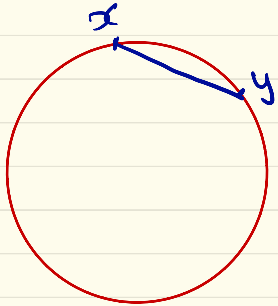
نکته: هر مجموعه محدب و بسته نسبت به توپولوژی قوی $\Leftarrow$ نسبت به توپولوژی ضعیف نیز بسته است.

فرض کنید $x_n \rightharpoonup x$ ، A را وارد هید بستار پوشش محدب مجموعه $\{x_n\}$ بنابر مطلب فوق

A نسبت به توپولوژی ضعیف بسته است $\Leftarrow$ $x\in A$.

$$K \text{ پوش محدب } = \left\{ y = \alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_n z_n \;\middle|\; \begin{matrix} \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1 \\ z_i \in K \end{matrix} \right\}$$

نتیجه این خواهد بود که یک ترکیب محدب دنباله $\{x_n\}$ به x همگرای قوی است.



تعریف: فضای باناخ X را به طور یکنواخت محدب گوییم هرگاه

$$\forall \epsilon \;\exists \delta : \|x\|_X \leq 1 ,\; \|y\|_X \leq 1 ,\; \|x-y\|_X > \epsilon$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1-\delta$$

این تعریف نتیجه می دهد که به ازای هر دو نقطه x و y روی گوی واحد پاره خط واصل دقیقاً داخل گوی قرار بگیرد. (قویاً محدب)

مثال- l^1 و l^∞ یکنواخت محدب نیستند ولی به ازای $1<p<\infty$ فضاهای L^p به طور یکنواخت محدب هستند.

گزاره ۲) همواره داریم $a \Rightarrow b$

a) $x_n \longrightarrow x$

b) $\begin{cases} x_n \longrightarrow x \\ \|x_n\| \longrightarrow \|x\| \end{cases}$

اگر فضایی به طور یکنواخت محدب باشد آنگاه $a \Leftarrow b$

اثبات: $(b \Rightarrow a)$ حالت $x=0$ به وضوح همگرایی قوی از $\|x\|=0$، $\|x_n\| \to$ نتیجه می‌شود.

حالت $x\neq 0$ می‌توان فرض کرد $\|x\|=1$ و $x_n \not\to x$ پس $\epsilon>0$ وجود دارد که

$$\limsup \|x_n-x\| > \epsilon$$

داریم

$$\frac{x_n + x}{2} \longrightarrow x$$

$$\Longrightarrow 1 = \|x\| \leq \liminf \left\|\frac{x_n + x}{2}\right\| < 1 - \delta$$

این شرط ممکن است برقرار نباشد.؟ $\|x_n\| \leq 1$

$\|x\| = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \left\|\frac{x_n + x}{2}\right\| < 1 - \delta$

$\|x_n - x\| > \epsilon$

$$\|x_n\| \longrightarrow \|x\| = 1 \quad \Longrightarrow \quad \|x_n\| \leq 1 + \alpha$$

به ازای هر α به اندازه کافی کوچک رابطه از یکی به بعد برقرار است:

$$y_n = \frac{x_n}{1+\alpha} \quad , \quad y = \frac{x}{1+\alpha}$$

$$y_n \longrightarrow y \Longrightarrow \|y\| \leq \liminf \left\|\frac{y_n + y}{2}\right\|$$

$$\frac{1}{1+\alpha} < 1 - \delta$$

با انتخاب α مناسب می‌توان به تناقض رسید.

توپولوژی ضعیف * روی فضای X'.

فضای X'' فضای دوگان X'. نشاندن طبیعی $X \hookrightarrow X''$: نیز وجود دارد

$$\forall x \in X : \quad T_x : X' \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$T_x(f) := f(x)$$

به وضوح $T_x \in X''$ و

$$\|T_x\|_{X''} = \sup_{f \neq 0} \frac{T_x(f)}{\|f\|_{X'}}$$

$$= \sup_{f \neq 0} \frac{f(x)}{\|f\|_{X'}} = \|x\|_X$$

نتیجه قضیه هان - باناخ

درواقع $J(X)$ یک زیرفضای X'' است. توپولوژی ضعیف * ، ضعیف‌ترین توپولوژی روی X'

که همه تابعک‌های خطی $J(X)$ نسبت به آن پیوسته هستند.

$$f_n \xrightarrow{\;*\;} f \iff \forall x\in X \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

تعریف: اگر نگاشت $J : X \longrightarrow X''$ پوشا باشد، فضای X را بازتابی (انعکاسی) گوییم.

نکته: دقیقاً مشابه گزاره ۱ برای توپولوژی ضعیف * برقرار است.

قضیه (باناخ-آلااوغلو-بورباکی) گوی واحد بسته در X' نسبت به توپولوژی ضعیف * فشرده است.

نتیجه ۳: هر دنباله کراندار در X' زیردنباله‌ای دارد که نسبت به توپولوژی ضعیف * همگرا است.

قضیه (کاکوتانی) اگر X باناخ باشد آنگاه بازتابی است اگر و تنها اگر گوی واحد در توپولوژی ضعیف فشرده باشد.

نتیجه: هر دنباله کران دار در فضای بازتابی زیردنباله همگرای ضعیف دارد.

مثال: $(L^p)' \cong L^q$ اگر $1 \leq p < \infty$ $\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

همه L^p به ازای $1 < p < \infty$ بازتابی هستند.

معنی همگرایی ضعیف در $L^p(\Omega)$ وقتی $1 \leq p < \infty$ این است که $\quad f_n \xrightarrow{L^p} f$

هرگاه به ازای هر $g \in L^q$ داشته باشیم

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n g \, dx = \int_\Omega f g \, dx$$

توپولوژی ضعیفِ * روی L^∞ دقیقاً مشابه بالا تعریف می‌شود با این تفاوت $g \in L^1$ انتخاب می‌کنند.

نکته: اگر $1 < p < \infty$ و $f_n \xrightarrow{L^p} f$ و $\|f_n\| \to \|f\|$ آنگاه $f_n \xrightarrow{L^p} f$

(گزاره ۲)

نتیجه ۴ برای فضاهای L^p وقتی $1 < p < \infty$ برقرار است. در حالت $p = 1$ شرط زیر را باید اضافه کنیم.

تعریف ـ دنباله $\{f_n\}$ را همزمان انتگرال‌پذیر گوییم هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$، مقدار $\delta > 0$ وجود داشته باشد که

$$\int_E |f_n(x)|\, dx < \epsilon \quad \text{for any } E \subseteq \Omega \text{ s.th } |E| < \delta$$

قضیه ۵: اگر $\{f_n\}$ یک دنباله کران‌دار و همزمان انتگرال‌پذیر در $L^1(\Omega)$ باشد، آنگاه زیردنباله‌ای دارد که به طور ضعیف همگرا است.

قضیه ۶: دنباله $\{f_n\}$ در $L^p(\Omega)$ برای $1 < p < \infty$ درنظر بگیرید دو شرط زیر معادلند:
(حد کران دار است)

a) $f_n \longrightarrow f$

b) $\begin{cases} \|f_n\| \leq C \\ \int_E f_n(x)dx \longrightarrow \int_E f(x)dx \end{cases}$ $\forall E \subseteq \Omega, |E| < \infty$

اثبات - (تمرین) کافی است نشان دهید $\int_\Omega f_n g \to \int_\Omega fg$ به ازای هر $g \in L^q$.

نکته: شبیه این قضیه برای همگرایی ضعیف * روی $L^\infty(\Omega)$ برقرار است.

نکته - قضیه ۶ در حالت $p=1$ وقتی $|\Omega| < \infty$ درست است.

نکته: $f_n(x_n) \longrightarrow f(x) \Longleftarrow x_n \longrightarrow x \text{ in } X \,,\; f_n \longrightarrow f \text{ in } X'$

همچنین: $f_n(x_n) \longrightarrow f(x) \Longleftarrow x_n \xrightarrow{X} x$ و $f_n \xrightarrow{*} f$

و اگر $f_n \xrightarrow{*} f$ و $x_n \longrightarrow x$ لزوماً همواره $f_n(x_n) \longrightarrow f(x)$ برقرار نیست.

مثال: $g_n = f_n = \sin nx \in L^2(0,2\pi)$ داریم $f_n \longrightarrow 0$, $g_n \longrightarrow 0$ و

$$\int_0^{2\pi} f_n g_n \, dx = \pi \not\longrightarrow 0$$

مباحثی در آنالیز

جلسه ۳ ۹۶/۱۱/۲۴

توابع متناوب :

$$Y = [0, l_1] \times [0, l_2] \times \cdots \times [0, l_n]$$

تابع $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ را Y- متناوب گوییم هرگاه

$$f(x + l_i e_i) = f(x) \qquad 1 \leq i \leq n$$

قضیه: اگر f تابع Y- متناوب باشد و $f_\epsilon(x) = f\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ آنگاه

برای $1 \leq p < \infty$ و هر ناحیه بازو کراندار $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ داریم

$$f_\epsilon \longrightarrow M_Y(f) = \frac{1}{|Y|} \int_Y f(x)\,dx$$ به طور ضعیف در $L^p(\Omega)$

و برای $p = \infty$ همگرایی فوق ضعیف * است.

اثبات - گام اول: دنباله $\{f_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ در $L^p(\Omega)$ کران دار است.

برای $p=\infty$ واضح است چون

$$\|f_\epsilon\|_\infty = \sup \left|f\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right| = \|f\|_\infty$$

برای ϵ کوچک:

برای $1 \leq p < \infty$

$$\int_\Omega |f_\epsilon(x)|^p\,dx = \sum_{Q_i \subseteq \Omega} \int_{Q_i} |f_\epsilon(x)|^p\,dx + \sum_{Q_i' \cap \Omega \neq \emptyset} \int_{Q_i' \cap \Omega} |f_\epsilon(x)|^p\,dx$$

Q_i ها مکعب‌های انتقال یافته ϵY هستند و چون f_ϵ دوره تناوب ϵY دارد در نتیجه

$$\int_{Q_i} |f_\epsilon(x)|^p\,dx = \int_{\epsilon Y} |f_\epsilon(x)|^p\,dx = \int_Y |f(x)|^p\,\epsilon^n\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \|f_\epsilon\|^p_{L^p(\Omega)} = \epsilon^n \cdot N \, \|f\|^p_{L^p(Y)} + \sum_{Q_i \cap \partial\Omega \neq \emptyset} \int_{Q_i \cap \Omega} |f_\epsilon(x)|^p \, dx$$

$$\leq \epsilon^n (N + N') \cdot \|f\|^p_{L^p(Y)}$$

N : تعداد مکعب‌های به ضلع ϵ داخل Ω

N' : " " " " که با مرز Ω تلاقی دارد.

$$\epsilon^n N \longrightarrow \frac{|\Omega|}{|Y|} \quad , \quad \epsilon^n N' \longrightarrow 0$$

گام دوم: نشان می‌دهیم به ازای هر $E \subseteq \Omega$

$$\int_E f_\epsilon(x)\,dx \longrightarrow \int_Y M_Y(f)\,dx = M_Y(f)\cdot|E|$$

$\bigcup_{i=1}^{N} Q_i \subseteq E \subseteq \bigcup_{i=1}^{N'} Q_i'$ ، $\{Q_i\}$ها مکعب انتقال یافته ϵY هستند.

به علاوه فرض کنید $0 \le f$.

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{Q_i} f_\epsilon(x)\,dx \le \int_E f_\epsilon(x)\,dx \le \sum_{i=1}^{N'} \int_{Q_i'} f_\epsilon(x)\,dx$$

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{Q_i} f_\epsilon(x)\,dx = \epsilon^n N \int_Y f(x)\,dx \qquad \sum_{i=1}^{N'} \int_{Q_i'} f_\epsilon(x)\,dx = \epsilon^n N' \int_Y f(x)\,dx$$

از طرف دیگر چون E اندازه پذیر است

$$\epsilon^n N\,|Y| \longrightarrow |E|$$

$$\epsilon^n N'\,|Y| \longrightarrow |E|$$

$$\Longrightarrow \quad \int_E f_\epsilon(x)\,dx \longrightarrow \frac{|E|}{|Y|}\int_Y f(x)\,dx = M_Y(f)\cdot|E|$$

اگر f مثبت نباشد می‌توان نوشت $f = f^+ - f^-$ که $f^+, f^- \geq 0$ و بنابر مطلب قبل

$$\int_E f_\epsilon^{\pm}(x)\,dx \longrightarrow M_\gamma(f^{\pm})\cdot|E|$$

<u>گام سوم:</u> بنابر قضیه ۶ در جلسه قبل و با توجه به اینکه ــ کران دار است برای $1 \leq p < \infty$ دنباله f_ϵ همگرای ضعیف

به $M_\gamma(f)$ است و برای $p=\infty$ همگرای ضعیف* .

فضای سوبولف :

Ω زیرمجموعه باز $\mathbb{R}^n$.

توابع آزمون $D(\Omega) = \{ \varphi : \Omega \to \mathbb{R} ,\ \mathrm{Supp}\,\varphi \subseteq \Omega ,\ \varphi \in C^\infty \}$

در فضای برداری $D(\Omega)$ همگرایی زیر را در نظر بگیرید $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ هرگاه

(i) زیرمجموعه فشرده $K \subseteq \Omega$ وجود دارد که $\mathrm{Supp}\,\varphi_n \subseteq K$

(ii) $D^\alpha \varphi_n$ به طور یکنواخت در K به $D^\alpha \varphi$ همگرا هستند.

که منظور از $D^\alpha \varphi$ عبارت روبرو است: $D^\alpha \varphi = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \cdots \partial_n^{\alpha_n} \varphi$ $\quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$D'(\Omega)$ مجموعه همه تابعک‌های خطی $T : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ که اگر $\varphi_n \to \varphi$ در $D(\Omega)$

(به معنای فوق) آنگاه $\lim_{n \to \infty} T\varphi_n = T\varphi$

تعریف: هر عضو $\mathcal{D}'(\Omega)$ را یک <u>توزیع</u> (distribution) گوییم.

در حقیقت یک توزیع تابع تعمیم یافته است در واقع اگر $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ آنگاه

$$T_f \varphi := \int_\Omega \varphi(x) f(x)\, dx$$

یک توزیع است. (تمرین: چرا T_f پیوسته است؟)

مثال - توزیع دلتای دیراک: $x_0 \in \Omega$ ،

$$\delta_{x_0}(\varphi) := \varphi(x_0)$$

یک توزیع است.

زیرا اگر $\varphi_n \to \varphi$ در $\mathcal{D}(\Omega)$ به خصوص اینکه $\varphi_n(x_0) \to \varphi(x_0)$ در نتیجه.

$$\lim_{n\to\infty} \delta_{x_0}(\varphi_n) = \delta_{x_0}(\varphi)$$

(واضح است که $\delta_{x_0} : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ خطی است)

تمرین: δ_{x_0} متناظر هیچ تابع $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ نیست.

<u>تعریفِ مشتق ضعیف</u>: اگر $T \in D'(\Omega)$ یک توزیع باشد، آنگاه منظور از

$$D^\alpha T = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} T$$

یک توزیع $D^\alpha T : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ است که

$$D^\alpha T(\varphi) = \langle D^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle$$

توجه: اگر T یک توزیع متناظر یک تابع هموار f باشد،

$$\langle T, D^\alpha \varphi \rangle = \int_\Omega f(x) D^\alpha \varphi(x) \, dx = \int_\Omega (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f(x) \, \varphi(x) \, dx$$

$$= (-1)^{|\alpha|} T_{D^\alpha f}(\varphi)$$

دقت کنید $\operatorname{supp}\varphi$ در یک فشرده است و φ نزدیک مرز صفر است.

مثال:

$$H(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x<0\end{cases} \quad ، \quad H\in D'(\mathbb{R}) \Leftarrow H\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$$

$$\langle H', \varphi\rangle = -\langle H, \varphi'\rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)\,dx$$

$$= -\varphi(x)\Big|_{x=0}^{\infty} = \varphi(0)$$

$$= \langle \delta_0, \varphi\rangle$$

$$\Rightarrow \quad H' = \delta_0$$

<u>تعریفِ فضای سوبولف</u> : $1 \le p \le \infty$ و Ω یک باز در $\mathbb{R}^n$.

$$W^{1,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) \ : \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \quad \forall\, 1 \le i \le n \right\}$$

منظور از $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ مشتقِ ضعیفِ u است. یعنی u را به عنوان توزیع در نظر بگیریم و $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ را به صورت یک توزیع حساب کنیم. یعنی در واقع

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = -\left\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

وقتی می‌گوییم $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p$ یعنی یک تابع $g \in L^p(\Omega)$ وجود دارد که توزیع متناظر با g دقیقاً همان توزیع $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ است. در واقع باید رابطه زیر برقرار باشد.

$$\int_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx = -\int_\Omega g(x) \varphi(x)\, dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

مثال- تابع هویساید $H(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$ روی بازه $(-1,1)$ عضو $W^{1,p}(-1,1)$ نیست هرچند

$H\in L^p(-1,1)$

مثال- $f(x)=|x|$ ، $f\in W^{1,p}(-1,1)$. قرار دهید $g(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$ داریم $g\in L^p(-1,1)$

نشان می‌دهیم $f'=g$ به معنای مشتق ضعیف.

$$\int_{-1}^{1} g(x)\varphi(x)\,dx \overset{?}{=} -\int_{-1}^{1} f(x)\varphi'(x)\,dx \qquad \forall \varphi\in D(-1,1)$$

$$\int_{0}^{1}\varphi(x)\,dx-\int_{-1}^{0}\varphi(x)\,dx \overset{?}{=} -\int_{0}^{1}x\varphi'(x)\,dx+\int_{-1}^{0}x\varphi'(x)\,dx$$

$$\int_{0}^{1}x\varphi'(x)\,dx+\int_{0}^{1}\varphi(x)\,dx = x\varphi(x)\Big|_0^1=\varphi(1)=0$$ (چون $\operatorname{Supp}\varphi$ در $(-1,1)$ فشرده است)

فضای سوبولف : $W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \right\}$

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \|u\|_{L^p(\Omega)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}}_{\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}}$$

فضای $W^{1,p}$ با نرم بالا یک فضای باناخ است.

$$W^{1,p} \hookrightarrow (L^p)^N$$

$$u \longmapsto (u, \partial_1 u, \partial_2 u, \dots, \partial_n u) \qquad N = n+1$$

درحقیقت $W^{1,p}$ یکریخت با یک زیرفضای بسته $(L^p)^N$ است. درنتیجه $W^{1,p}$ برای $1<p<\infty$ بازتابی است. و به‌ازای $1 \le p < +\infty$ جدایی‌پذیر است.

در حالت $p=2$ فضای $W^{1,2}$ یک فضای هیلبرت است با ضرب داخلی زیر:

$$(u,v) := \int_{\Omega} uv + \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

معمولا قرار می‌دهیم $H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega)$.

گزاره: $D(\mathbb{R}^n)$ در $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ چگال است برای $1 \leq p < \infty$.

تعریف - ناحیه Ω را لیپ‌شیتز گوییم هرگاه Ω یک همسایه‌ی لیپ‌شیتز باشد یعنی در همسایگی هر نقطه آن $\partial\Omega$ را به صورت نمودار یک تابع لیپ‌شیتز بتوان نشان داد.

قضیه: $D(\bar{\Omega})$ در $W^{1,p}(\Omega)$ چگال است برای $1 \leq p < \infty$ اگر Ω لیپ‌شیتز باشد.

که منظور از $D(\bar{\Omega})$ تحدید توابع $D(\mathbb{R}^n)$ به $\bar{\Omega}$ است.

تذکر: $\mathcal{D}(\Omega)$ لزوماً در $W^{1,p}(\Omega)$ چگال نیست و تعریف می‌کنیم

$$W_0^{1,p}(\Omega) := \overline{\mathcal{D}(\Omega)} \quad (\text{بستار نسبت به نرم } W^{1,p})$$

واضح است که $W_0^{1,p} \subseteq W^{1,p}$ زیرفضای بسته است.

برای $\Omega = \mathbb{R}^n$ داریم $W^{1,p}(\Omega) = W_0^{1,p}(\Omega)$ و اگر Ω^c اندازه صفر باشد این تساوی برقرار است.

قضیه توسیع: اگر Ω لیپ‌شیتز باشد آنگاه عملگر خطی کراندار

$$E : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

وجود دارد که $(Eu)(x) = u(x)$ به ازای هر $x \in \Omega$.

$$\| Eu \|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \, \| u \|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

که ثابت C تنها به p و Ω وابسته است. اگر Ω کراندار باشد، عملگر E را می‌توان به گونه‌ای تعریف کرد که $\mathrm{Supp}(Eu)$ در یک همسایگی فشرده Ω قرار گیرد.

فضاهای نشاندن سوبولف :

اگر X و Y دو فضای برداری نرم‌دار باشند، گوییم X در Y می‌نشیند هرگاه عملگر خطی پیوسته و یک‌به‌یک $i : X \longrightarrow Y$ وجود داشته باشد و با نماد $X \hookrightarrow Y$ نشان می‌دهیم.

$$\forall x : \quad \|\underset{i(x)}{x}\|_Y \le C \|x\|_X$$

اگر این نشاندن فشرده باشد یعنی بستار تصویر گوی واحد X در Y فشرده باشد آنگاه نشاندن فوق را فشرده گوییم.

$$\overline{i\left(\{x : \|x\|_X \le 1\}\right)}$$

و با نماد $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ نشان می‌دهیم.

قضیه: اگر Ω لیپ‌شیتز و کران‌دار باشد (در واقع تنها لازم است که Ω در شرایط قضیه ترسیع صدق کند) آنگاه

(۱) $1 \leq p < n$ ، $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ که $1 \leq q \leq p^*$

و $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$.

اگر $1 \leq q < p^*$ آنگاه نشاندن فوق فشرده است.

(۲) اگر $p = n$ آنگاه $W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ که $1 \leq q < +\infty$ و این نشاندن فشرده است.

(۳) اگر $p > n$ ، نشاندن $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\Omega)$ برقرار است که $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$

و نشاندن $W^{1,p} \hookrightarrow C^{0,\beta}(\Omega)$ فشرده است برای $\beta < \alpha$.

مثال- برای حالت (2) وقتی $q=+\infty$ نشاندن $W^{1,n} \hookrightarrow L^{\infty}$ در حالت کلی درست نیست. برای $\Omega = B(1,0)$ تابع $u(x) = \log\left(\log\left(1+\frac{1}{|x|}\right)\right)$ در $W^{1,n}$ است ولی به L^{∞} تعلق ندارد.

قضیه (trace): اگر Ω یک ناحیه لیپشیتز و کران‌دار باشد، آنگاه عملگر یکتای پیوسته

$$\gamma : H^{1}(\Omega) \longrightarrow L^{2}(\partial\Omega)$$

وجود دارد که

$$\gamma u = u\big|_{L^{2}(\partial\Omega)}$$ برای هر $u \in D(\bar{\Omega})$.

$$\|\gamma u\|_{L^{2}(\partial\Omega)} \leq C \, \|u\|_{H^{1}(\Omega)}$$

گزاره: $$\operatorname{Null}\gamma = H^1_0(\Omega)$$

تعریف: $$\operatorname{Im}\gamma = H^{1/2}(\partial\Omega)$$

عملگر trace دارای وارون راست است یعنی عملگر خطی پیوسته $\eta : H^{1/2}(\partial\Omega) \longrightarrow H^1(\Omega)$ وجود دارد که

$$\gamma(\eta(u)) = u$$

نکته: روی فضای $H^{1/2}(\partial\Omega)$ نرم زیر را قرار می‌دهیم:

$$\|u\|^2_{H^{1/2}(\partial\Omega)} := \int_{\partial\Omega} |u(x)|^2 \, d\sigma + \int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+1}} \, dx\, dy$$

درضمن نشانش فشرده $H^{1/2}(\partial\Omega) \hookrightarrow L^2(\partial\Omega)$ را داریم.

قضیه گرین: اگر Ω لیپ‌شیتز و کران‌دار باشد و $u, v \in H^1(\Omega)$ آنگاه داریم:

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx + \int_{\partial\Omega} \gamma(u) \cdot \gamma(v) \, n_i \, d\sigma$$

که $(n_1, n_2, \dots, n_n)$ بردار عمود برونگرا بر $\partial\Omega$ است.

تعریف: $H^{-1}(\Omega) := \left(H_0^1(\Omega)\right)'$

اگر $F \in H^{-1}$ آنگاه توابع f_0، f_1، ...، $f_n \in L^2(\Omega)$ وجود دارند به طوریکه

$$F = f_0 + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

یعنی

$$\langle F,\varphi\rangle = \int_\Omega f_0\varphi - f_1\partial_1\varphi - f_2\partial_2\varphi - \cdots - f_n\partial_n\varphi \, dx$$

به ازای هر $\varphi\in H_0^1(\Omega)$.

دقت کنید این نمایش یکتا نیست و می‌توان نشان داد :

$$\|F\|^2_{H^{-1}(\Omega)} = \inf\left(\sum_{i=0}^n \|f_i\|^2_{L^2}\right)$$

که اینفیمم روی همه نمایش‌های ممکن گرفته شده است .

گزاره : $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ به طور فشرده می‌نشیند .

در حقیقت $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$

نکته: $H^{-1/2}(\partial\Omega) := \left(H^{1/2}(\partial\Omega)\right)'$. به علاوه

$$\left(H^1(\Omega)\right)' \cong H^{-1}(\Omega) \oplus H^{-1/2}(\partial\Omega)$$

اگر $F=(u_1,\dots,u_n)\in \left(H^1(\Omega)\right)^n$ و $v\in H^1(\Omega)$ آنگاه بنا بر رابطه (قضیه دیورژانس)

$$\int_\Omega v \operatorname{div} F \, dx = -\int_\Omega \nabla v \cdot F \, dx + \int_{\partial\Omega} \gamma(v)\,(F\cdot\vec{n})\, d\sigma$$

وقتی $F\in H^1$ این عبارت به معنای trace معنی می‌شود ولی اگر $F\in \left(L^2(\Omega)\right)^n$

انتگرال $\int_\Omega \nabla v\cdot F$ به معنای ضرب دو تابع L^2 معنا دارد. همچنین $\operatorname{div} F$ به عنوان

از یک عنصر H^{-1} روی تابع $v\in H^1$ معنا دارد. به همین علت $F\cdot\vec{n}$ را به عنوان عنصر $H^{-1/2}$

تعریف کنیم. و انتگرال روی $\partial\Omega$ را به معنای اثرِ یک عضوِ دوگانِ $H^{1/2}(\partial\Omega)$ روی (γu) نگاه می‌کنیم.

در حالت خاص $F=\nabla u$ داریم:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = -\int_{\Omega} \Delta u \cdot v + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot v$$

ضرب داخلی در فضای L^2

عملِ یک عضوِ H^{-1} روی $v \in H^1$

$H^{-1/2}$

$H^{1/2}$