مباحثی در PDE

جلد اول

معادلات بیضوی غیرخطی مرتبه دو

$$F(x,u,Du,D^2u)=0 \quad \text{in } \Omega\subseteq\mathbb{R}^n$$

$$F:\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times S^n \xrightarrow{\text{پیوسته}} \mathbb{R}$$

S^n: ماتریس‌های $n\times n$ متقارن

مثال -

$$\Delta u=0 \longleftarrow F(x,u,p,M)=\operatorname{tr} M$$

مثال -

$$\operatorname{div}(A\nabla u)+b(x)=0 \longleftarrow F=\operatorname{tr}(AM)+b(x)$$

معادلات خطی

معادله Semilinear

$$\operatorname{div}(A\nabla u) + b(x,u,\nabla u) = 0$$

معادله quasilinear

$$\operatorname{div}(A(x,u,\nabla u)\cdot\nabla u) + b(x,u,\nabla u) = 0$$

سؤال‌های اساسی: - وجود جواب (به همراه پایداری: یک نامساوی از نرم جواب برحسب مقادیر اولیه)

- یکتایی جواب

- نظم جواب

* منظور از جواب چیست؟

جواب کلاسیک $\Delta u = f$ تابع $u \in C^2$ که تساوی بطور نقطه‌ای برقرار است.

* جواب ضعیف (جواب توزیعی distribution)

$$\int_\Omega -\nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_\Omega f \varphi \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

اگر تابع $u \in H^1$ در تساوی بالا صدق کند به آن جواب ضعیف گوییم.

جواب ضعیف برای معادلات غیرخطی به فرم دیورژانس :

$$\operatorname{div}\left(A(x,u,\nabla u)\cdot\nabla u\right)=f$$

$$\int_\Omega -A(x,u,\nabla u)\nabla u\cdot\nabla\varphi=\int_\Omega f\varphi$$

معادلات کاملاً غیرخطی (Fully Nonlinear)

$$F(x,u,\nabla u,D^2u)=0$$

مثال : Monge-Amper

$$\det(D^2u)=f(x)$$

Hamilton-Jacobi-Bellman : dců

$$L_\alpha u = \sum_{i,j} a_{ij}^\alpha u_{x_i x_j} + \sum_i b_i^\alpha u_{x_i} + c^\alpha u$$

$$F(x, u, \nabla u, D^2 u) = \sup_{\alpha \in I} L_\alpha u$$

$$F := \inf_{\beta \in J} \sup_{\alpha \in I} L_{\alpha\beta} u \qquad : \underline{\text{Isaac}} - \underline{\text{dců}}$$

جوابهای لزجی (Viscosity Solutions).

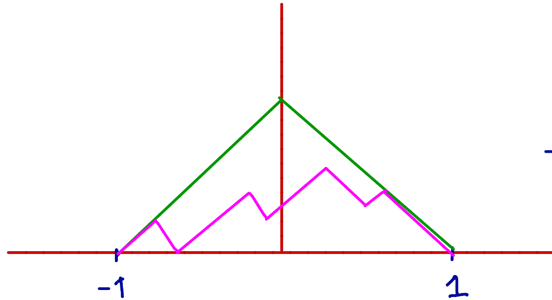
ایده اولیه در سال 1983 در حل معادله همیلتون - ژاکوبی مرتبه اول (Lions-Crandall)

مثال- $|Du|^2 = 1$ در $\Omega = (-1,1)$

$u(1) = u(-1) = 0$ $\longrightarrow$ جواب C^1 ندارد.

<u>رویکرد اول</u> تساوی بالا به معنای تقریباً همه جا برقرار باشد. یعنی u یک تابع لیپشیتز باشد و

$u'(x) = \pm 1$ تقریباً همه جا.



بی‌نهایت جواب به این معنا داریم

رویکرد دوم (Vanishing Viscosity Method)

$$\begin{cases} \epsilon u'' + (u')^2 = 1 \\ u(\pm 1) = 0 \end{cases}$$

به‌ازای هر ϵ جواب معادله بالا را u_ϵ قرار دهید وقتی $\epsilon \to 0$ توابع u_ϵ به تابع u میل می‌کند که در معادله $(u')^2 = 1$ صدق می‌کند.

$$u(x) = 1 - |x|$$

<u>تعریف</u>: عملگر F را بیضوی (degenerate elliptic) گوییم هرگاه

$$F(x,u,p,M) \le F(x,u,p,N)$$

به ازای هر $(x,u,p)\in\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ و هر $M,N\in S^n$ که $\underbrace{M\le N}$

منظور این است که ماتریس $N-M$
معین مثبت باشد یا هم مقادیر ویژه آن
نامنفی باشد.

گزاره: اگر F بیضوی باشد و $u_\epsilon \in C^2(\Omega)$ جواب معادله زیر باشد و اگر $u_\epsilon \longrightarrow u$ به طور یکنواخت.

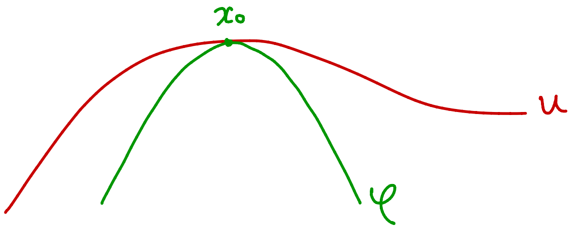
$$\epsilon \Delta u + F(x,u,Du,D^2u) = 0$$

(۱) اگر $\varphi \in C^2$ که $u-\varphi$ ماکسیمم موضعی خود را در نقطه $x_0 \in \Omega$ بگیرد آنگاه

$$F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \geq 0$$

(۲) اگر $\varphi \in C^2$ که $u-\varphi$ می‌نیمم ....

$$F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \leq 0$$



$u-\varphi$ مینیمم را در x_0 گرفته. $\xrightarrow{\text{درحالتی که } u\in C^2}$ $D^2u(x_0) \geq D^2\varphi(x_0)$, $Du(x_0)=D\varphi(x_0)$

وقتی u جواب کلاسیک $F(x,u,Du,D^2u)=0$ باشد درنتیجه بنابر بیضوی بودن F باید

$$F(x_0,u(x_0),D\varphi(x_0),D^2\varphi(x_0)) \leq 0$$

اثبات قضیه: برای $\varphi_\delta(y)=\varphi(y)+\delta|y-x_0|^4$ برای ϵ به اندازه کافی کوچک، نقطه $x_\epsilon\in B_r(x_0)$ وجود دارد که

$u_\epsilon-\varphi_\delta$ می‌نیمم موضعی خود را در x_ϵ می‌گیرد.

$$u_\epsilon(x_0)-\varphi_\delta(x_0)=u_\epsilon(x_0)-u(x_0)$$

$$|y-x_0|=r \Longrightarrow u_\epsilon(y)-\varphi_\delta(y)=[u_\epsilon(y)-u(y)]+\underbrace{[u(y)-\varphi(y)]}_{\geq c_0>0}+\delta r^4$$

در نتیجه $D^2u_\epsilon(x_\epsilon)\geq D^2\varphi_\delta(x_\epsilon)$ $\Longleftarrow$

$$\epsilon\Delta\varphi_\delta(x_\epsilon)+F(x_\epsilon,u_\epsilon(x_\epsilon),D\varphi_\delta(x_\epsilon),D^2\varphi_\delta(x_\epsilon))\leq 0$$

دقت کنید که وقتی $\epsilon\to 0$، $x_\epsilon\to x_0$ و بنابر پیوستگی F قضیه اثبات می‌گردد.

تعریف: تابع پیوسته $u\in C(\Omega)$ را جواب پایینی (جواب بالایی) لزجی معادله

$$F(x,u,Du,D^2u)\ge 0$$

$$(\le 0)$$

گوییم هرگاه تابع $\varphi\in C^2(\Omega)$ که $u-\varphi$ می‌نیمم موضعی خود را در نقطه $x_0\in\Omega$ بگیرد
(ماکسیمم)
داشته باشیم

$$F(x_0,u(x_0),D\varphi(x_0),D^2\varphi(x_0))\ge 0$$

$$(\le 0)$$

و اگر u هم جواب پایینی و هم جواب بالایی باشد آن را جواب لزجی معادله گوییم.

نکته: اگر در نقطه‌ای نتوانیم از بالا یا پایین به وسیله تابع $\varphi\in C^2$ به تابع u مماس شویم به طور طبیعی شروط بالا صادق است.

گزاره : u جواب کلاسیک $\iff u \in C^2$ و جواب لزجی باشد .

مباحثی در PDE

جلسه دوم ۹۶/۶/۲۷

تعریف: تابع پیوسته $u \in C(\Omega)$ را جواب پایینی (جواب بالایی) لزجی معادله

$$F(x, u, Du, D^2u) \geq 0$$

$$(\leq 0)$$

گوییم هرگاه تابع $\varphi \in C^2(\Omega)$ که $u - \varphi$ ماکسیمم (می‌نیمم) موضعی خود را در نقطه $x_0 \in \Omega$ بگیرد

داشته باشیم

$$F(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \geq 0$$

$$(\leq 0)$$

تذکر: شرط پیوستگی u را می‌توان ضعیف‌تر کرد. می‌توان فرض کرد $u \in L^p(\Omega)$

و توابع آزمون φ را از کلاس $W^{2,p}(\Omega)$ انتخاب کرد.

همچنین می‌توان شرط پیوستگی را به نیم پیوستگی تعمیم داد.

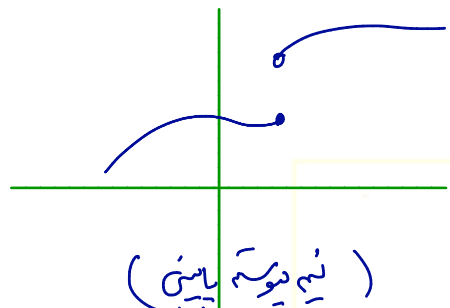
تعریف: تابع $u:\Omega \to \mathbb{R}$ را نیم پیوسته بالایی (پایینی) گوییم هرگاه به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$

مجموعه $\{x\in\Omega : u(x)<\alpha\}$ باز باشد. یا به عبارتی اگر $x_n \to x$ آنگاه

$(\{x\in\Omega : u(x)>\alpha\})$

$$\limsup_{n\to\infty} u(x_n) \leq u(x)$$

$$\left(\liminf_{n\to\infty} u(x_n) \geq u(x)\right)$$



(نیم پیوسته پایینی)

خاصیت ۱: توابع نیم‌پیوسته بالایی (پایینی) روی مجموعه‌های فشرده ماکسیمم (مینیمم) خود را می‌گیرند.

خاصیت ۲: اگر u_α خانواده‌ای از توابع نیم‌پیوسته بالایی (پایینی) باشند آنگاه

$$u = \inf_\alpha u_\alpha \qquad \left(u = \sup_\alpha u_\alpha \right)$$

نیم‌پیوسته بالایی (پایینی) است.

نکته: در تعریف جواب پایینی لزجی (subsol.) به جای شرط پیوستگی می‌توان فرض کرد که u نیم‌پیوسته بالایی است و به همین ترتیب برای جواب بالایی (supersol.) می‌توان شرط نیم‌پیوستگی پایینی را قرار داد.

$$J^{2,+}u(x_0)=\left\{(p,M)\in\mathbb{R}^n\times S(n):u(x)\le u(x_0)+p\cdot(x-x_0)+\frac{1}{2}(x-x_0)^t M(x-x_0)+o(|x-x_0|^2)\right\}$$

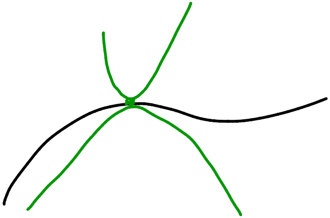
$$J^{2,-}u(x_0)=\{\quad \cdots\cdots \quad \cdots \ge \cdots \quad\}$$

خواص: ۱) $J^{2,-}u=-J^{2,+}(-u)$

۲) اگر $u\in C^2$ ، آنگاه

$$u(x)=u(x_0)+\nabla u(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{1}{2}(x-x_0)^t D^2u(x_0)(x-x_0)+o(|x-x_0|^2)$$

و $(p,M)\in J^{2,+}(x_0)$ آنگاه $p=\nabla u(x_0)$ و $D^2u(x_0)\le M$.



۳) اگر $J^{2,+}u(x_0)\neq\emptyset$ و $J^{2,-}u(x_0)\neq\emptyset$ آنگاه
u مشتق‌پذیر است و مشتق u لیپشیتز است. یعنی
$D^2u(x_0)$ کران‌دار است. (ابهام دارد!!)

۴) $(p,M)\in J^{2,+}$ و $(q,N)\in J^{2,-}$

$$\Downarrow$$

$$p=q\ ,\quad N\le M$$

۵) اگر $J^{2,+}u(x_0)\cap J^{2,-}u(x_0)\neq\emptyset$ آنگاه $Du(x_0)$ و $D^2u(x_0)$ وجود دارند.

۶) اگر u جواب پایینی $0 \leq F$ باشد، آنگاه

$$0 \leq F(x_0, u(x_0), P, M)$$

به ازای هر $(P, M) \in J^{2,+}u(x_0)$. (به طور مشابه برای جواب بالایی)

۷) اگر u نیم پیوسته بالایی باشد آنگاه به ازای هر $x \in \Omega$ یک دنباله $x_n \in \Omega$ وجود دارد که $J^{2,+}u(x_n) \neq \phi$ و $x_n \longrightarrow x$. (در واقع در یک زیرمجموعه چگال Ω مجموعه‌ای $J^{2,+}u$ ناتهی هستند)

اثبات -

$$u(x_\epsilon) - \frac{1}{\epsilon}|x_\epsilon - x|^2 = \max_{y \in \overline{B_r(x)}} \left(u(y) - \frac{1}{\epsilon}|y-x|^2 \right)$$

نیم پیوسته بالایی است و ماکسیمم در یک نقطه به دست می‌آید.

$$x_\epsilon \in \overline{B_r(x)}$$

وقتی $\epsilon \to 0$ داریم $x_\epsilon \to x$ زیرا

$$u(x_\epsilon) - \frac{1}{\epsilon}|x_\epsilon - x|^2 \geq u(x)$$

در سمت راست نامساوی صفحه قبل
به جای y قرار دهید x

$$\Rightarrow \quad |x_\epsilon - x|^2 \leq \epsilon[u(x_\epsilon) - u(x)] \longrightarrow 0$$

از طرفی

$$u(x_\epsilon) - \frac{1}{\epsilon}|x_\epsilon - x|^2 \geq u(y) - \frac{1}{\epsilon}|y - x|^2$$

$$\Rightarrow \quad u(y) \leq u(x_\epsilon) + \frac{1}{\epsilon}\left[|y-x|^2 - |x_\epsilon - x|^2\right]$$

$$= u(x_\epsilon) + \frac{x_\epsilon - x}{\epsilon}\cdot(y - x_\epsilon) + \frac{1}{2\epsilon}(y - x_\epsilon)^t I (y - x_\epsilon)$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{x_\epsilon - x}{\epsilon}, \frac{1}{2\epsilon} I\right) \in J^{2,+}u(x_\epsilon)$$

$$J^{2,+}u(x_0) = \left\{ \left(D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0) \right) : \text{در نقطه } x_0 \text{ ماکسیمم موضعی دارد } u-\varphi \ , \ \varphi \in C^2(\Omega) \right\}$$ ٨

$$u(y) - \varphi(y) \leq u(x_0) - \varphi(x_0)$$

$$u(y) \leq u(x_0) - \varphi(x_0) + \varphi(y) = u(x_0) + D\varphi(x_0)\cdot(y-x_0) + \frac{1}{2}(y-x_0)^t D^2\varphi(x_0)(y-x_0) + o(|y-x_0|^2)$$

$$\Longrightarrow \left(D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0) \right) \in J^{2,+}u(x_0)$$

برعکس اگر $(p, M) \in J^{2,+}u(x_0)$ $\Longleftarrow$

$$u(y) \leq \underbrace{u(x_0) + p\cdot(y-x_0) + \frac{1}{2}(y-x_0)^t M (y-x_0) + o(|y-x_0|^2)}_{\parallel \atop \varphi(y)}$$

مشکل اصلی این است که φ ممکن است C^2 نباشد. زیرا در خصوص تابع $\omega(y) = o(|y-x_0|^2)$

تنها می‌دانیم که $\lim\limits_{y\to x_0} \frac{\omega(y)}{|y-x_0|^2} = 0$. این تنها تضمین می‌کند که $D^2\omega(x_0)=0$. ولی ممکن است

ω تابع C^2 نباشد. برای حل مسئله کافی است تابع C^2 ای پیدا کنیم مثل $\sigma(y)$ که

$\omega(y) \le \sigma(y)$ و $D^2\sigma(x_0)=0$.

گزاره اگر ρ یک تابع صعودی در $C^0(0,\infty)$ باشد و $\rho(0)=0$. آنگاه تابع

$\tau \in C^2(0,\infty)$ وجود دارد که

$\rho(t) \le \tau(t) \le 8\rho(4t)$ به ازای هر $0\le t$

اثبات گزاره:

$$\tau(t) := \frac{1}{2t^2}\int_0^{4t}\int_0^{r} \rho(s)\,ds\,dr$$

$$\rho(r) = \sup_{|y-x_0|\le r} \frac{o(|y-x_0|^2)}{|y-x_0|^2} \quad \Longrightarrow \quad \rho(0) = 0$$

برای تکمیل اثبات خاصیت ۸ قرار دهید $\sigma(y) = |y-x_0|^2 \, \tau(|y-x_0|)$.

مباحثی در PDE

جلسه سوم ۹۶/۷/۱۱

پایداری معادله تحت اختلالات پیوسته :

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ و $\{F_m\}$ یک دنباله عملگرهای بیضوی در $C^0(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times S(n))$ به طوری که

$$F_m \longrightarrow F$$

به طور موضعی یکنواخت. همچنین فرض کنید $\{u_m\}$ جوابهای لزجی پیوسته

$$F_m(x,u_m,Du_m,D^2u_m)=0 \quad \text{in } \Omega$$

اگر $u_m \to u$ به طور موضعی یکنواخت در Ω، آنگاه u جواب لزجی پیوسته معادله زیر است.

$$F(x,u,Du,D^2u)=0 \quad \text{in } \Omega$$

تذکر: در قضیه بالا لازم نیست که u_m جواب لزجی پیوسته باشد بلکه اگر جواب پایینی نیم پیوسته بالایی باشند، حکم مسأله به صورت مشابه برقرار است.

اثبات: فرض کنیم $\{u_m\}$ جواب پایین باشند. نشان می‌دهیم u نیز جواب پایین است.

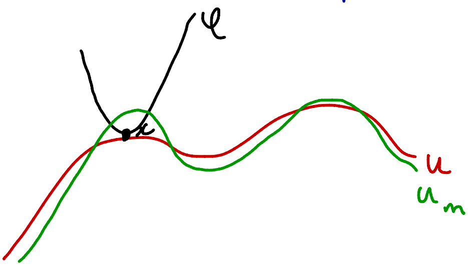
$$(p,M)\in J^{2,+}u(x) \overset{?}{\Longrightarrow} F(x,u(x),p,M)\ge 0$$

برای نشان دادن این مطلب کافی است دنباله $x_m\in\Omega$ پیدا کنیم و $(P_m,M_m)\in J^{2,+}u_m(x_m)$

که

$$(x,u(x),p,M) \longleftarrow (x_m,u_m(x_m),P_m,M_m)$$

چون $F_m \longrightarrow F$ به طور موضعی یکنواخت، گزاره بالا نتیجه می‌شود.



می‌دانیم $\varphi\in C^2(\Omega)$ وجود دارد که

$$0 = u(x)-\varphi(x) > u(y)-\varphi(y) \quad \text{in } B_r(x)$$

$$(p,M) = (D\varphi(x), D^2\varphi(x))$$

فرض کنید $\max_{\partial B_r}(u-\varphi) = -\alpha < 0$

m را آنقدر بزرگ بگیرید که $\|u_m - u\|_{C^0(\bar{B}_r)} < \alpha/3$

$$\Rightarrow \max_{\partial B_r}(u_m-\varphi) < -\frac{2\alpha}{3}$$

$$u_m(x)-\varphi(x) = u_m(x)-u(x) \geq -\alpha/3$$

بنابراین $u_m-\varphi$ ماکسیمم خود را در نقطه درونی $x_m \in B_r(x)$ می‌گیرد.

با تغییر مقدار r می‌توان نشان داد که $x_m \to x$ در هر یک زیردنباله.

$$a_m = \max_{\bar{B}_r}(u_m-\varphi) = u_m(x_m)-\varphi(x_m)$$

$\varphi + a_m$ از بالا به تابع u_m تماس پیدا می‌کند در نقطه x_m و در نتیجه

$$\left(D\varphi(x_m),\ D^2\varphi(x_m)\right) \in J^{2,+} u_m(x_m)$$

وجود جواب (روش پرون) (Perron)

تعریف اصل مقایسه: اگر $\underline{u} \in USC$ جواب پایینی لزجی معادله

$$F(x,\underline{u},D\underline{u},D^2\underline{u}) \geq 0 \quad \text{in } \Omega$$

و $\overline{u} \in LSC$ جواب بالایی لزجی معادله

$$F(x,\overline{u},D\overline{u},D^2\overline{u}) \leq 0 \quad \text{in } \Omega$$

و روی مرز $\partial\Omega$ داشته باشیم $\underline{u} \leq \overline{u}$. آنگاه گوییم F در اصل مقایسه صدق کند

خواهیم داشت $\underline{u} \le \bar{u}$ در Ω.

قضیه (وجود جواب لزجی): $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S(n))$ عملگر (ناهمگون) بیضوی است که در اصل مقایسه صدق می‌کند. به علاوه برای تابع $g \in C^0(\bar{\Omega})$ فرض کنید جواب پایینی $\underline{u}$ و جواب بالایی $\bar{u}$ برای مسئله

$$F(x, u, Du, D^2 u) = 0$$

باشند که $\underline{u} \le g \le \bar{u}$ روی $\partial\Omega$. آنگاه

$$U(x) = \sup\{u(x) : \underline{u} \le u \le \bar{u},\ u \text{ زیرجواب مسئله است}\}$$

جواب لزجی مسئله خواهد بود.

تعریف:

$$U^*(x) := \limsup_{y\to x} U(y)$$

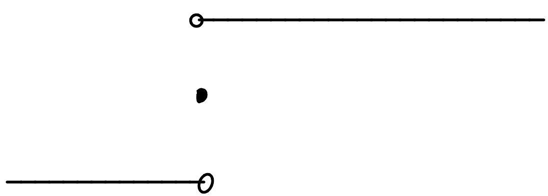
U^* که یک تابع نیم پیوسته بالایی است، پوشش نیم پیوسته بالایی U می‌نامیم.

به طور مشابه

$$U_*(x) := \liminf_{y\to x} U(y)$$

پوشش نیم پیوسته پایینی U است.

مثال:



گام اول اثبات : U^* جواب پایینی مسأله است.

$$(p,M)\in J^{2,+}U^*(x) \overset{?}{\Longrightarrow} F(x,U^*(x),p,M)\ge 0$$

کافی است نشان دهیم دنباله زیرجوابهای u_m وجود دارند که $\underline{u}\le u_m\le \overline{u}$

و $(p_m,M_m)\in J^{2,+}u_m(x_m)$ که

$$(x_m,u_m(x_m),p_m,M_m)\longrightarrow (x,U^*(x),p,M)$$

$$\exists\, \varphi\in C^2(\Omega):\quad \varphi(x)=U^*(x)\qquad 0=U^*(x)-\varphi(x)>U(y)-\varphi(y)$$

$$(D\varphi(x),D^2\varphi(x))=(p,M)\qquad B_r(x)\ni y\neq x$$

$$\forall m \ \exists u_m : \quad U^*(x) \geq u_m(x) \geq U^*(x) - \frac{1}{m}$$

$$-\frac{1}{m} \leq \max_{\overline{B}_r(x)} (u_m - \varphi) = u_m(x_m) - \varphi(x_m)$$

u_m نیم پیوسته بالایی

ادعا: $x_m \to x$ درحد یک زیردنباله. فرض کنید $x_m \to x^*$ در یک زیردنباله

$$U^*(x^*) - \varphi(x^*) \geq \limsup_{x_m \to x^*} U^*(x_m) - \varphi(x_m)$$

$(U = \sup u_m \quad)$

$$\geq \limsup_{x_m \to x^*} u_m(x_m) - \varphi(x_m)$$

$$\geq \limsup -1/m = 0$$

به سمت اینکه φ از بالا تنها در نقطه x در همسایگی $B_r(x)$ با تابع U^* تماس دارد نتیجه می‌شود که $x^* = x$.

در نتیجه برای m به اندازه کافی بزرگ $u_m - \varphi$ در $B_r(x)$ ماکسیمم موضعی خود را در نقطه x_m می‌گیرد و

$$\left(D\varphi(x_m), D^2\varphi(x_m)\right) \in J^{2,+} u_m(x_m).$$

گام دوم: U^* جواب بالایی مسأله است.

فرض کنید در نقطه $x \in \Omega$ خاصیت جواب بالایی نقض شود یعنی

$$(p, M) \in J^{2,-} U^*(x) \quad , \quad F(x, U^*(x), p, M) > 0$$

ایده: U^* را در یک همسایگی x تکان می‌دهیم و یک جواب پایینی برای معادله می‌سازیم که از U^*

بزرگتر است. برای سادگی فرض کنید $x=0$.

$$(p,M)\in J^{2,-}U^*(0) \Longrightarrow u^*(x) > u^*(0) + p\cdot x + \frac{1}{2}x^tMx + o(|x|^2)$$

این رابطه را در همسایگی $B_r(0)$ داریم.

$$w_{\delta,\gamma}(x) := u^*(0)+\delta + p\cdot x + \frac{1}{2}x^tMx - \frac{\gamma}{2}|x|^2$$

$$V = \begin{cases} \max\{u^*, w_{\delta,\gamma}\} & \text{on } B_r(0) \\ u^* & \text{on } \Omega\setminus B_r(0) \end{cases}$$

نشان می‌دهیم: (1) روی ∂B_r، $w_{\delta,\gamma}\le u^*$

(2) $w_{\delta,\gamma}$ جواب پایینی است در $B_r(0)$.

واضح است که در این صورت با توجه به رابطه $v(0)=u^*(0)+\delta$ و اینکه u^* سوپرحل هم جواب کران پایینی است تناقض می‌رسیم. (به کمک اصل مقایسه نشان داده می‌شود که $u^*\le\bar{u}$.)

1) $\omega_{\delta,\gamma}\le u^*$ روی ∂B_r. وقتی $|x|=r$ داریم:

$$u^*(x)-\omega_{\delta,\gamma}(x)=\underbrace{\left[u^*(x)-u^*(0)-p\cdot x-\tfrac{1}{2}x^tMx\right]}_{\ge 0}-\delta+\tfrac{\gamma}{2}r^2$$

$$\ge \tfrac{\gamma}{2}r^2-\delta\ \ge 0$$

۲) $\omega_{\delta,\gamma}$ جواب پایینی است در $B_r(0)$. وقتی که $\omega_{\delta,\gamma}$ تابع C^2 است و باید

$$(*)\quad F(x, \omega_{\delta,\gamma}(x), P + Mx - \gamma x, M - \gamma I) \geq 0$$

از طرفی بنا بر فرض خلف می‌دانیم $F(0, U^*(0), P, M) > 0$

بنا بر پیوستگی F رابطه $(*)$ درست است به شرط آنکه r, γ, δ به اندازه کافی کوچک باشد.

برای اثبات وجود جواب دو نکته لازم است اثبات شود :

① اصل حقایسه

② یک جواب بالایی $\bar{u}$ و جواب پایینی $\underline{u}$ که $\underline{u} \leq g \leq \bar{u}$ روی $\partial\Omega$.

اگر عملگر دیفرانسیل به صورت زیر باشد، نشان دهیم همواره می‌توان یک جواب بالایی و پایینی پیدا کرد:

$$\begin{cases} F(x, Du, D^2u) = f(u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

f تابع اکیداً صعودی است و $\partial\Omega$ یک رویه C^2 است و $F(x,0,0) \geq 0$

اگر $G = f^{-1} \circ F$ آنگاه G نیز عملگر بیضوی است و کاهشی است مسأله زیر را حل کنیم :

$$G(x,0,0) \geq 0 \quad , \quad \begin{cases} G(x,Du,D^2u) = u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$$u^+(x) := M\left(1 - e^{-L\,d(x)}\right)$$

که $d(x) = dist(x, \partial\Omega)$ برای $\varepsilon > 0$ به اندازه کافی کوچک در

$$\Omega^\varepsilon := \{x \in \Omega : d(x) < \varepsilon\}$$

یک تابع C^2 است . M و L دو ثابت مثبت هستند .

u^+ در Ω^ε یک جواب بالایی است یعنی

$$G(x, Du^+, D^2u^+) \leq u^+(x)$$

$$\nabla u^+ = MLe^{-Ld(x)} \cdot \nabla d(x)$$

$$\partial_{ij} u^+ = MLe^{-Ld(x)}\left[\partial_{ij} d - L\, \partial_j d\, \partial_i d\right]$$

اگر برای L به اندازه کافی بزرگ، داشته باشیم $0 \geq G(x, MLe^{-Ld(x)} \nabla d(x), D^2 u)$

آنگاه u^+ در Ω^ϵ یک جواب بالایی است.

به عنوان مثال - $G(x,p,Q) = tr(A(x)Q) + b \cdot p - f(x)$

$$MLe^{-Ld}\left[tr(AD^2d) - L\, tr(A\, \nabla d \otimes \nabla d)\right] + MLe^{-Ld}\, b \cdot \nabla d - f(x) \leq 0$$

$$tr(A\, \xi \otimes \xi) = \sum a_{ij}\, \xi_i \xi_j \geq 0$$

برای L به اندازه کافی بزرگ این اتفاق می‌افتد.

$$u(x)=\begin{cases} u^{+}(x) & x\in\Omega^{\epsilon} \\ M(1-e^{-\epsilon L}) & x\in\Omega\setminus\Omega^{\epsilon}\end{cases}$$

$$G(x,0,0)\leq M(1-e^{-\epsilon L}) \Longrightarrow$$ u در $\Omega\setminus\Omega^{\epsilon}$ یک جواب بالایی است.

M به اندازه کافی بزرگ وجود دارد.

مباحثی در PDE

جلسه چهارم ۹۶/۷/۳

تعریف اصل مقایسه : اگر $u \in USC$ جواب پایینی لزجی معادله

$$F(x, u, Du, D^2u) \geq 0 \quad \text{in } \Omega$$

و $v \in LSC$ جواب بالایی لزجی معادله

$$F(x, v, Dv, D^2v) \leq 0 \quad \text{in } \Omega$$

و روی مرز $\partial\Omega$ داشته باشیم $u \leq v$. آنگاه اگر F در اصل مقایسه صدق کند

خواهیم داشت $u \leq v$ در داخل Ω.

فرض کنیم u و v هر دو C^2 باشند و $u-v$ در یک نقطه از Ω مثبت شود بنابراین

$$0 < \alpha = \max_{\bar{\Omega}} (u-v) = u(x_*) - v(x_*)$$

$\Leftarrow$ x_* نقطه درونی است. چون روی $\partial\Omega$ داریم $u-v \leq 0$.

بنابراین داریم:

$$D(u-v)(x_*) = 0$$

$$D^2(u-v)(x_*) \leq 0$$

$$F(x_*, u(x_*), Du(x_*), D^2u(x_*)) \geq 0 \geq F(x_*, v(x_*), Dv(x_*), D^2v(x_*))$$

$$\geq F(x_*, v(x_*), Du(x_*), D^2u(x_*))$$

اگر F نسبت به مولفه u یک تابع نزولی باشد به تناقض می‌رسیم و اصل مقایسه برقرار است.

مشکل اصلی: u و v لزوماً مشتق‌پذیر نیستند. اگر φ و ψ در تابع آزمون باشند که φ از بالا به u تماس داشته باشد و ψ از پایین به v. φ و ψ به راحتی قابل مقایسه در همسایگی x^* نیستند.

علاوه بر این لزومی ندارد که $\phi \neq J^{2,+}u(x_*)$ و همچنین $\phi \neq J^{2,-}v(x_*)$.

<u>لم:</u> فرض کنید Ω یک زیرمجموعه کراندار $\mathbb{R}^n$ باشد و $u \in USC$ و $v \in LSC$ و

$$M_\alpha = \max_{\Omega \times \Omega} \left[u(x) - v(y) - \frac{\alpha}{2}|x-y|^2 \right]$$

اگر $M_\alpha < \infty$ برای α بزرگ و (x_α, y_α) نقطه ماکسیمم باشد، آنگاه

(1) $\lim_{\alpha \to \infty} \alpha |x_\alpha - y_\alpha|^2 = 0$

(2) اگر $x_\alpha, y_\alpha \to x_*$ آنگاه

$\lim_{\alpha \to \infty} M_\alpha = \max_{\Omega} (u - v) = u(x_*) - v(x_*)$

$$\varphi(x,y) = u(x) - v(y) - \frac{\alpha}{2}|x-y|^2$$

یک لحظه فرض کنیم u, v هر دو C^2 باشند،

$$D_x\varphi(x_\alpha, y_\alpha) = D_y\varphi(x_\alpha, y_\alpha) = 0$$

$$\left.\begin{pmatrix} D_{xx}\varphi & D_{xy}\varphi \\ D_{yx}\varphi & D_{yy}\varphi \end{pmatrix}\right|_{(x_\alpha, y_\alpha)} \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad Du(x_\alpha) = \alpha(x_\alpha - y_\alpha) = Dv(y_\alpha)$$

$$\begin{pmatrix} D^2u(x_\alpha) & \alpha I \\ \alpha I & -D^2v(y_\alpha) \end{pmatrix} \leq 0 \Longrightarrow D^2u(x_\alpha) \leq D^2v(y_\alpha)$$

لم ۲ فرض کنید $\mathcal{O}_1$ و $\mathcal{O}_2$ زیرمجموعه‌ای $\mathbb{R}^{N_1}$ و $\mathbb{R}^{N_2}$ باشند و $u_i \in USC(\mathcal{O}_i)$

و قرار دهید $w(x_1,x_2) = u_1(x_1) + u_2(x_2)$ برای $(x_1,x_2) \in \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$

و فرض کنید $(p_1, p_2, X) \in J^{2,+} w(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$. آنگاه برای هر $\epsilon > 0$

ماتریس‌های $X_1 \in S(N_1)$ و $X_2 \in S(N_2)$ وجود دارند که

$$(p_i, X_i) \in \overline{J}^{2,+} u_i(\hat{x}_i)$$

$$-\left(\frac{1}{\epsilon} + \|X\|\right) I \leq \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} \leq X + \epsilon X^2$$

تعریف :

$$\overline{J}^{2,+}u(x) = \left\{ (p,M) \;:\; \exists\,(x_m, p_m, M_m) \longrightarrow (x,p,M),\ (p_m, M_m) \in J^{2,+}u(x_m) \right\}$$

$$\omega(x,y) = u(x) - v(y)$$

ادامه اثبات اصل مقایسه :

$$\omega(x,y) - \frac{\alpha}{2}|x-y|^2 \leq \omega(x_\alpha, y_\alpha) - \frac{\alpha}{2}|x_\alpha - y_\alpha|^2$$

$$P_1 = P_2 = \alpha(x_\alpha - y_\alpha) \quad , \quad X = \alpha \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}$$

$$\omega(x,y) \leq \omega(x_\alpha, y_\alpha) + P_1(x - x_\alpha) - P_2(y - y_\alpha) + \frac{1}{2}(x - x_\alpha, y - y_\alpha)\, X \begin{pmatrix} x - x_\alpha \\ y - y_\alpha \end{pmatrix}$$

$$(P_1, -P_2, X) \in J^{2,+}\omega(x_\alpha, y_\alpha)$$

بنابر لم 2 ماتریس‌های M_1 و M_2 وجود دارند که

$$(P_1, M_1) \in \overline{J}^{2,+} u(x_\alpha) \quad , \quad (P_2, M_2) \in \overline{J}^{2,-} v(y_\alpha)$$

$$-\left(\frac{1}{\epsilon} + 2\alpha\right)\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & -M_2 \end{pmatrix} \le \alpha(1 + 2\epsilon\alpha)\begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}$$

$$\epsilon = 1/\alpha \implies -3\alpha\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & -M_2 \end{pmatrix} \le 3\alpha\begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{?} \quad M_1 \le M_2$$

$$F(x_\alpha, u(x_\alpha), P_1, M_1) \ge 0 \ge F(y_\alpha, v(y_\alpha), P_2, M_2)$$

F بیضوی است . $\longrightarrow \ \ge F(y_\alpha, v(y_\alpha), P_1, M_1)$

شرط لازم برای برقراری اصل مقایسه: مقدار $\gamma > 0$ وجود دارد که

$$\gamma(r-s) \leq F(x,s,p,M) - F(x,r,p,M)$$

برای هر $r \geq s$ و $(x,p,M) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \times S(n)$ برقرار باشد.

ادامه اثبات:

$$F(y_\alpha, v(y_\alpha), P_1, M) - F(y_\alpha, u(x_\alpha), P_1, M) \geq \gamma(u(x_\alpha) - v(y_\alpha))$$

$$u(x_\alpha) - v(y_\alpha) - \frac{\alpha}{2}|x_\alpha - y_\alpha|^2 = \max_{\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}} \left(u(x) - v(y) - \frac{\alpha}{2}|x-y|^2\right)$$

$$\geq u(x_*) - v(x_*) = \delta > 0$$

$$F(x_\alpha, u(x_\alpha), P_1, M) \geq 0 \geq F(y_\alpha, u(x_\alpha), P_1, M) + \gamma\delta$$

بنابر لم ۱ وقتی $\alpha \to \infty$ داریم $x_\alpha, y_\alpha \to x_*$ از طرفی

$$\limsup_{\alpha \to \infty} u(x_\alpha) \leq u(x_*)$$

اگر برای یک زیردنباله α داشته باشیم $u(x_\alpha) \to r$ آنگاه

$$F(x_*, r, P_1, M) \geq F(x_*, r, P_1, M) + \gamma\delta .$$

نکته: به جای شرط نزولی بودن F نسبت به r می‌توان شرط زیر را جایگزین کرد که از شرط بیضوی بودن F قوی‌تر

$$F(x,r,\alpha(x-y),M) - F(y,r,\alpha(x-y),N) \geq \omega\left(\alpha|x-y|^2+|x-y|\right)$$

برای هر $x,y\in\Omega$ ، $r\in\mathbb{R}$ ، $M,N\in S(n)$

$$-3\alpha\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & -N \end{pmatrix} \leq 3\alpha\begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}$$

که $\omega:[0,\infty]\to[0,\infty]$ در شرط $\omega(0+)=0$ صدق می‌کند.

تمرین: نشان دهید از شرط بالا می‌توان بیضوی F را نتیجه گرفت.

مباحثی در PDE

جلسه پنجم ۹۶/۷/۱۰

عملگرهای بیضوی یکنواخت : if $\exists\ \lambda, \Lambda > 0$

$$(1) \quad \lambda \|N\| \leq F(M+N, P, u, x) - F(M, P, u, x) \leq \Lambda \|N\|$$

$$\forall M \in S(n) \quad \forall N \geq 0$$

<u>گزاره</u> : تعریف بالا معادل است با اینکه

$$(2) \quad F(M+N, x) \leq F(M, x) + \Lambda \|N^+\| - \lambda \|N^-\|$$

که $N = N^+ - N^-$ و $N^+ N^- = 0$, $N^+, N^- \geq 0$.

<u>تذکر</u> : نمایش فوق برای هر ماتریس متقارن N یکتا است .

اثبات:

$(2) \Longrightarrow (1)$

فرض کنید $N \geq 0$، آنگاه از (2) نتیجه می‌شود که

$$\left.\begin{aligned} &F(M+N,x) - F(M,x) \leq \Lambda \|N\| \\ &F(\underbrace{M-N}_{M},x) - F(\underbrace{M}_{M+N},x) \leq -\lambda \|N\| \end{aligned}\right\} \Longrightarrow (1)$$

بعکس $(1) \Longrightarrow (2)$ فرض کنید $N = N^+ - N^-$

$$\left.\begin{aligned} &F(M+N^+,x) - F(M,x) \leq \Lambda \|N^+\| \\ &\lambda \|N^-\| \leq F(M+N^+,x) - F(M+N^+-N^-,x) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow (2)$$

نکته: به طور معادل توابع بیضوی یکنواخت را به صورت زیر می‌توان بیان کرد:

$$\lambda\, tr(N) \le F(M+N,x) - F(M,x) \le \Lambda\, tr(N) \qquad \forall\ N \ge 0$$

مثال: $F(M,x) = \sum_{i,j} a_{ij}(x) m_{ij} + f(x)$ اگر تمام مقادیر ویژه ماتریس $A = [a_{ij}]$ در بازه $[\lambda, \Lambda]$ باشد، آنگاه F یک عملگر بیضوی (یکنواخت) با ثابت‌های λ و Λ است.

$$F(M+N,x) - F(M,x) = \sum a_{ij} n_{ij} = tr(AN) \le \Lambda\, tr N$$

$$\lambda I \le A \le \Lambda I$$

مثال: $L^\alpha u = \sum a_{ij}^\alpha u_{ij} + \sum b_i^\alpha u_i + c^\alpha u$ ، $F(D^2u, Du, u, x) = \sup\limits_{\alpha} L^\alpha u$

اگر به ازای هر α ، مقادیر ویژه $A^\alpha = [a_{ij}^\alpha]$ در بازه $[\lambda, \Lambda]$ باشند آنگاه F یک عملگر بیضوی با ثابت‌های λ ، Λ است.

مثل درس قبل اگر به جای $\sup$ ، $\inf$ بگذاریم باز یک عملگر بیضوی خواهیم داشت و همینطور $\inf\limits_{\beta} \sup\limits_{\alpha} L^{\alpha\beta} u$.

مثال: $F(D^2u) = \Delta u - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)^-$. منظور از $v^- = \max\{-v, 0\}$.

$$A^\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$F = \inf_{1 \le \alpha \le 2} \underbrace{tr(A^\alpha D^2 u)}_{\alpha u_{11} + u_{22} + \cdots + u_{nn}}$$

$$= \Delta u + (\alpha - 1) u_{11}$$

مثال:

$$A^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \alpha & & & & 0 \\ & \beta & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$F(D^2u) = \sup_{1\le\alpha\le 2}\ \inf_{1\le\beta\le 2}\ \mathrm{tr}(A^{\alpha\beta}D^2u)$$

$$= \Delta u + \sup_{\alpha}\ \inf_{\beta}\ \left[(\alpha-1)\,u_{11} + (\beta-1)\,u_{22}\right]$$

$$= \Delta u + (u_{11})^{+} - (u_{22})^{-}$$

مثال: عملگرهای Pucci

$$\mathcal{M}^-(M) = \mathcal{M}^-(M,\lambda,\Lambda) = \inf_{A\in\mathcal{A}_{\lambda,\Lambda}} tr(AM)$$

$\mathcal{A}_{\lambda,\Lambda} =$ خانواده همه ماتریس‌های متقارن که مقادیر ویژه آن‌ها بین λ و Λ است.

$$\mathcal{M}^+(M) = \mathcal{M}^+(M,\lambda,\Lambda) = \sup_{A\in\mathcal{A}_{\lambda,\Lambda}} tr(AM)$$

واضح است که $\mathcal{M}^-$ و $\mathcal{M}^+$ به ترتیب عملگرهای مقعر و محدب هستند.

نکته: تعریف عملگر بیضوی را به صورت زیر می‌توان نوشت

$$\mathcal{M}^-(N) \leq F(M+N,x) - F(M,x) \leq \mathcal{M}^+(N)$$

خواص عملگرهای پوچی :

(1) $\mathcal{M}^-(N) \leq \mathcal{M}^+(N)$

(2) $\lambda' \leq \lambda \leq \Lambda \leq \Lambda' \Rightarrow \mathcal{M}^-(N,\lambda',\Lambda') \leq \mathcal{M}^-(N,\lambda,\Lambda) \leq \mathcal{M}^+(N,\lambda,\Lambda) \leq \mathcal{M}^+(N,\lambda',\Lambda')$

(3) $\mathcal{M}^+(-N) = -\mathcal{M}^-(N)$

(4) $\mathcal{M}^\pm(\alpha N) = \alpha \mathcal{M}^\pm(N) \,, \quad \alpha \geq 0$

(5) $\mathcal{M}^+(M) + \mathcal{M}^-(N) \leq \mathcal{M}^+(M+N) \leq \mathcal{M}^+(M) + \mathcal{M}^+(N)$

(6) $N \geq 0 \Rightarrow \lambda \|N\| \leq \mathcal{M}^-(N) \leq \mathcal{M}^+(N) \leq n\Lambda \|N\|$

$$\lambda \operatorname{tr} M = \operatorname{tr}(\lambda M) \leq \inf \operatorname{tr}(AM) \leq \sup \operatorname{tr}(AM) \leq \Lambda \operatorname{tr} M \leq n\Lambda \|M\|$$

$$\lambda I \leq A \leq \Lambda I$$

تذکر: $\|N\|$ در عبارت (6) نرم عملگری ماتریس است که برابر بزرگترین مقدار ویژه A خواهد بود. (A متقارن است)

تعریف: فرض کنید f یک تابع پیوسته در Ω باشد و $0<\lambda,\Lambda$ مقادیر ثابت.

$\underline{S}=S^-(\lambda,\Lambda,f)$ را مجموعه همه جوابهای ابرین لزجی

$$\mathcal{M}^+(D^2u,\lambda,\Lambda)\geq f$$

تعریف می‌کنیم. همچنین $S^+(\lambda,\Lambda,f)=\overline{S}$ را مجموعه همه جوابهای زیرین لزجی

$$\mathcal{M}^-(D^2u,\lambda,\Lambda)\leq f$$

قرار می‌دهیم.

$$S(\lambda,\Lambda,f)=\underline{S}(\lambda,\Lambda,f)\cap\overline{S}(\lambda,\Lambda,f)$$

$$\inf_{\lambda I\leq[a_{ij}]\leq\Lambda I}\sum a_{ij}u_{ij}=\mathcal{M}^-(D^2u)\leq f\leq\mathcal{M}^+(D^2u)=\sup_{\lambda I\leq[a_{ij}]\leq\Lambda I}\sum a_{ij}u_{ij}$$

انتظار داریم فضای $S(f)$ جوابهای معادلات خطی بیضوی با ثابتهای λ و Λ باشند.

$$S^*(\lambda,\Lambda,f) = \underline{S}(\lambda,\Lambda,-|f|) \cap \overline{S}(\lambda,\Lambda,|f|)$$

:خواص

(1) $\lambda' \leq \lambda \leq \Lambda \leq \Lambda' \implies \underline{S}(\lambda,\Lambda) \subseteq \underline{S}(\lambda',\Lambda')$

$$\overline{S}(\lambda,\Lambda) \subseteq \overline{S}(\lambda',\Lambda')$$

(2) $u \in \underline{S}(f) \implies -u \in \overline{S}(-f)$

(3) $u \in \underline{S}(f)$, $\varphi \in C^2(\Omega)$ s.th. $\mathcal{M}^+(D^2\varphi) \leq g(x)$

$$\implies u-\varphi \in \underline{S}(f-g)$$

$$\mathcal{M}^+(D^2(u-\varphi)) \geq \mathcal{M}^+(D^2u) + \mathcal{M}^-(-D^2\varphi)$$

$$= \mathcal{M}^+(D^2u) - \mathcal{M}^+(D^2\varphi) \geq f-g$$

(4) $u,v \in \underline{S}(f) \Longrightarrow \sup(u,v) \in \underline{S}(f)$

(5) $u,v \in \overline{S}(f) \Longrightarrow \inf(u,v) \in \overline{S}(f)$

(6) مجموعه‌های $\underline{S}(f)$، $\overline{S}(f)$، $S(f)$، و $S^*(f)$ بسته هستند. (تحت همگرایی یکنواخت روی زیرمجموعه‌های فشرده Ω)

__گزاره:__ فرض کنید u در رابطه $F(D^2u,x) \geq f(x)$ صدق کند آنگاه

$$u \in \underline{S}\left(\lambda/n, \Lambda, f(x) - F(0,x)\right)$$

به علاوه اگر $\varphi \in C^2(\Omega)$ باشد آنگاه

$$u - \varphi \in \underline{S}\left(\lambda/n, \Lambda, f(x) - F(D^2\varphi(x), x)\right)$$

باید ثابت کنیم:

$$M^+(D^2(u-\varphi)) \geq f - F(D^2\varphi, x)$$

اگر تابع ψ از بالا به $u-\varphi$ در نقطه x_0 تماس داشته باشد باید نشان دهیم

$$M^+(D^2\psi(x_0)) \geq f(x_0) - F(D^2\varphi(x_0), x_0)$$

از اینکه $\varphi+\psi$ از بالا به u در نقطه x_0 تماس دارد در نتیجه داریم:

$$F(D^2(\varphi+\psi)(x_0), x_0) \geq f(x_0)$$

بنابر تعریف عملگر بیضوی داریم:

$$F(D^2(\varphi+\psi)(x_0), x_0) - F(D^2\varphi(x_0), x_0) \leq M^+(D^2\psi(x_0))$$

که همان رابطه بالا است.

مباحثی در PDE

جلسه‌ی ششم ۹۶/۷/۱۵

تعریف. فرض کنید $u:\Omega\to\mathbb{R}$ پیوسته و $A\subset\Omega$ باز است.
برای $x_0\in A$، اگر p یک سهمی محدب به صورت

$$p(x)=\frac{M}{2}|x|^2+\ell(x)+\ell_0 \qquad M>0$$

که u را از بالا در نقطه x_0 تماس داشته باشد (داخل A)، تعریف می‌کنیم

$$\overline{\Theta}(u,A)(x_0):=\inf\{M:\ p \text{ به صورت فوق باشد}\}$$

$\overline{\Theta}(u,A)(x_0)=\infty$ اگر سهمی p با شرایط فوق وجود نداشته باشد تعریف می‌کنیم.

به طور مشابه اگر سهمی‌های مقعر $p(x)=\frac{-M}{2}|x|^2+\ell(x)+\ell_0$ $(M>0)$ را در نظر بگیریم $\underline{\Theta}(u,A)(x_0)\in[0,\infty]$ تعریف می‌شود. در نهایت

$$\Theta(u,A)(x_0)=\sup\{\overline{\Theta}(u,A)(x_0),\ \underline{\Theta}(u,A)(x_0)\}\in[0,\infty]$$

اگر $\bar{\Theta}(u,A)(x) < \infty$ می‌گوییم u در x_0، از بالا $C^{1,1}$ است.

... $\underline{\Theta}(u,A)(x) < \infty$ ------ ... از پایین --- ...

... $\Theta(u,A)(x) < \infty$ (برای یک سهمی‌گون مماسی A در x_0) $C^{1,1}$ است.

* نکته. اگر u در x_0، $C^{1,1}$ باشد، یعنی u در یک سهمی‌گون مماسی x_0 بین دو سهمی مماس قرار دارد پس حتماً u در x_0 مشتق‌پذیر است.

P

$h \in \mathbb{R}^n$ به اندازه کافی کوچک

$$\Delta_h^2 u(x_0) = \frac{u(x_0+h) + u(x_0-h) - 2u(x_0)}{|h|^2} \leq \frac{P(x_0+h) + P(x_0-h) - 2P(x_0)}{|h|^2}$$

خارج قسمت تفاضلی مرتبه دوم u در x_0

$$\Delta_h^2 P(x_0) \equiv M$$

پس برای $x_0 \in \Omega$، برای h به طوری‌که $\overline{B}_{|h|}(x_0) \subset \Omega$ داریم

$$-\underline{\Theta}(u, B_{|h|}(x_0))(x_0) \leq \Delta_h^2 u(x_0) \leq \overline{\Theta}(u, B_{|h|}(x_0))(x_0)$$

گزاره ۱. $1 < p \leq \infty$ و u در Ω پیوسته است. برای $\varepsilon > 0$ و $x \in \Omega$ تعریف می‌کنیم

$$\Theta(u, \varepsilon)(x) := \Theta(u, \Omega \cap B_\varepsilon(x))(x)$$

اگر $\Theta(u, \varepsilon) \in L^p(\Omega)$ آنگاه $D^2 u \in L^p(\Omega)$ و به علاوه

$$\|D^2 u\|_{L^p(\Omega)} \leq 2 \, \|\Theta(u, \varepsilon)\|_{L^p(\Omega)}$$

اثبات: در فصل ۷ بیان خواهد شد.

گزاره 2. فرض کنید u در Ω پیوسته و $B \subset \Omega$ همبند و محدب باشد. به علاوه

$$\exists \varepsilon>0 \quad \exists K>0 \quad \forall x \in \overline{B} \quad \Theta(u,\varepsilon)(x) \leq K \qquad (*)$$

در این صورت $u \in C^{1,1}(\overline{B})$ و ثابت $C = C(n) > 0$

$$|Du(x) - Du(y)| \leq C \, \|\Theta(u,\varepsilon)\|_{L^\infty(B)} \qquad \forall x,y \in \overline{B}$$

اثبات: طبق گزاره 1، $D^2 u \in L^\infty(B)$. به علاوه چون Θ در هر نقطه از $\overline{B}$ متناهی است
پس u در هر نقطه از $\overline{B}$ مشتق پذیر است. برای هر $1 \leq i \leq n$
$u_i \in W^{1,\infty}(B)$ به علاوه B محدب است پس u_i پیوسته است. به علاوه $\forall x,y \in \overline{B}$

$$|u_i(x) - u_i(y)| = \int_0^1 \frac{d}{dt} u_i(tx + (1-t)y)\, dt$$

$$= \sum_{j=1}^n \int_0^1 \partial_{ij} u(tx+(1-t)y)\, dt \, (x_j - y_j) \qquad \blacksquare$$

قضیه. فرض کنید $H:\bar{B}_d \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ تابعی لیپ‌شیتز است. در این صورت

a) H ت. ه. در B_d مشتق‌پذیر است.

b) اگر $A \subset B_d$ به طوری که $|B_d \setminus A| = 0$ و H در هر نقطه از A مشتق‌پذیر است در این صورت

$$|H(B_d)| \leq \left| \int_A \det DH \right|$$

DH دیفرانسیل H است.

تخمین Alexandroff_Bakelman_Pucci (ABP)

* مقدمات و نمادگذاری

$L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ آفین نامیده می‌شود هرگاه $L(x) = l(x) + l_0$

که l تابعی خطی و $l_0 \in \mathbb{R}$ است.

▪ فرض کنید $w: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ و $x_0 \in A$. اگر L تابعی آفین باشد که با w در نقطه x_0 و داخل A از پایین تماس داشته باشد، دراین صورت L (یا نمودار L) یک supporting hyperplane برای w در x_0 (داخل A) است.

▪ اگر A مجموعه‌ای باز و محدب باشد و w نیز تابعی محدب باشد، دراین صورت حتماً یک supp. hyper. برای w در هر نقطه از A وجود دارد.

$\left(\text{باز و محدب}\right)\quad B = \{(x,y):\ x\in A,\ \ y > w(x)\}$ و $(x_0\,, w(x_0))$

پس طبق فرم هندسی قضیه هان-باناخ تابع آفین $\tilde{L}: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ وجود دارد به طوریکه

$$\forall (x,y)\in B \qquad \tilde{L}(x_0, w(x_0)) \le \beta \le \tilde{L}(x,y)$$

$$\tilde{L}(x,y) = Lx + \alpha y + C$$

$L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ خطی و $\alpha, C \in \mathbb{R}$.

$$Lx_0 + \alpha w(x_0) + C \le \beta \le Lx + \alpha y + C \qquad \forall\, y > w(x)$$

$$\Rightarrow Lx_0 + \alpha w(x_0) + C \le \beta \le Lx + \alpha w(x) + C$$

فرض می‌کنیم $\alpha > 0$

$$L^*(x) := \frac{1}{\alpha}\big(\beta - C - L(x)\big)$$

$$L^*(x_0) = w(x_0) \qquad\qquad L^*(x) \le w(x)$$

تعریف. فرض کنید A باز و محدب باشد و $v: A \to \mathbb{R}$ پیوسته و کراندار باشد.

پوشش محدب v در A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$x \in A$

$$\Gamma(v)(x) := \sup \{ w(x) : \text{در } A \quad w \le v \quad \text{در } A \text{ محدب است.}\ w \}$$

$$= \sup \{ L(x) : \text{در } A \quad L \le v \quad \text{آفین است.}\ L \}$$

توجه کنید که $\Gamma(v)$ یک تابع محدب در A است. مجموعه زیر

$$\{ v = \Gamma(v) \} = \{ x \in A : \quad v(x) = \Gamma(v)(x) \}$$

contact set (نقاط تماس) نام دارد.

قضیه (تخمین ABP): فرض کنید B_d یک گوی باز به شعاع d در $\mathbb{R}^n$ است. $f: B_d \to \mathbb{R}$ پیوسته و کراندار است. همچنین $u \in \overline{S}(\lambda, \Lambda, f)$.

فرض کنید u در $\overline{B_d}$ پیوسته است و روی ∂B_d داریم $u \geq 0$. بنابراین اگر u را توسط صفر به خارج $\overline{B_d}$ توسعه دهیم روی B_{2d}، $u^- = \min\{-u, 0\}$ پیوسته خواهد بود.

اگر Γ_u پوشش محدب $-u^-$ در B_{2d} باشد در این صورت ثابت $C = C(n, \lambda, \Lambda) > 0$ وجود دارد به طوری که

$$\sup_{B_d} u \leq C\, d \left(\int_{B_d \cap \{u = \Gamma_u\}} (f^+)^n \right)^{\frac{1}{n}}$$

نتیجه. فرض کنید $u \in C(\overline{\Omega})$. در این صورت اگر

a) $u \in \overline{S}(\lambda, \Lambda, 0)$ و $u \geq 0$ روی $\partial\Omega$ آنگاه $u \geq 0$ در Ω.

b) $u \in \underline{S}(\lambda, \Lambda, 0)$ و $u \leq 0$ روی $\partial\Omega$ آنگاه $u \leq 0$ در Ω.

*لم ۱. فرض کنید $u \in \overline{S}(\lambda, \Lambda, f)$ در $B_\delta = B_\delta(0)$. f تابعی کراندار و φ تابعی محدب در B_δ هستند و $0 \le \varphi \le u$ در B_δ و $\varphi(0) = u(0) = 0$. در این صورت ثابت های $0 < r < 1$ و $C > 0$ که فقط به n ، λ و Λ وابسته اند ، وجود دارند به طوریکه

$$\forall x \in B_{r\delta} \qquad \varphi(x) \le C \left(\sup_{B_\delta} f^+ \right) |x|^2$$

*لم 2. فرض کنید u روی $\overline{B}_d$ پیوسته باشد و روی ∂B_d ، $u \ge 0$. Γ_u نیز مشابه صورت قضیه ABP تعریف می شود. فرض کنید $\Gamma_u \in C^{1,1}(\overline{B}_d)$. در این صورت زیر مجموعه $A \subset B_d$ موجود است به طوریکه $|B_d \setminus A| = 0$ و Γ_u برای هر $x \in A$ دوبار مشتق پذیر است و ثابت $C = C(n) > 0$ موجود است به طوریکه

$$\sup_{B_d} u^- \le C\, d \left(\int_A \det D^2 \Gamma_u \right)^{\frac{1}{n}}$$

لم 3. فرض کنید u در $\overline{B}_d$ پیوسته و روی ∂B_d، $u \geq 0$. Γ_u به طور مشابه.

$K>0$ و $0<\varepsilon<d$ ثابت هستند. فرض کنید برای هر $x_0 \in \overline{B}_d \cap \{u=\Gamma_u\}$

یک سهمی محدب $P(x)=\frac{K}{2}|x|^2+\ell(x)+\ell_0$ وجود دارد که با Γ_u (از بالا) در x_0 و داخل $B_\varepsilon(x_0)$

در تماس است. به عبارت دیگر

$$\overline{\Theta}\left(\Gamma_u, B_\varepsilon(x_0)\right)(x_0) \leq K \qquad \forall\ x_0 \in \overline{B}_d \cap \{u=\Gamma_u\}$$

در این صورت $\Gamma_u \in C^{1,1}(\overline{B}_d)$ و بنابراین $A \subset B_d$ وجود دارد که $|B_d \setminus A|=0$

و Γ_u در هر نقطه از A دوبار مشتق‌پذیر است. به علاوه $\exists\ C=C(n)>0$ به طوریکه

$$\sup_{B_d} u^- \leq C\, d \left(\int_{A\cap\{u=\Gamma_u\}} \det D^2\Gamma_u\right)^{\frac{1}{n}}$$

مباحثی در PDE

جلسه هفت ۹۶/۷/۱۷

قضیه (تخمین ABP): فرض کنید B_d یک گوی باز به شعاع d در $\mathbb{R}^n$ است

$f : B_d \to \mathbb{R}$ پیوسته و کراندار است. همچنین $u \in \overline{S}(\lambda, \Lambda, f)$.

فرض کنید u در $\overline{B_d}$ پیوسته است و روی ∂B_d داریم $u \geq 0$. بنابراین اگر u را

توسط صفر به خارج $\overline{B_d}$ توسعه دهیم $u^- = \min\{-u, 0\}$ روی B_{2d} پیوسته خواهد بود.

اگر Γ_u پوش محدب $-u^-$ در B_{2d} باشد در این صورت ثابت $C = C(n, \lambda, \Lambda) > 0$

وجود دارد به طوریکه

$$\sup_{B_d} u^- \leq C\, d \left(\int_{B_d \cap \{u = \Gamma_u\}} (f^+)^n \right)^{1/n}$$

*لم ۱. فرض کنید $u \in \overline{S}(\lambda, \Lambda, f)$ در $B_\delta = B_\delta(0)$. f تابعی کراندار و φ تابعی محدب

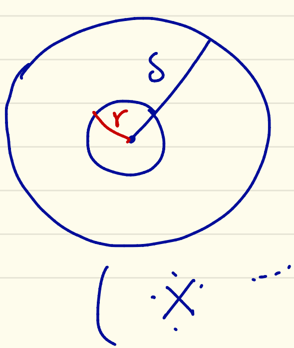
در B_δ هستند و $0 \le \varphi \le u$ در B_δ و $\varphi(0) = u(0) = 0$. در این صورت

ثابت های $0 < r < 1$ و $C > 0$ که فقط به n، λ و Λ وابسته اند، وجود دارند

به طوری که

$$\forall x \in B_{r\delta} \qquad \varphi(x) \le C\left(\sup_{B_\delta} f^+\right)|x|^2 \qquad (*)$$

اثبات: $0 < r < \frac{\delta}{4}$ $\qquad \bar{C} = \frac{1}{r^2}\sup_{B_r}\varphi$



چون φ محدب است پس $x_0 \in \partial B_r$ وجود دارد به طوری که

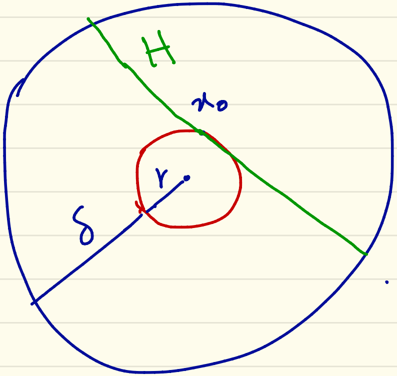
$\varphi(x_0) = \bar{C} r^2$. ($\varphi$ روی $\overline{B_r}$ max دارد). اگر برای

هر $y \in \partial B_r$ $\quad \max_{\partial B_r} \varphi \le M < \bar{C} r^2 \Leftarrow \varphi(y) < \bar{C} r^2$

$\varphi(x_0)=\bar{C}r^2$

مجموعه $\{x\in B_\delta : \varphi(x)\le \bar{C}r^2\}$ محدب و شامل B_r است.

اگر H ابرصفحه مماس بر B_r در نقطه x_0 باشد می‌توان دید

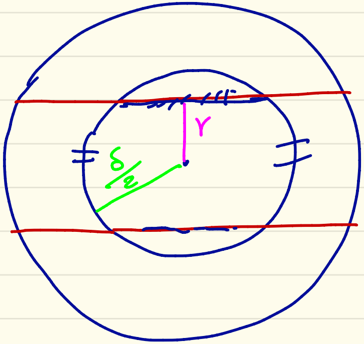


$x\in H\cap B_\delta$

$\varphi(x)\ge \bar{C}r^2$

برای سادگی فرض می‌کنیم $x_0=(0,\dots,0,r)$ و

$H=\{x\in \mathbb{R}^n ;\ x_n=r\}$ که $x=(x',x_n)$ ، $x'\in\mathbb{R}^{n-1}$.



مجموعه $A=B_{\delta/2}\cap\{-r<x_n<r\}$

$$\partial A = A_1\cup A_2\cup A_3$$

$A_1=\overline{B}_{\delta/2}\cap\{x_n=r\}$ $A_2=\overline{B}_{\delta/2}\cap\{x_n=-r\}$

$x\in A_1 \Rightarrow \varphi(x)\ge \bar{C}r^2$

$A_3=\{|x|=\frac{\delta}{2},\ -r\le x_n\le r\}$

$$p(x) = \frac{\bar{c}}{8}(x_n + r)^2 - 4\bar{c}\,\frac{r^2}{\delta^2}\,|x'|^2$$

می‌خواهیم نشان دهیم در ∂A $\quad p \le \varphi$

$\checkmark\ x \in A_2 \Rightarrow p(x) \le 0 \le \varphi(x)$

$\checkmark\ x \in A_3 \Rightarrow \dfrac{\delta^2}{4} = |x|^2 \le |x'|^2 + r^2 \le |x'|^2 + \dfrac{\delta^2}{16}$

$\Rightarrow |x'|^2 \ge \dfrac{3}{16}\delta^2 \Rightarrow 4\bar{c}\,\dfrac{r^2}{\delta^2}|x'|^2 \ge \dfrac{3}{4}\bar{c}r^2$

$\Rightarrow p(x) \le \dfrac{\bar{c}}{2}r^2 - \dfrac{3}{4}\bar{c}r^2 < 0$

از طرفی در A_3 $\quad \varphi \ge 0 \Leftarrow x \in A_3 : p \le \varphi$

$x \in A_1 \quad , \bar{c}r^2 \le \varphi(x) \qquad p(x) = \dfrac{\bar{c}}{2}r^2 - \dots < \bar{c}r^2$

$$\Rightarrow \quad x \in \partial A \qquad p(x) \leq \varphi(x) \leq u(x)$$

$$p(0) > \varphi(0) = u(0) = 0$$

$$M := \max_{x \in A} \{ p(x) - u(x) \} \geq 0$$

$$\exists y \in A \qquad p(y) - u(y) = M$$

$$\tilde{p}(x) = p(x) - M$$

در این صورت سهمی $\tilde{p}$ ، با u از پایین در نقطه y تماس دارد.

اکنون $u \in \overline{S}(\lambda, \Lambda, f)$ پس

$$\mathcal{M}^-(D^2 \tilde{p}) \leq f(y)$$

$$\Rightarrow \mathcal{M}^-(D^2 p) \leq f(y) \leq \sup_{B_\delta} f^+$$

$$\mathcal{M}^-(N) = \inf_{A \in \mathcal{A}_{[\lambda,\Lambda]}} \operatorname{trace} AN = \lambda \sum_{e_i > 0} e_i + \Lambda \sum_{e_i < 0} e_i$$

$$p(x) = \frac{\bar C}{8}(x_n + r)^2 - 4\bar C \frac{r^2}{\delta^2}|x'|^2$$

$$\Rightarrow \quad p_{ij} = 0 \quad \forall\, i \neq j \qquad p_{ii} = \frac{-8\bar C r^2}{\delta^2} \qquad 1 \le i \le n-1$$

$$p_{nn} = \frac{\bar C}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{M}^-(D^2 p) = \lambda \frac{\bar C}{4} - \Lambda (n-1) \frac{8 \bar C r^2}{\delta^2}$$

$$\mathcal{M}^-(D^2 p) \ge \lambda \frac{\bar C}{8} \quad \Leftarrow \quad r \le \frac{\delta}{8}\sqrt{\frac{\lambda}{(n-1)\Lambda}}$$ اگر قرار دهیم

$$\Rightarrow \quad \bar C \le \frac{8}{\lambda} \sup_{B_\delta} f^+ \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r^2} \sup_{B_r} \varphi \le \frac{8}{\lambda} \sup_{B_\delta} f^+$$

اگر قرار دهیم $r = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{\lambda}{(n-1)\Lambda}}$ و $r = |x|$ در این صورت برای هر $x \in B_{2\delta}$

نامساوی $(*)$ به دست می‌آید. ∎

* لم 2. فرض کنید u روی $\overline{B}_d$ پیوسته باشد و روی ∂B_d ، $u \geq 0$. Γ_u نیز مشابه صورت
قضیه ABP تعریف می‌شود. فرض کنید $\Gamma_u \in C^{1,1}(\overline{B}_d)$. در این صورت زیر مجموعه $A \subset B_d$
موجود است به طوریکه $|B_d \setminus A| = 0$ و Γ_u برای هر $x \in A$ دوبار مشتق پذیر است و
ثابت $C = C(n) > 0$ موجود است به طوریکه

$$\sup_{B_d} u^- \leq C\, d \left(\int_A \det D^2 \Gamma_u \right)^{\frac{1}{n}}$$

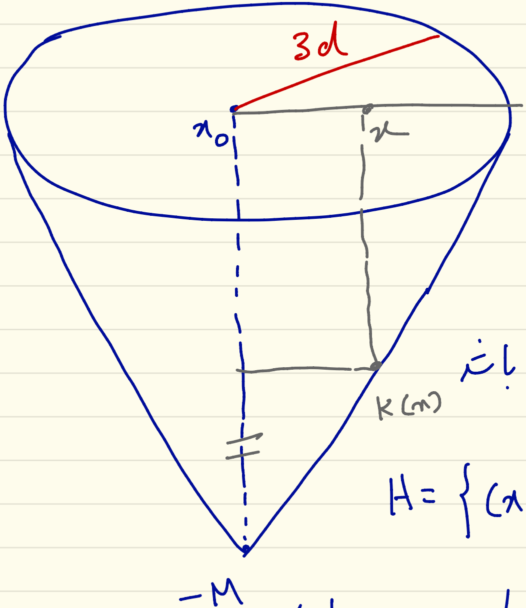
اثبات: فرض می‌کنیم $u^- \not\equiv 0$.

$$M := \sup_{B_d} u^- = u(x_0) > 0$$

برای یک $x_0 \in B_d$ (دقت کنید روی ∂B_d ، $u^- = 0$)

$(x_0, -M)$

$$M = u(x_0) = \sup_{B_d} u^- \qquad x_0 \in B_d$$



مخروطی با رأس $(x_0, -M)$ و قاعده $\partial B_{3d}(x_0) \times \{0\}$ در $\mathbb{R}^{n+1}$ را در نظر بگیرید.

فرض کنید مخروط فوق نمودار تابعی مانند K باشد.

برای هر $\xi \in \mathbb{R}^n$ به طوریکه $|\xi| < \frac{M}{3d}$ باشد

$$H = \{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x_{n+1} = L(x) = -M + \xi(x - x_0)\}$$

ابرصفحه H، یک supp. hyper. برای K در نقطه x_0 و داخل $B_{3d}(x_0)$ است.

$$L(x) \le K(x)$$

$$\tilde{L}(x) = L(x) - M$$

$$\forall x \in B_d \qquad \tilde{L}(x) = -2M + \xi(x - x_0) < -2M + \sup u^- = -M$$

$$\leq -u^-(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} |\xi| < \dfrac{M}{3d} = \dfrac{\sup u^-}{3d} \\[2ex] x - x_0 < 3d \end{array}\right\}$$

پس یک ابر صفحه موازی H که آن را

H' می نامیم وجود دارد که یک supp. hyper.

برای $-u^-$ در نقطه‌ای مانند $x^* \in B_d$ است.

$$(\tilde{L} + u^-)(x_0) = -M < 0$$

$$\forall x \in \partial B_d \quad (\tilde{L} + u^-)(x) < -M$$

پس طبق تعریف Γ_u ، H' یک supp. hyper. برای Γ_u در نقطه x^*

و داخل B_d است . چون Γ_u مشتق پذیر است پس H' ابر صفحه مماس

بر نمودار Γ_u در x^* است بنابراین $\xi = \nabla\Gamma_u(x^*)$.

$$\Rightarrow \quad B_{\frac{M}{3d}}(0) \subset \nabla\Gamma_u(B_d)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{M^n}{d^n}\, C(n) \le |\nabla\Gamma_u(B_d)| \qquad (1)$$

از طرف طبق قضیه جلسه قبل مجموعه $A \subset B_d$ موجود است به طوریکه $|B_d \setminus A| = 0$ و

Γ_u در هر نقطه از A دوبار مشتق پذیر است و

$$|\nabla\Gamma_u(B_d)| \le C\int_A \det D^2\Gamma_u \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \quad \left(\sup_{B_d} u^-\right)^n \doteq M^n \le C(n)\, d^n \int_A \det D^2\Gamma^u$$

$\blacksquare$

قضیه (تخمین ABP): فرض کنید B_d یک گوی باز به شعاع d در $\mathbb{R}^n$ است. $f: B_d \to \mathbb{R}$ پیوسته و کراندار است. همچنین $u \in \overline{S}(\lambda, \Lambda, f)$.

فرض کنید u در $\overline{B_d}$ پیوسته است و روی ∂B_d داریم $u \geq 0$. بنابراین اگر u را توسط صفر به خارج $\overline{B_d}$ توسعه دهیم روی $u^- = \min\{-u, 0\}$ B_{2d} پیوسته خواهد بود.

اگر Γ_u پوش محدب $-u^-$ در B_{2d} باشد در این صورت ثابت $C = C(n, \lambda, \Lambda) > 0$ وجود دارد به طوری که

$$\sup_{B_d} u^- \leq C d \left(\int_{B_d \cap \{u = \Gamma_u\}} (f^+)^n \right)^{1/n}$$

اثبات قضیه: نشان می‌دهیم ثابت های $0<r<1$ و $C>0$ موجودند به طوریکه

$$(1)\quad \bar{\Theta}(\Gamma_u, B_{rd}(x_0))(x_0) \le C \sup_{B_d} f^+ \qquad \forall x_0 \in \bar{B}_d \cap \{u=\Gamma_u\}$$

$$(2)\quad \det D^2\Gamma_u(x_0) \le C\, f^+(x_0)^n \qquad \text{a.e. } x_0 \in B_d \cap \{u=\Gamma_u\}$$

فرض کنید $x_0 \in \bar{B}_d \cap \{u=\Gamma_u\}$ و L یک supp. hyper. برای Γ_u در x_0 است.

گزاره. $\Omega \subset \Omega_1$. $\bar{\Omega}$ و u یک supersol. برای $F(D^2u, x)=f(x)$ در Ω_1

v یک - - - - - - - $F(D^2v, x)=g(x)$ در Ω

و $v \ge u$ در $\partial\Omega \cap \Omega_1$.

$$w=\begin{cases} \inf(u,v) & \bar{\Omega} \\ u & \Omega_1\setminus\Omega \end{cases} \qquad h(x)=\begin{cases} \sup(f,g) & \Omega \\ f & \Omega_1\setminus\Omega \end{cases}$$

$\Rightarrow$ supersol. w $F(D^2w, x)=h$

پس $u \in \bar{S}(\lambda, \Lambda, f)$ $-u^- = \inf(u, 0)$ متعلق به $\bar{S}(\lambda, \Lambda, f^+ \chi_{B_d})$ است در B_{2d}.

$$\Rightarrow -u^- - L \in \bar{S}(\lambda, \Lambda, f^+ \chi_{B_d})$$

در B_{2d} برای هر $0 < \delta < d$ داریم $B_\delta(x_0) \subset B_{2d}$.

محدب

$$0 \leq \Gamma_u - L \leq -u^- - L \qquad ((\Gamma_u - L)(x_0) = (-u^- - L)(x_0) = 0)$$

*لم ۱. فرض کنید $u \in \bar{S}(\lambda, \Lambda, f)$ در $B_\delta = B_\delta(0)$. f تابعی کراندار و φ تابعی محدب در B_δ هستند و $0 \leq \varphi \leq u$ در B_δ و $\varphi(0) = u(0) = 0$. در این صورت ثابت های $0 < r < 1$ و $C > 0$ که فقط به n، λ و Λ وابسته اند، وجود دارند به طوری که

$$\forall x \in B_{r\delta} \qquad \varphi(x) \leq C \left(\sup_{B} f^+ \right) |x|^2 \qquad (*)$$

پس طبق لم ۱ : $0<r<1$ و $c>0$ موجود است به طوریکه

$$\Gamma_u(x) \leq C\left(\sup_{B_\delta(x_0)} f^+ \chi_{B_d}\right)|x-x_0|^2 + L(x)$$

برای هر $x\in B_{rd}(x_0)$. بنابراین

$$\bar{\Theta}\left(\Gamma_u, B_{rd}(x_0)\right)(x_0) \leq C\left(\sup_{B_\delta(x_0)} f^+ \chi_{B_d}\right)$$

$$\leq C \sup_{B_d} f^+ \Rightarrow (1)\checkmark$$

اکنون اگر اجازه دهیم $\delta\to 0$ ، دراین صورت $\bar{\Theta}(\Gamma_u, B_{rd}(x_0))(x_0) \leq C\, f^+(x_0)$

$$\Rightarrow \det D^2\Gamma_u \leq C\, f^+(x_0)^n \Rightarrow (2)\checkmark$$

مباحثی در PDE

جلسه هشت ۹۶/۷/۲۲

فصل 4 : نامساوی هارناک

$\Delta u = 0 \qquad \Omega$

$\forall \quad V \subset\subset \Omega \qquad \exists\, C = C(V,\Omega) > 0$

$$\sup_V u \le C \inf_V u$$

$Q_\ell(x_0)$ مکعب باز به مرکز x_0 و طول ℓ در $\mathbb{R}^n$

$$Q_\ell(x_0) = \prod_{i=1}^{n} \left(x_0^i - \frac{\ell}{2}, x_0^i + \frac{\ell}{2}\right) \qquad Q_\ell$$

لم ۱. برای ثابت های $\Lambda \leq \lambda \leq 0$ یک تابع هموار φ در $\mathbb{R}^n$ و ثابت های C و $M>1$ که فقط به n و λ و Λ وابسته اند وجود دارند به طوریکه

(1) $\varphi \geq 0$ در $\mathbb{R}^n \setminus B_{2\sqrt{n}}$

(2) $\varphi \leq -2$ در Q_3

(3) $\mathcal{M}^+(D^2\varphi, \lambda, \Lambda) \leq C\xi$

که $0 \leq \xi \leq 1$ تابعی پیوسته در $\mathbb{R}^n$ است، $\operatorname{supp} \xi \subseteq \overline{Q_1}$. به علاوه

(4) $\varphi \geq -M$ در $\mathbb{R}^n$.

اثبات: اگر α را تثبیت کنید. داریم

$$B_{\frac{1}{4}} \subset B_{\frac{1}{2}} \subset Q_1 \subset Q_3 \subset B_{\frac{3\sqrt{n}}{2}} \subset B_{2\sqrt{n}}$$

تعریف کنید:

$$\varphi(x) = M_1 - M_2 |x|^{-\alpha}$$

در $\mathbb{R}^n \setminus B_{\frac{1}{4}}$

$M_1, M_2 > 0$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\varphi|_{\partial B_{\frac{3\sqrt{n}}{2}}} \equiv -2$, $\varphi|_{\partial B_{2\sqrt{n}}} \equiv 0$

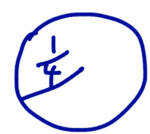
می‌توان φ را به طور هموار به $\mathbb{R}^n$ گسترش داد و (2) همچنان برقرار است.

در نقطه $(r, 0, 0, \dots, 0)$ $\left(r \geq \frac{1}{4}\right)$:

$$\partial_{ij}\varphi = 0 \qquad i \neq j$$

$$\partial_{11}\varphi = -M_2 \alpha (1+\alpha) r^{-\alpha-2}$$

$$\partial_{ii}\varphi = M_2 \alpha r^{-\alpha-2} \qquad i > 1$$



$$\Rightarrow \mathcal{M}^+(D^2\varphi, \lambda, \Lambda)^{(x)} = M_2 \left[\Lambda (n-1)\, \alpha\, |x|^{-\alpha-2} - \lambda\, \alpha (1+\alpha) |x|^{-\alpha-2} \right]$$

برای هر x که $|x| \geq \frac{1}{4}$

برای α مناسب

$$\mathcal{M}^+(D^2\varphi)(x) \leq 0$$

$$\alpha = \max\left\{1, \frac{(n-1)\Lambda}{\lambda} - 1\right\}$$

اکنون اگر تابع هموار $0 \leq \xi \leq 1$ طوری باشد که $\xi \equiv 1$ در $\overline{B}_{\frac{1}{4}}$، $\xi \equiv 0$ خارج $B_{\frac{1}{2}}$، آنگاه (3) برقرار خواهد بود. $\boxed{}$

Q_1 dyadic (دوتایی)

Q $\tilde{Q}$ جد Q است هرگاه Q از تجزیه $\tilde{Q}$ به 2^n مکعب بدست آمده باشد.

لم 2. فرض کنید $A \subset B \subset Q_1$ مجموعه های اندازه پذیر باشند و $0 < \delta < 1$ طوری باشد که

(a) $|A| \leq \delta$

(b) اگر Q یک مکعب دوتایی باشد به طوریکه $|A \cap Q| > \delta |Q|$ آنگاه $\tilde{Q} \subset B$.

در این صورت $|A| \leq \delta |B|$.

قضیه 3 (نامساوی هارناک): فرض کنید $u \in S^*(\lambda, \Lambda, f)$ به طوریکه $u \geq 0$ در Q_1 و f در Q_1 پیوسته و کراندار است. دراین صورت ثابت $C = C(n, \lambda, \Lambda) > 0$ وجود دارد به طوریکه

$$\sup_{Q_{\frac{1}{2}}} u \leq C \left(\inf_{Q_{\frac{1}{2}}} u + \|f\|_{L^n(Q_1)} \right)$$

لم 4: فرض کنید $u \in S^*(f)$ در $Q_{4\sqrt{n}}$، u در $\overline{Q}_{4\sqrt{n}}$ پیوسته و نامنفی باشد. f نیز در $Q_{4\sqrt{n}}$ پیوسته و کراندار باشد. فرض کنید $\inf_{Q_{\frac{1}{4}}} u \leq 1$, $\|f\|_{L^n(Q_{4\sqrt{n}})} \leq \epsilon_0$

دراین صورت ثابت جهانی $C > 0$ وجود دارد به طوریکه

$$\sup_{Q_{\frac{1}{4}}} u \leq C$$

ایده: $\lambda_u(t) = |\{u>t\} \cap Q_1|$

اثبات می شود برای یک ثابت جهانی C داریم $\lambda_u \equiv 0$ برای $t \geq C$.

گام اول: $\lambda_u(t) \leq C\, t^{-\varepsilon}$ (به کمک لم های ۱ و ۲ و تخمین ABP)

گام دوم: کاهش فوق برای تمام $C_1 - C_2 u$ ها $(C_1, C_2 > 0)$ در تمام مکعب ها اثبات می شود.

لم 5: ثابت های جهانی $\varepsilon_0>0$ ، $0<\mu<1$ و $M>1$ وجود دارند به طوریکه اگر $u\in \bar{S}(f)$ در $Q_{4\sqrt{n}}$ و $u\in C(\bar{Q}_{4\sqrt{n}})$ ، f روی $Q_{4\sqrt{n}}$ پیوسته و کراندار باشد به علاوه

$$u\geq 0 \qquad \text{در } Q_{4\sqrt{n}} \tag{5}$$

$$\inf_{Q_3} u \leq 1 \tag{6}$$

$$\|f\|_{L^n(Q_{4\sqrt{n}})} \leq \varepsilon_0 \tag{7}$$

در این صورت

$$\left|\{u\leq M\}\cap Q_1\right| > \mu . \tag{8}$$

لم 6 : فرض کنید u, f همانند لم 5 باشند. در این صورت برای $k=1,2,3,\ldots$ داریم

$$(9)\qquad \left|\{u>M^k\}\cap Q_1\right| \le (1-\mu)^k$$

که μ و M در لم 5 معرفی شده‌اند. بنابراین ثابت های جهانی d و $\varepsilon>0$ موجودند که

$$(10)\qquad \left|\{u\ge t\}\cap Q_1\right| \le d\,t^{-\varepsilon} \qquad \forall\, t\ge 0$$

از (9) به وضوح (10) نتیجه می شود ($d=(1-\mu)^{-1}$ و $\varepsilon>0$ طوری که

($1-\mu = M^{-\varepsilon}$

• نکته: اگر $u\in S^*(f)\subset \underline{S}(-|f|)$ آنگاه $u\in \overline{S}(|f|)$.

لم 7: فرض کنید $u\in \underline{S}(-|f|)$ در $Q_{4\sqrt{n}}$ و f در (7) و u در (10) صدق کنند. در این صورت ثابت های جهانی $M_0>1$ و $\sigma>0$ وجود دارند به طوریکه برای ε که در (10) معرفی شده است و $\nu=\frac{M_0}{M_0-\frac{1}{2}}>1$، روابط زیر برقرار هستند:

اگر j عددی طبیعی و x_0 طوری باشد که $|x_0|_\infty\leq \frac{1}{4}$ و

$$u(x_0)\geq \nu^{j-1}M_0$$

در این صورت $\sup\limits_{Q^j} u \geq \nu^j M_0$ که $Q^j=Q_{l_j}(x_0)\subset Q_1$ که در آن $l_j=\sigma M_0^{-\frac{\varepsilon}{n}}\nu^{-\frac{\varepsilon j}{n}}$.

لم 4 : فرض کنید $u \in S^*(f)$ در $Q_{4\sqrt{n}}$ ، u در $\overline{Q}_{4\sqrt{n}}$ پیوسته و نامنفی باشد

f نیز در $Q_{4\sqrt{n}}$ پیوسته و کراندار باشد. فرض کنید $\inf_{Q_{\frac{1}{4}}} u \le 1$ و $\|f\|_{L^n(Q_{4\sqrt{n}})} \le \varepsilon_0$

در این صورت ثابت جهانی $C>0$ وجود دارد به طوریکه

$$\sup_{Q_{\frac{1}{4}}} u \le C$$

اثبات : u,f در فرضیات لم 5 و 6 صدق می‌کنند پس در فرضیات لم 7 نیز صدق می‌کنند.

ادعا می‌کنیم

$$(*) \quad \sup_{Q_{\frac{1}{4}}} u \le \nu^{j_0-1} M_0$$

که در آن j_0 عددی طبیعی است که

$$\sum_{j \ge j_0} l_j \le \frac{1}{4}$$

فرض کنید $(*)$ برقرار نباشد بنابراین x_{j_0} وجود دارد به طوریکه

$$|x_{j_0}| \leq \frac{1}{8} \quad \text{و} \quad u(x_{j_0}) > r^{j_0-1} M_0$$

بنابراین طبق لم 7، نقطه x_{j_0+1} وجود دارد به طوریکه

$$u(x_{j_0+1}) \geq r^{j_0} M_0 \qquad |x_{j_0+1} - x_{j_0}|_\infty \leq \frac{l_{j_0}}{2}$$

اکنون دقت کنید که

$$|x_{j_0+1}| \leq \frac{l_{j_0}}{2} + \frac{1}{8} \leq \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

پس می‌توان دوباره از لم 7 استفاده کرد و x_{j_0+2} بدست می‌آید...

دنباله $\{x_j\}$ که $j \geq j_0$ بدست می‌آید به طوریکه

$$|x_{j+1} - x_j|_\infty \leq \frac{l_j}{2}$$

$$u(x_{j+1}) \geq r^j M_0$$

$$\left(|x_j|_\infty \leq \sum_{j_0}^{j-1} |x_{k+1} - x_k| + |x_{j_0}|_\infty \leq \sum_{j_0}^{j-1} \frac{l_k}{2} + \frac{1}{8} \leq \frac{1}{4} \right)$$

توجه کنید که $x_j \in \overline{Q}_{\frac{1}{2}}$ و $u(x_{j+1}) \geq r^j M_0$

$r>1$ و u در $\overline{Q}_{\frac{1}{2}}$ پیوسته بود.

مباحثی در PDE

جلسه ۵ - ۹۶/۷/۲۴

لم 5: ثابت های جهانی $\varepsilon_0 > 0$ ، $0 < \mu < 1$ و $M > 1$ وجود دارند به طوریکه اگر $u \in \bar{S}(f)$ در $Q_{4\sqrt{n}}$ و $u \in C(\bar{Q}_{4\sqrt{n}})$, f روی $Q_{4\sqrt{n}}$ پیوسته و کراندار باشد به علاوه

$$(5) \qquad u \geq 0 \qquad \text{در } Q_{4\sqrt{n}}$$

$$(6) \qquad \inf_{Q_3} u \leq 1$$

$$(7) \qquad \|f\|_{L^n(Q_{4\sqrt{n}})} \leq \varepsilon_0$$

در این صورت

$$(8) \qquad \left|\{u \leq M\} \cap Q_1\right| > \mu .$$

اثبات: فرض کنید φ همانند لم ۱ باشد و قرار دهید $w = u + \varphi$.

$\mathcal{M}^+(D^2\varphi) \le C\xi$. $\quad u \in \bar{S}(f) \Rightarrow w \in \bar{S}(|f| + C\xi)$

(اگر $u \in \bar{S}(f)$, $\varphi \in C^2(\Omega)$ که $\mathcal{M}^-(D^2\varphi) \ge g \Rightarrow u - \varphi \in \bar{S}(f - g)$)

توجه کنید که $B_{2\sqrt{n}} \subset Q_{4\sqrt{n}}$. پس $w \in C(\bar{B}_{2\sqrt{n}})$. از طرفی روی $\partial B_{2\sqrt{n}}$

$w \ge 0$. به علاوه $\inf_{Q_3} w \le -1$. بنابراین با استفاده از تخمین ABP

برای w در $B_{2\sqrt{n}}$:

$$1 \le \sup_{B_{2\sqrt{n}}} w^- \le C\left(\int_{B_{2\sqrt{n}} \cap \{w = \Gamma_w\}} (|f| + C\xi)^n\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Longrightarrow \quad 1 \leq C \, \|f\|_{L^n(Q_{4\sqrt{n}})} + C \, |Q_1 \cap \{w = \Gamma_w\}|^{\frac{1}{n}}$$

(زیرا $0 \leq \xi \leq 1$ و $\operatorname{supp} \xi \subset Q_1$)

بنابراین با درنظرگرفتن $\varepsilon_0 > 0$ به اندازه کافی کوچک

$$\frac{1}{2} \leq C \, |Q_1 \cap \{w = \Gamma_w\}|^{\frac{1}{n}} \leq C \, |\{u \leq M\} \cap Q_1|^{\frac{1}{n}}$$

اگر $x \in Q_1 \cap \{w = \Gamma_w\}$ آنگاه $w(x) = \Gamma_w(x) \leq 0 \Longrightarrow u(x) \leq -\varphi(x) \leq M$

$\blacksquare$

لم 6 : فرض کنید u, f همانند لم 5 باشند. در این صورت برای $k=1,2,3,\dots$ داریم

$$(9) \qquad \left|\{u>M^k\}\cap Q_1\right| \le (1-\mu)^k$$

که μ و M در لم 5 معرفی شده‌اند. بنابراین ثابت های جهانی d و $\varepsilon>0$ موجودند که

$$(10) \qquad \left|\{u\ge t\}\cap Q_1\right| \le d\,t^{-\varepsilon} \qquad \forall\, t\ge 0$$

از (9) به وضوح (10) نتیجه می‌شود ($d=(1-\mu)^{-1}$, $\varepsilon>0$ به طوریکه $1-\mu=M^{-\varepsilon}$)

اثبات : برای $k=1$ ، طبق لم 5 ، (9) برقرار است.

فرض کنید (9) برای $k-1$ برقرار باشد. قرار دهید

$$A=\{u>M^k\}\cap Q_1 \quad , \quad B=\{u>M^{k-1}\}\cap Q_1$$

کافی است نشان دهیم (*) $|A| \le (1-\mu)|B|$. توجه کنید که

$$|A| \le |\{u > M\} \cap Q_1| \le 1-\mu \qquad Q = Q_{\frac{1}{2^i}}(x_0) \quad (x_0 \in Q_1)$$

نشان می دهیم اگر Q یک مکعب دوتایی باشد به طوریکه $|A \cap Q| > (1-\mu)Q$ (1)

آنگاه $\tilde{Q} \subset B$. دراین صورت طبق لم (2) رابطه (*) اثبات می شود.

فرض کنید $\tilde{Q} \not\subset B$. پس $\tilde{x} \in \tilde{Q}$ هست که $u(\tilde{x}) \le M^{k-1}$. انتقال و

تابع زیر را در نظر بگیرید: $y \in Q_1$ $(x \in Q)$

$$\begin{cases} x = x_0 + \dfrac{1}{2^i}\, y \\[2ex] \tilde{u}(y) = \dfrac{u(x)}{M^{k-1}} \end{cases}$$

نشان می دهیم $\tilde{u}$ در شرایط لم 5 صدق می کند. اگر این را نشان دهیم آنگاه

$$\mu < |\{\tilde{u}(y) \le M\} \cap Q_1| = 2^{in}\, |\{u(x) < M^k\} \cap Q| = |Q \setminus A|$$

$$\Rightarrow |Q \setminus A| > \frac{\mu}{2^{in}} = \mu |Q|$$

که با رابطه (1) در تناقض است.

اکنون نشان می دهیم $\tilde{u}$ در شرایط لم 5 صدق می کند. از فصل 2 می دانیم:

$$\left(\alpha, r>0, \quad u \in \bar{S}(f), \quad v(y) = \alpha\, u\left(\frac{y}{r}\right) \Rightarrow v \in \bar{S}\left(\frac{\alpha}{r^2} f\left(\frac{y}{r}\right)\right)\right)$$

$$\Rightarrow \tilde{u}(y) \in \bar{S}\Big(\underbrace{\frac{1}{2^{2i} M^{k-1}} |f(x)|}_{\tilde{f}(y)}\Big)$$ در $Q_{4\sqrt{n}}$

توجه کنید که $\tilde{u} \geq 0$ و $\tilde{x} \in \tilde{Q}$ پس $\tilde{x} \in Q_{\frac{3}{2^i}}(x_0) \Leftarrow \tilde{y} \in Q_3$.

(اگر $Q_{\frac{1}{2^i}}(x_0) = \tilde{Q}$ آنگاه $\tilde{Q} \subset Q_{\frac{3}{2^i}}(x_0)$)

$$\Rightarrow \inf_{Q_3} \tilde{u} \leq \tilde{u}(\tilde{y}) = \frac{u(\tilde{x})}{M^{k-1}} \leq 1$$

از طرفی با توجه به اینکه $\|f\|_{L^n(Q_{4\sqrt{n}})} \leq \varepsilon_0$ به سادگی می توان دید

$$\|\tilde{f}\|_{L^n(Q_{4\sqrt{n}})} \leq \varepsilon_0 \qquad \blacksquare$$

قضیه (1) (نامساوی هارناک ضعیف): فرض کنید $u \in \overline{S}(f)$ در Q_1 و $u \geq 0$ در Q_1، f نیز در Q_1 پیوسته و کراندار است. دراین صورت ثابت های جهانی $C>0$ و p_0 وجود دارند به طوری که

$$\|u\|_{L^{p_0}(Q_{\frac{1}{4}})} \leq C\left(\inf_{Q_{\frac{1}{2}}} u + \|f\|_{L^n(Q_1)}\right)$$

(2) (اصل ماکزیمم موضعی): فرض کنید $u \in \underline{S}(f)$ در Q_1، f نیز در Q_1 پیوسته و کراندار است.
دراین صورت برای هر $p>0$ ثابت $C(p) = C(p,n,\lambda,\Lambda)$ وجود دارد به طوری که

$$\sup_{Q_{\frac{1}{2}}} u \leq C(p)\left(\|u^+\|_{L^p(Q_{\frac{1}{4}})} + \|f\|_{L^n(Q_1)}\right)$$

اثبات (ا) : می‌خواهیم از لم 6 استفاده کنیم پس باید u, f در شرایط لم 5 صدق کنند.

ابتدا فرض کنید $u \in \bar{S}(f)$ در $Q_{4\sqrt{n}}$ و $u \ge 0$ در $Q_{4\sqrt{n}}$ و $\inf_{Q_3} u \le 1$.

به علاوه $\|f\|_{L^n(Q_{4\sqrt{n}})} \le \epsilon_0$. پس با استفاده از لم 6 :

$$\mu(t) = \left| \{u \ge t\} \cap Q_1 \right| \le d\, t^{-\epsilon}$$

از طرفی برای هر $p_0 > 0$ داریم

$$\int_{Q_1} u^{p_0} = p_0 \int_0^\infty t^{p_0 - 1} \overbrace{\left| \{u \ge t\} \cap Q_1 \right|}^{\mu(t)} dt$$

$$\left(\int_{Q_1} u^{p_0} = \int_{Q_1} \int_0^{u(x)^{p_0}} dt\, dx = \int_0^\infty \int_{\{u(x) > t^{\frac{1}{p_0}}\}} dx\, dt = \int_0^\infty \mu(t^{\frac{1}{p_0}})\, dt \right)$$

روی مجموعه $\{(t,x) : x \in Q_1,\ 0 \le t \le u(x)^{p_0}\}$ را می‌گیریم.

$$\Rightarrow \int_{Q_1} u^{p_0} = \int_{\{u \le 1\} \cap Q_1} u^{p_0} + \int_{\{u > 1\} \cap Q_1} u^{p_0} \le 1 + \int_{\{u>1\} \cap Q_1} u^{p_0}$$

$$\le 1 + p_0 \int_1^\infty t^{p_0 - 1} \mu(t) \le 1 + p_0\, d \int_1^\infty t^{p_0 - 1 - \varepsilon}\, dt$$

اگر قرار دهیم $p_0 = \frac{\varepsilon}{2}$ در این صورت $\int_{Q_1} u^{p_0} \le C$

$$\Rightarrow \|u\|_{L^{p_0}(Q_1)} \le C$$

در حالت کلی با قرار دادن $\tilde{f} = \frac{\varepsilon_0 f}{\cdots}$, $\tilde{u} = \frac{\varepsilon_0 u}{\inf_{Q_3} u + \|f\|_{L^n(Q_{4\sqrt{n}})}}$

$\|u\|_{L^{p_0}(Q_1)} \le C \left(\inf_{Q_3} u + \|f\|_{L^n(Q_{4\sqrt{n}})} \right)$ به دست می‌آوریم

اثبات (2) : ابتدا فرض می‌کنیم $u \in \underline{S}(f)$ در $Q_{4\sqrt{n}}$ ، $\|f\|_{L^n(Q_{4\sqrt{n}})} \leq \varepsilon_0$

که ε_0 در رسم 5 معرفی شده است. به علاوه $u^+ \in L^\varepsilon(Q_1)$ ،

$$\|u^+\|_{L^\varepsilon(Q_1)} \leq d^{\frac{1}{\varepsilon}} \qquad (*)$$

که ε و d در رسم 6 معرفی شده اند. در این صورت u در

رابطه (10) (در رسم 6) صدق می‌کند زیرا

$$|\{u \geq t\} \cap Q_1| = |\{u^+ \geq t\} \cap Q_1|$$

$$\leq t^{-\varepsilon} \int_{Q_1} (u^+)^\varepsilon \overset{(*)}{\leq} t^{-\varepsilon} d$$

$$\left(\int_{Q_1} (u^+)^\varepsilon \geq \int_{\{u^+ \geq t\} \cap Q_1} (u^+)^\varepsilon \geq t^\varepsilon |\{u^+ \geq t\} \cap Q_1| \right)$$

یعنی u در رابطه (۱۰) از لم 6 صدق می‌کند. پس لم 4 برای u برقرار است (زیرا در اثبات لم 4 فقط از رابطه (۱۰) استفاده می‌شد) بنابراین

$$\sup_{Q_{\frac{1}{4}}} u \leq C$$

در حالت کلی با تغییر مقیاس مناسب بدست می‌آوریم

$$\sup_{Q_{\frac{1}{4}}} u \leq C\left(\|u^+\|_{L^{\varepsilon}(Q_1)} + \|f\|_{L^n(Q_{4\sqrt{n}})} \right)$$

مشابه قبل مثبت (2) برای $p=\varepsilon$ بدست می‌آید. برای $p>\varepsilon$ به کمک نامساوی interpolation می‌توان حکم را نتیجه گرفت و برای $0<p<\varepsilon$ مشابه اثبات برای $p=\varepsilon$ صورت می‌گیرد.

مباحثی در PDE

جلسه ده ۹۶/۷/۲۹

C^{α} Regularity

گزاره ۱: فرض کنید $u \in S^*(\lambda, \Lambda, f)$ در Q_1. دراین صورت

الف) برای یک ثابت جهانی $1 > \mu > 0$ داریم

$$\underset{Q_{\frac{1}{2}}}{\operatorname{osc}}\, u \leq \mu \underset{Q_1}{\operatorname{osc}}\, u + 2\|f\|_{L^n(Q_1)}$$

ب) ثابت های جهانی $1 > \alpha > 0$ و $C > 0$ موجودند به طوریکه $u \in C^{\alpha}(\overline{Q}_{\frac{1}{2}})$ و

$$\|u\|_{C^{\alpha}(\overline{Q}_{\frac{1}{2}})} \leq C\left(\|u\|_{L^{\infty}(Q_1)} + \|f\|_{L^n(Q_1)}\right)$$

اثبات: الف) $m_r = \inf\limits_{Q_r} u$ ، $M_r = \sup\limits_{Q_r} u$ ، $o_r = \operatorname{osc}\limits_{Q_r} u$

نامساوی هارناک را برای توابع نامنفی $u - m_1$ و $M_1 - u$ در Q_1 که متعلق به $S^*(f)$ هستند به کار می‌بریم:

$$\begin{cases} M_{\frac{1}{2}} - m_1 \le C\left(m_{\frac{1}{2}} - m_1 + \|f\|_{L^n(Q_1)}\right) \\ M_1 - m_{\frac{1}{2}} \le C\left(M_1 - M_{\frac{1}{2}} + \|f\|_{L^n(Q_1)}\right) \end{cases}$$

$$o_1 + o_{\frac{1}{2}} \le C\left(o_1 - o_{\frac{1}{2}} + 2\|f\|_{L^n(Q_1)}\right)$$

$$\Rightarrow o_{\frac{1}{2}} \le \underbrace{\frac{C-1}{C+1}}_{\mu} o_1 + \underbrace{\frac{2C}{C+1}}_{<2} \|f\|_{L^n(Q_1)}$$

* تذکر: فرض کنید $u \in S^*(f)$ در Q_1. دراین صورت برای هر $0 \le r \le 1$ داریم

$$\underset{Q_{r/2}}{\operatorname{osc}}\, u \le \mu \underset{Q_r}{\operatorname{osc}}\, u + 2r \|f\|_{L^n(Q_r)}$$

* لم: فرض کنید w و σ دو تابع صعودی روی بازه $[0, R_0]$ باشند به طوریکه $0 < \gamma, \tau < 1$ موجود هستند که برای هر $R \le R_0$ داریم

$$w(\tau R) \le \gamma\, w(R) + \sigma(R) \qquad (*)$$

دراین صورت برای هر $0 < \mu < 1$ و $R \le R_0$ داریم:

$$w(R) \le C\left(\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\alpha} w(R_0) + \sigma\left(R_0^{1-\mu} R^{\mu}\right)\right)$$

که $C = C(\gamma, \tau)$ و $\alpha = \alpha(\gamma, \tau, \mu)$.

$$w(r) = \underset{Q_r}{\operatorname{osc}}\, u \quad , \quad \sigma(r) = r\|f\|_{L^n(Q_r)} \qquad\qquad \tau = \frac{1}{2} \quad , \quad \underset{(\text{الف})}{\gamma = \mu}$$

$$R_0 = 1$$

$$\Rightarrow \underset{Q_r}{\operatorname{osc}}\, u \le C\left(r^{\alpha} \underset{Q_1}{\operatorname{osc}}\, u + r^{\mu} \|f\|_{L^n(Q_{r^{\mu}})}\right)$$

$$\Rightarrow \underset{Q_r}{\operatorname{osc}}\, u \le C r^{\alpha} \left(\|u\|_{L^\infty(Q_1)} + r^{\mu-\alpha} \|f\|_{L^n(Q_1)} \right)$$

در صورت لزوم با کوچکتر در نظر گرفتن α می توان ~~همواره~~ فرض کرد $\alpha \le \mu$.

* تذکر. هر تابع از پایین (یا از بالا) کراندار که متعلق به $S(0)$ در $\mathbb{R}^n$ است، تابع ثابت است.

(قضیه لیوویل)

اثبات: فرض کنید $u \in S(0)$، از بالا کراندار باشد، $\sup_{\mathbb{R}^n} u = M$. $\underbrace{\tilde{u} = u - M}\in S(0)$

می توان فرض کرد $\sup_{\mathbb{R}^n} u = 0$. پس برای هر $\varepsilon > 0$ یک x هست که $u(x) > -\varepsilon$

طبق نامساوی هارناک (برای $-u$) برای هر $R > 0$

$$-\varepsilon \le \sup_{Q_{R/2}(x)} u \le C \inf_{Q_{R/2}(x)} u \le C\, u(y)$$

برای هر $|y - x|_\infty < \frac{R}{4}$

$$\Rightarrow u(y) \ge \frac{-\varepsilon}{C} \qquad (*)$$

C مستقل از R است.

چون رابطه اخیر برای هر $R>0$ برقرار است پس $(*)$ برای هر $y \in \mathbb{R}^n$ برقرار است.

اکنون اگر $\varepsilon \to 0$ خواهیم داشت $u(y) \geq 0$ $\forall y$ از طرفی $\sup_{\mathbb{R}^n} u = 0$

پس $u \equiv 0$.

* تذکر. با استفاده از یک بحث پوششی استاندارد می توان گزاره ۱ را برای $B_{\frac{1}{2}}$ و B_1 نیز بیان کرد.

با استفاده از پیوستگی هولدر جواب ها و بسته بودن خانواده جواب ها، به کمک قضیه آرزلا-آسکولی

نتیجه «فشردگی» زیر بدست می آید.

گزاره: فرض کنید $\{F_k\}$ دنباله ای از عملگرهای بیضوی یکنواخت با ثابت های بیضوی λ و Λ هستند و $\{u_k\} \subseteq C(\Omega)$ جواب های لزجی $F_k(D^2u, x) = f(x)$ در Ω می باشند. فرض کنید $\{F_k\}$ در زیرمجموعه‌ی فشرده $S \times \Omega$ به طور یکنواخت به F همگراست و $\{u_k\}$ در زیرمجموعه های فشرده Ω به طور یکنواخت کراندار هستند. در این صورت $u \in C(\Omega)$ و زیردنباله ای از $\{u_k\}$ موجودند که در زیرمجموعه های فشرده از Ω به طور یکنواخت به u همگراست به علاوه $F(D^2u, x) = f(x)$ به معنای لزجی در Ω.

گزاره: فرض کنید $u \in S(0)$ در B_1 و $u \in C(\overline{B_1})$. به علاوه $0<\beta<1$ هست که $u|_{\partial B} = \varphi$ و $\varphi \in C^{\beta}(\partial B_1)$. در این صورت برای هر $x_0 \in \partial B_1$، u در x_0 هولدر پیوسته $C^{\beta/2}$ است به علاوه

$$\sup_{x \in \overline{B_1}} \frac{|u(x) - u(x_0)|}{|x - x_0|^{\beta/2}} \leq 2^{\beta/2} \sup_{x \in \partial B_1} \frac{|\varphi(x) - \varphi(x_0)|}{|x - x_0|^{\beta}} \qquad (1)$$

اثبات: می‌توان فرض کرد $B_1 = B_1((0,\dots,0,1))$ و $x_0 = 0$ و $u(x_0) = \varphi(x_0) = 0$

قرار دهید $\sup_{x \in \partial B_1} \frac{|\varphi(x)|}{|x|^{\beta}} = K$. توجه کنید که اگر $x \in \partial B_1$ در این صورت

$$x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + (x_n - 1)^2 = 1 \implies |x|^2 = 2x_n$$

پس برای $x \in \partial B_1$ داریم

$$u(x) = \varphi(x) \leq K|x|^{\beta} = K 2^{\beta/2} x_n^{\beta/2} \qquad (*)$$

تعریف کنید $h(x) = K 2^{\beta/2} x_n^{\beta/2}$ در B_1. داریم $\mathcal{M}^{+}(D^2 h(x)) = \lambda K 2^{\beta/2} \frac{\beta}{2}(\frac{\beta}{2} - 1) x_n^{\beta/2 - 2} < 0$

بنابراین $u - h \in \underline{S}(0)$. طبق $(*)$ $u - h \leq 0$ روی ∂B_1. پس طبق اصل ماکزیمم قوی:

$$\forall x \in B_1: \quad u(x) - h(x) \leq 0 \implies u(x) \leq K 2^{\beta/2} |x|^{\beta/2}$$

اگر اثبات فوق را برای $-u$ نیز به کار ببریم خواهیم داشت $|u(x)| \leq K\, 2^{\beta/2}\, |x|^{\beta/2}$

که همان (۱) است. $\blacksquare$

می‌توان یک "پیوستگی هولدر سرتاسری" برای جواب‌های متعلق به $S(0)$ به دست آورد:

گزاره. فرض کنید $u \in S(0)$ در B_1 و $u \in C(\overline{B}_1)$. به علاوه $0 < \beta < 1$ وجود دارد به طوری که $u|_{\partial B_1} = \varphi$ و $\varphi \in C^{\beta}(\partial B_1)$. در این صورت $u \in C^{\gamma}(\overline{B}_1)$ که $\gamma = \min(\frac{\beta}{2}, \alpha)$ و α در گزاره I معرفی شده است. به علاوه ثابت جهانی C موجود است به طوری که

$$\|u\|_{C^{\gamma}(\overline{B}_1)} \leq C \|\varphi\|_{C^{\beta}(\partial B_1)}$$

اثبات: فرض کنید $x, y \in B_1$، مقدار $\frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{\gamma}}$ را تخمین می‌زنیم. قرار دهید

$$d_x = d(x, \partial B_1) \quad , \quad d_y = d(y, \partial B_1)$$

x_0 و $y_0 \in \partial B_1$ موجودند به طوری که $d_x = |x - x_0|$ و $d_y = |y - y_0|$. فرض کنید $d_y \leq d_x$.

حالت اول: $|x-y| \leq \frac{d_x}{2}$. در این صورت

$$y \in \overline{B}_{\frac{d_x}{2}}(x) \subset B_{d_x}(x) \subset B_1$$

با به کار بردن (ب) در گزاره ۱ (برای گوی های مناسب) برای تابع $u-u(x_0)$ در $B_{d_x}(x)$ خواهیم داشت

$$d_x^{\alpha}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \leq C\,\|u-u(x_0)\|_{L^\infty(B_{d_x}(x))}$$

طبق گزاره قبل

$$\|u-u(x_0)\|_{L^\infty} \leq C\, d_x^{\beta/2}\,\|\varphi\|_{C^\beta(\partial B_1)}$$

پس

$$d_x^{\gamma}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\gamma}} \leq d_x^{\alpha}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \leq C d_x^{\beta/2}\|\varphi\|_{C^\beta(\partial B_1)}$$

$$\Rightarrow \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\gamma}} \leq C\,\|\varphi\|_{C^\beta(\partial B_1)}$$

حالت دوم : $d_y \leq d_x < 2|x-y|$. داریم

$$|u(x)-u(y)| \leq |u(x)-u(x_0)|+|u(x_0)-u(y_0)|+|u(y)-u(y_0)| \leq C\|\varphi\|_{C^\beta(\partial B_1)}\left(d_x^{\beta/2}+|x_0-y_0|^{\beta}+d_y^{\beta/2}\right)$$

$$|x_0 - y_0| \leq d_x + |x-y| + d_y \leq 5|x-y|$$

$$\Rightarrow |u(x) - u(y)| \leq C \, \|\varphi\|_{C^{\beta}(\partial B_1)} |x-y|^{\beta/2} \leq C \|\varphi\|_{C^{\beta}(\partial B_1)} |x-y|^{\gamma}$$

$\blacksquare$

گزاره: فرض کنید $u \in S(f)$ و $u \in C(\overline{B_1})$. f نیز در B_1 پیوسته است و $u\big|_{\partial B_1} = \varphi$. اگر $\rho(|x-y|)$ یک مدول پیوستگی برای φ باشد یعنی ρ تابعی صعودی روی $(0,\infty)$ و $\lim\limits_{\delta\to 0}\rho(\delta)=0$. به علاوه،

$$\forall\, x,y\in\partial B_1 : \quad |\varphi(x)-\varphi(y)| \le \rho(|x-y|)$$

به علاوه $\|f\|_{L^n(B_1)} \le K$ ، $\|\varphi\|_{L^\infty(\partial B_1)} \le K$. $\exists K>0$.

در این صورت یک مدول پیوستگی ρ^* برای u در $\overline{B_1}$ موجود است:

$$\forall\, x,y\in\overline{B_1} : \quad |u(x)-u(y)| \le \rho^*(|x-y|)$$

و ρ^* فقط به n، λ، Λ، K و ρ وابسته است.

مباحثی در PDE

جلسه یازده ۹۶/۸/۱

فصل 5 : یکتایی جواب ها

$$\begin{cases} F(D^2u)=0 & \Omega \\ u=\varphi & \partial\Omega \end{cases}$$

تعریف. فرض کنید $u:\Omega \to \mathbb{R}$ پیوسته و H باز و $\overline{H}\subset\Omega$. برای هر $\varepsilon>0$

"ε - پوشش بالای u" (نسبت به H) اینطور تعریف می‌شود:

$$u^{\varepsilon}(x_0) := \sup_{x\in\overline{H}} \left\{ u(x) + \varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}|x-x_0|^2 \right\} \qquad x_0\in H$$

لم ۱: فرض کنید $x_0 , x_1 \in H$. در این صورت

(1) $\exists\, x_0^* \in \overline{H} \; : \qquad u^\varepsilon(x_0) = u(x_0^*) + \varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}|x_0 - x_0^*|^2$

(2) $u^\varepsilon(x_0) \geq u(x_0) + \varepsilon$

(3) $|u^\varepsilon(x_0) - u^\varepsilon(x_1)| \leq \frac{3}{\epsilon}\, \mathrm{diam}(H)\, |x_0 - x_1|$

(4) $0 < \varepsilon < \varepsilon' \implies u^\varepsilon(x_0) \leq u^{\varepsilon'}(x_0)$

(5) $|x_0^* - x_0|^2 \leq \varepsilon \operatorname*{osc}_H u$

(6) $0 < u^\varepsilon(x_0) - u(x_0) \leq u(x_0^*) - u(x_0) + \varepsilon$

اثبات: (3): فرض کنید $x \in \overline{H}$. داریم

$$u^\varepsilon(x_0) \geq u(x) + \varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}|x - x_0|^2$$

$$\geq u(x) + \varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}|x - x_1|^2 - \frac{1}{\varepsilon}|x_1 - x_0|^2 - \frac{2}{\varepsilon}|x - x_1|\,|x_1 - x_0|$$

$$\geq u(x) + \varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}|x - x_1|^2 - \frac{3}{\varepsilon}\, \mathrm{diam}(H)\, |x_1 - x_0| \xRightarrow[\text{روی } x \in \overline{H}]{\text{گرفتن sup}} u^\varepsilon(x_0) \geq u^\varepsilon(x_1) - \frac{3}{\varepsilon}\, \mathrm{diam}(H)\, |x_1 - x_0|$$

برای اثبات (5) طبق (1) داریم: (2)

$$\frac{1}{\varepsilon}|x_0-x_0^*|^2 = u(x_0^*)+\varepsilon-u^{\varepsilon}(x_0) \overset{(2)}{\leq} u(x_0^*)-u(x_0) \leq \operatorname{osc}_H u \qquad \blacksquare$$

قضیه ۱: a) $u^{\varepsilon}\in C(H)$ و $u^{\varepsilon}\downarrow u$ به طور یکنواخت در H وقتی $\varepsilon\to 0$.

b) برای هر $x_0\in H$، یک سهمی مقعر با "دهانه" (opening) $\frac{2}{\varepsilon}$ وجود دارد که با u^{ε} در x_0 از پایین و داخل H در تماس است. پس u^{ε} داخل H، از پایین $C^{1,1}$ است. به خصوص، u^{ε} ت.ه.

در H، punctually مشتق پذیر مرتبه دوم (p.s.d) است.

c) فرض کنید u یک جواب پایینی لزجی برای $F(D^2u)=0$ در H باشد و H_1 باز باشد به طوری که $\overline{H_1}\subset H$. در این صورت $\varepsilon_0=\varepsilon_0(u,H,H_1)$ موجود است به طوری که برای هر $\varepsilon\leq\varepsilon_0$، u^{ε} یک جواب پایینی لزجی برای $F(D^2u)=0$ در H_1 است. به خصوص

$$F(D^2u^{\varepsilon}(x))\geq 0 \qquad \text{ت.ه. در } H_1$$

تعریف. اگر u در Ω پیوسته باشد، می‌گوییم u در $x_0 \in \Omega$ punctually مشتق‌پذیر مرتبه دوم (p.s.d) است هرگاه یک سهمی P موجود باشد به طوریکه

$$u(x) = P(x) + o(|x-x_0|^2) \qquad \text{وقتی } x \to x_0$$

در این حالت تعریف می‌کنیم $D^2u(x_0) := D^2P(x_0)$.

* گزاره. فرض کنید Ω محدب و صفحه و باز است و $u: \Omega \to \mathbb{R}$ پیوسته است. به علاوه $\exists K>0$:

$$\underline{\Theta}(u,\Omega)(x) \le K \qquad \forall x \in \Omega$$

در این صورت $u(x) + \frac{K}{2}|x|^2$ در Ω محدب است. به خصوص u ت. هـ. در Ω، p.s.d است.

* لم 2. فرض کنید u یک جواب پایینی لزجی برای $F(D^2u, x) \ge f(x)$ باشد و در $x_0 \in \Omega$، p.s.d باشد. آنگاه $F(D^2u(x_0), x_0) \ge f(x_0)$.

اثبات: فرض کنید P سهمی متناظر با p.s.d در x_0 باشد. برای هر $\epsilon>0$ سهمی $Q(x) = P(x) + \frac{\epsilon}{2}|x-x_0|^2$ با u از بالا در x_0 در تماس است پس

$$F(D^2Q(x_0), x_0) \ge f(x_0) \Rightarrow F(D^2P(x_0) + \epsilon I, x_0) \ge f(x_0)$$

اثبات قضیه ۱: (a) : پیوستگی u^{ε} در H از (3) در لم ۱ نتیجه می‌شود. باید نشان دهیم

$$\forall \delta>0 \quad \exists\, \varepsilon'>0 \quad \forall\, 0<\varepsilon\le\varepsilon' \quad \forall x\in H \quad |u^{\varepsilon}(x)-u(x)|<\delta$$

چون u در $\overline{H}$ پیوسته یکنواخت است. پس

$$\exists\, \varepsilon_1>0 \quad \forall\, x,y\in\overline{H} \quad |x-y|<\varepsilon_1 \Rightarrow |u(x)-u(y)|<\frac{\delta}{2} \qquad (1)$$

فرض کنید $\varepsilon'=\min\left\{\frac{\varepsilon_1^2}{(\operatorname{osc}_H u)^2}, \frac{\delta}{2}\right\}$. برای هر $\varepsilon\le\varepsilon'$ داریم:

(6) در لم ۱

$$|u^{\varepsilon}(x_0)-u(x_0)| \le |u(x_0^*)-u(x_0)+\varepsilon| \qquad (2)$$

طبق (5) در لم ۱ و تعریف ε' داریم $|x_0^*-x_0|\le\varepsilon_1$. پس طبق (1)

$$|u(x_0^*)-u(x_0)|<\frac{\delta}{2} \quad \overset{(2)}{\Longrightarrow} \quad |u^{\varepsilon}(x_0)-u(x_0)|<\delta$$

(b): برای $x_0 \in H$

$$P(x) = u(x_0^*) + \varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}|x - x_0^*|^2$$

دقت کنید که

$$P(x_0) = u(x_0^*) + \varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}|x_0 - x_0^*|^2 = u^\varepsilon(x_0)$$

و برای هر $x \in H$ طبق تعریف u^ε و x_0^* داریم $u^\varepsilon(x) \geq P(x)$

یعنی سهمی مقعر P با دهانه $\frac{2}{\varepsilon}$، u را از پایین در x_0 داخل H، touch می‌کند. پس طبق گزاره قبل u^ε ت. ه. در H p.s.d است.

(c): فرض کنید $x_0 \in H_1$ و P سهمی ای باشد که با u^ε در x_0 و داخل H_1 از بالا در تماس باشد.

نشان می‌دهیم $F(D^2P(x_0)) \geq 0$. سهمی زیر را در نظر بگیرید:

$$Q(x) = P(x + x_0 - x_0^*) + \frac{1}{\varepsilon}|x_0 - x_0^*|^2 - \varepsilon$$

چون $x_0 \in H_1$ طبق (5) در لم 1 می‌توان ε_0 را طوری در نظر گرفت که برای $0 < \varepsilon \leq \varepsilon'$

$x_0^* \in H$

نشان می‌دهیم Q از بالا در x_0^* با u در تماس است.

طبق تعریف u^{ε} داریم

$$u(x) \leq u^{\varepsilon}(x + x_0 - x_0^*) + \frac{1}{\varepsilon}|x_0 - x_0^*|^2 - \varepsilon$$

پس برای x به اندازه کافی x_0^* داریم:

$$u(x) \leq P(x + x_0 - x_0^*) + \frac{1}{\varepsilon}|x_0 - x_0^*|^2 - \varepsilon = Q(x)$$

به علاوه $u(x_0^*) = Q(x_0^*)$، زیرا

$$Q(x_0^*) = P(x_0) + \frac{1}{\varepsilon}|x_0 - x_0^*|^2 - \varepsilon = u^{\varepsilon}(x_0) + \frac{1}{\varepsilon}|x_0 - x_0^*|^2 - \varepsilon = u(x_0^*)$$

پس $F(D^2 Q(x_0^*)) \geq 0$ پس $F(D^2 P(x_0)) \geq 0$.

پس با توجه به لم 2، داریم $F(D^2 u^{\varepsilon}(x)) \geq 0$ ت. ه. در H_1.

* تذکر: با در نظر گرفتن سهمی های محدب می توان به طور مشابه "ε - پوشش پایینی" u_ε را تعریف کرد.

ثابت می شود که برای هر $x_0 \in H$ سهمی محدبی وجود دارد که u_ε را از بالا در x_0 touch می کند.

$$u_\varepsilon(x_0) = \inf_{x \in \overline{H}} \left\{ u(x) - \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} |x - x_0|^2 \right\}$$

* قضیه 3. فرض کنید u و v به ترتیب جواب های پایینی و بالایی لزجی $F(D^2u)=0$ در Ω باشند.

در این صورت $u - v \in \underline{S}\left(\frac{\lambda}{n}, \Lambda\right)$

* نتیجه. معادله دیریکله زیر حداکثر یک جواب لزجی $u \in C(\overline{\Omega})$ دارد:

$$\begin{cases} F(D^2u)=0 & \Omega \\ u = \varphi & \partial\Omega \end{cases}$$

اثبات: $u - v \in \underline{S}\left(\frac{\lambda}{n}, \Lambda\right)$ در Ω و $u - v \equiv 0$ روی $\partial\Omega$.

اثبات قضیه : H و H_1 را طوری تثبیت کنید که $\overline{H}_1 \subset H \subset \overline{H} \subset \Omega$. نشان می دهیم که برای ε به اندازه

کافی کوچک (*) $u^\varepsilon - v_\varepsilon \in \underline{S}(\frac{\lambda}{n}, \Lambda)$ ، در این صورت $u - v \in \underline{S}(\frac{\lambda}{n}, \Lambda)$ زیرا $u^\varepsilon - v_\varepsilon \to u - v$

به طور یکنواخت در H_1 و $H_1 \subset \Omega$ دلخواه بود و رده $\underline{S}$ بسته است.

برای نشان دادن (*) فرض کنید P یک سهمی باشد که $u^\varepsilon - v_\varepsilon \le P$ در $\overline{B_r(x_0)} \subset H$

و $u^\varepsilon(x_0) - v_\varepsilon(x_0) = P(x_0)$ ، نشان می دهیم $\mathcal{M}^+(D^2 P, \frac{\lambda}{n}, \Lambda) \ge 0$. $\delta > 0$ را در نظر بگیرید

و تعریف کنید
$$w(x) = v_\varepsilon(x) - u^\varepsilon(x) + P(x) + \delta|x - x_0|^2 - \delta r^2$$

داریم $w(x_0) < 0$ و روی $\partial B_r(x_0)$ داریم $w \ge 0$. به ازای هر $x \in \overline{B_r(x_0)}$

طبق (b) در قضیه ۱، یک سهمی محدب P^x با دهانه K وجود دارد که w را از بالا در x و داخل $B_r(x_0)$

touch می کند و K مستقل از x است. > (برای $\varepsilon > 0$ به اندازه کافی کوچک)

پس طبق لم 3 در جلسه ششم :

$$\sup_{B_d} w^- \le C \left(\int_{B_r(x_0) \cap \{w = \Gamma_w\}} \det D^2 \Gamma_w \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\left(P(x) \ge w(x) \ge \Gamma_w(x) \right)$$

به خصوص چون $w(x_0)<0$ پس

$$0 < \int_{B_r(x_0)\cap\{w=\Gamma_w\}} \det D^2\Gamma_w \qquad (2)$$

از فرض طبق (b) در قضیه ۱، $A\subset B_r(x_0)$ که $|B_r(x_0)\setminus A|=0$ (3)، u^ε و v_ε (در نتیجه w)

در A p.s.d هستند و طبق (c):

$$F(D^2u^\varepsilon(x))\geq 0 \quad , \quad F(D^2v_\varepsilon(x))\leq 0 \qquad \forall x\in A$$

از فرض Γ_w محدب است پس $D^2\Gamma_w$ نامنفی معین است. (4)

$$(2),(3) \Rightarrow |A\cap\{w=\Gamma_w\}|>0 \Rightarrow \exists\, x_1\in A\cap\{w=\Gamma_w\}$$

$$0\leq F(D^2u^\varepsilon(x_1)) = F(D^2v_\varepsilon(x_1)-D^2w(x_1)+D^2p+2\delta I)$$

$$\stackrel{(4)}{\leq} F(D^2v_\varepsilon(x_1)+D^2p+2\delta I)$$

$$\leq F(D^2v_\varepsilon(x_1)+D^2p)+2\delta\Lambda$$

$$\leq F(D^2v_\varepsilon(x_1))+\Lambda\|(D^2p)^+\|-\lambda\|(D^2p)^-\|+2\delta\Lambda$$

$$\Rightarrow \; 0 \le \Lambda \, \|(D^2 p)^+\| - \lambda \, \|(D^2 p)^-\| + 2\Lambda\delta$$

$$\le \Lambda \sum_{e_i > 0} e_i - \frac{\lambda}{n} \sum_{e_i < 0} e_i + 2\Lambda\delta = \mathcal{M}^+\left(D^2 p, \frac{\lambda}{n}, \Lambda\right) + 2\Lambda\delta$$

$\blacksquare$

مباحثی در PDE

جلسه دوازده ۹۶/۸/۶

* نظم $C^{1,\alpha}$ برای جواب های لزجی $F(D^2u)=0$

$$\Omega_h = \{ x \in \Omega : \ d(x, \partial\Omega) > h \} \qquad h>0$$

گزاره ۱. فرض کنید u یک جواب لزجی برای $F(D^2u)=0$ در Ω باشد. به علاوه $h>0$ و $e \in \mathbb{R}^n$ که $|e|=1$. در این صورت

$$u(x+he)-u(x) \in S\left(\frac{\lambda}{n}, \Lambda\right)$$

اثبات: با استفاده از قضیه 3 در جلسه قبل. $\boxtimes$

لم 2: فرض کنید $1 > \alpha > 0$ و $1 \geq \beta > 0$ و $K > 0$ سه عدد ثابت هستند. به علاوه $u \in L^\infty([-1,1])$ و $\|u\|_{L^\infty} \leq K$. برای $h \in \mathbb{R}$، که $1 \geq |h| > 0$ تعریف کنید

$$v_{\beta,h} := \frac{u(x+h) - u(x)}{|h|^\beta} \qquad x \in I_h$$

که $I_h = [-1, 1-h]$ ، $h > 0$ و $h < 0$: $I_h = [-1-h, 1]$

فرض کنید برای هر $1 \geq |h| > 0$ داریم $v_{\beta,h} \in C^\alpha(I_h)$ ، $\|v_{\beta,h}\|_{C^\alpha} \leq K$.

در این صورت

(1) اگر $\alpha + \beta < 1$ در این صورت $u \in C^{\alpha+\beta}([-1,1])$ ، $\|u\|_{C^{\alpha+\beta}} \leq CK$.

(2) اگر $\alpha + \beta > 1$ در این صورت $u \in C^{0,1}([-1,1])$ ، $\|u\|_{C^{0,1}} \leq CK$

که ثابت C فقط به $\alpha+\beta$ وابسته است.

اثبات: با توجه به تقارن مسأله نسبت به تغییر متغیر $x \mapsto -x$ کافی است که عبارت $|u(x+\varepsilon)-u(x)|$

را برای $0 \leq x \leq 1$ ، $\varepsilon > 0$ و $x+\varepsilon \leq 1$ را تخمین بزنیم.

فرض کنید $i \geq 0$ عدد صحیح مثبت باشد به طوریکه $x+2^{i+1}\varepsilon \leq 1 < x+2^{i}\varepsilon$ و قرار دهید $z_0 = 2^{i}\varepsilon$.

دراین صورت $-1 \leq x < x+z_0 \leq 1$ و $\frac{1}{2} < z_0 \leq 2$ ، زیرا

$$-1+z_0 \leq x+z_0 \leq 1 < x < x+2z_0 \leq 2z_0 \Rightarrow \frac{1}{2} < z_0 \leq 2$$

تعریف کنید $0 < z \leq z_0$

$$w(z) := u(x+z)-u(x)$$

داریم

$$|w(z)-2w(\tfrac{z}{2})| = |u(x+z)-2u(x+\tfrac{z}{2})+u(x)|$$

$$=(\tfrac{z}{2})^{\beta}\left|v_{\beta,\frac{z}{2}}(x+\tfrac{z}{2})-v_{\beta,\frac{z}{2}}(x)\right| \leq K(\tfrac{z}{2})^{\alpha+\beta}$$

بنابراین $\left(C = \frac{1}{2^{\alpha+\beta}} \right)$

$$\begin{aligned}
& \left| w(\tau_0) - 2w\left(\frac{\tau_0}{2}\right) \right| \le C K \tau_0^{\alpha+\beta} \\
2 \quad & \left| w\left(\frac{\tau_0}{2}\right) - 2w\left(\frac{\tau_0}{2^2}\right) \right| \le C K \left(\frac{\tau_0}{2}\right)^{\alpha+\beta} \\
& \vdots \\
2^{i-1} \quad & \left| w\left(\frac{\tau_0}{2^{i-1}}\right) - 2w\left(\overset{\varepsilon}{\frac{\tau_0}{2^i}}\right) \right| \le C K \left(\frac{\tau_0}{2^{i-1}}\right)^{\alpha+\beta}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left| w(\tau_0) - 2^i w(\varepsilon) \right| \le C K \tau_0^{\alpha+\beta} \sum_{j=0}^{i-1} 2^{j(1-(\alpha+\beta))}$$

$$\Rightarrow \left| w(\varepsilon) \right| \le 2^{-i} \left| w(\tau_0) \right| + C K 2^{-i} \tau_0^{\alpha+\beta} \sum_{j=0}^{i-1} 2^{j(1-(\alpha+\beta))}$$

$$2^{-i} = \frac{\varepsilon}{\tau_0} \le 2\varepsilon \qquad \le 4K\varepsilon + C K \varepsilon \tau_0^{\alpha+\beta-1} \sum_{j=0}^{i-1} 2^{j(1-(\alpha+\beta))}$$

* حالت اول : $\alpha+\beta<1$ دراین صورت

$$|w(\varepsilon)| \leq 4k\varepsilon + Ck\varepsilon\, \tau_0^{\alpha+\beta-1}\, 2^{i(1-(\alpha+\beta))}$$

$$\leq 4k\varepsilon + Ck\varepsilon^{\alpha+\beta} \leq Ck\varepsilon^{\alpha+\beta}$$

و ثابت C فقط به $\alpha+\beta$ وابسته است. بنابراین u هولدر از مرتبه $\alpha+\beta$ است و

$$\|u\|_{C^{\alpha+\beta}} \leq Ck$$

* حالت دوم : $\alpha+\beta>1$ دراین صورت $\sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(1-(\alpha+\beta))} < \infty$ پس

$$|w(\varepsilon)| \leq 4k\varepsilon + Ck\varepsilon\, \tau_0^{\alpha+\beta-1} \leq Ck\varepsilon$$

و ثابت C فقط به $\alpha+\beta$ وابسته است. بنابراین $u \in C^{0,1}$ و $\|u\|_{C^{0,1}} \leq Ck$.

$\blacksquare$

نتیجه 3. فرض کنید u یک جواب لزجی برای $F(D^2u)=0$ در B_1 باشد. در این صورت ثابت های جهانی $0<\alpha<1$ و C موجودند به طوریکه $u \in C^{1,\alpha}(\overline{B}_{\frac{1}{2}})$،

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{B}_{\frac{1}{2}})} \leq C\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + |F(0)|\right)$$

*نکته. می توان گزاره ۱ در جلسه ۱۰ را برای هر $0<r<s\leq 1$ بیان کرد:

$$\|u\|_{C^{\alpha}(\overline{B}_r)} \leq C\left(\|u\|_{L^\infty(B_s)} + |F(0)|\right)$$

اثبات نتیجه 3 : $e \in \mathbb{R}^n$ را با $|e|=1$ تثبیت کنید و فرض کنید $0<h<\frac{1}{8}$. طبق گزاره

برای $0<\beta<1$ داریم :

$$v_\beta(x) := \frac{1}{h^\beta}\left(u(x+he)-u(x)\right) \in S\left(\frac{\lambda}{n},\Lambda\right)$$ در $B_{7/8}$

پس طبق نکته قبل :

$$\|v_\beta\|_{C^\alpha(\bar{B}_r)} \leq C\,\|v_\beta\|_{L^\infty\left(\frac{r+s}{2}\right)} \leq C\,\|u\|_{C^\beta(B_s)}$$ 1

که $0<r<s\leq\frac{7}{8}$ و $0<h<\frac{s-r}{2}$ ، α یک ثابت جهانی است و $C=C(r,s,n,\lambda,\Lambda)$.

عدد $i \in \mathbb{Z}^+$ را طوری در نظر می‌گیریم که $i\alpha<1$ و $(i+1)\alpha>1$. چون u جواب لزجی $F(D^2u)=0$

است پس طبق مطلبی در فصل 2 می‌دانیم که $u \in S\left(\frac{\lambda}{n},\Lambda,-F(0)\right)$. بنابراین طبق گزاره 1 در

حلقه 1 داریم :

$$\|u\|_{C^\alpha(\bar{B}_{7/8})} \leq C\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + |F(0)|\right) := CK$$

پس اگر ① را برای $\beta=\alpha$ و $r=r_1<s=\frac{7}{8}$ به کار ببریم خواهیم داشت

$$\|v_\alpha\|_{C^\alpha(\overline{B}_{r_1})} \le C\,\|u\|_{C^\alpha(B_{7/8})} \le CK$$

که $0<h<\frac{7/8-r_1}{2}$ و $C=C(n,\lambda,\Lambda,r_1)$. بنابراین با استفاده از لم (2) برای $\beta=\alpha$

(در مقیاس مناسب) به دست می آوریم

$$\|u\|_{C^{2\alpha}(\overline{B}_{r_2})} \le C(r_1,r_2)\,K$$

که $r_2<r_1$ عددی مناسب است.

اکنون اگر ① را برای $\beta=2\alpha$ استفاده کنیم خواهیم داشت

$$\|v_{2\alpha}\|_{C^\alpha} \le C\,\|u\|_{C^{2\alpha}} \le CK$$

پس طبق لم 2، $u\in C^{3\alpha}(B_{r_3})$ که $r_3<r_2$ و

$$\|u\|_{C^{3\alpha}} \le CK$$

چون $i\alpha<1$ و $(i+1)\alpha>1$ می‌توان این روند را ادامه داد در نهایت طبق قضیه درم لم 2، خواهیم داشت $u\in C^{0,1}(B_\rho)$ برای یک $0<\rho<1$ و $\|u\|_{C^{0,1}}\le CK$.

اکنون اگر ① را برای $\beta=1$ استفاده کنیم به دست می‌آوریم

$$\|v_i\|_{C^{\alpha}(B_{\frac{\rho}{2}})}\le C\|u\|_{C^{0,1}(B_\rho)}\le CK$$

چون v_i خارج قسمت های تفاضلی u برای h و e است پس $u\in C^{1,\alpha}(B_{\frac{\rho}{2}})$ و

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(B_{\frac{\rho}{2}})}\le CK=C\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)}+|F(0)|\right)$$

$\blacksquare$

* کاربردهای برای معادلات مقعر

معادله $F(D^2u)=0$ مقعر نام دارد هرگاه F در فضای S تابعی مقعر باشد.

نتیجه ۱. فرض کنید F مقعر و u و v زیر جواب های لزجی برای $F(D^2w)=0$ در Ω باشند. در این صورت $\frac{1}{2}(u+v)$ نیز یک زیر جواب لزجی برای $F(D^2w)=0$ است.

نتیجه 2. فرض کنید F مقعر و u یک جواب لزجی برای $F(D^2u)=0$ در Ω است. اگر $e\in\mathbb{R}^n$, $|e|=1$ و $h>0$. در این صورت

$$A := \frac{u(x+he)+u(x-he)-2u(x)}{h^2} \in \underline{S}\left(\frac{\lambda}{n},\Lambda\right)$$

اثبات: $\in \underline{S}\left(\frac{\lambda}{n},\Lambda\right)$

$$\frac{1}{2}Ah^2 = \underbrace{\frac{1}{2}\left[u(x+he)+u(x-he)\right]}_{\text{sub sol.}} - \underbrace{u(x)}_{\text{supersol.}}$$

∎

نتیجه 3. F معقرر $u\in C^2(\Omega)$ یک جواب لزجی برای $F(D^2u)=0$ در Ω است. دراین صورت

برای هر $e\in \mathbb{R}^n$ که $|e|=1$ داریم

$$u_{ee}=\frac{\partial^2 u}{\partial e\partial e}\in \underline{S}\left(\frac{\lambda}{n},\Lambda\right)$$

* اثبات قضیه ۱: نشان می‌دهیم برای $\varepsilon>0$ به اندازه کافی کوچک $\frac{1}{2}(u^\varepsilon+v^\varepsilon)$ یک زیرجواب لزجی برای $F(D^2u)=0$ است. فرض کنید P یک سهمی باشد که $\frac{1}{2}(u^\varepsilon+v^\varepsilon)$ را از بالا در نقطه‌ای مانند x_0، touch می‌کند نشان می‌دهیم $F(D^2P)\geq 0$. تعریف کنید: $(B_r(x_0)\subset\Omega)$

$$w(x)=P(x)+\delta|x-x_0|^2-\delta r^2-\frac{1}{2}(u^\varepsilon+v^\varepsilon)\qquad \delta>0$$

همانند اثبات قضیه 3 در جلسه قبل می‌توان نتیجه گرفت که $x_1\in\Omega$ موجود است به طوریکه u^ε، v^ε و w در x_1 p.s.d هستند و

$$D^2\left\{P+\delta|x-x_0|^2-\frac{1}{2}(u^\varepsilon+v^\varepsilon)\right\}(x_1)\geq 0 \quad (1)$$

$$F(D^2u^\varepsilon(x_1))\geq 0 \quad , \quad F(D^2v^\varepsilon(x_1))\geq 0$$

$$\xrightarrow{F\ \text{مقعر}} \quad F\left(D^2\,\tfrac{1}{2}(u^\varepsilon+v^\varepsilon)\right)(x_1)) \geq 0 \qquad (2)$$

$$(1) \Rightarrow \quad D^2\left(p+\delta|x-x_0|^2\right) \geq D^2\left(\tfrac{1}{2}(u^\varepsilon+v^\varepsilon)\right)$$

$$\xrightarrow[(2)]{F\ \text{صعودی}} \quad F(D^2p+2\delta I) \geq 0 \quad \xrightarrow{\delta\to 0} \quad F(D^2p)\geq 0 \qquad \blacksquare$$

مباحثی در PDE

حل سریه ۹۶/۸/۸

قضیه Evans-Krylov

اگر F مقعر (محدب) باشد و u جواب لزجی پیوسته $F(D^2u)=0$ در B_1 آنگاه $u\in C^{2,\alpha}(\overline{B_{1/2}})$ و

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{B_{1/2}})} \leq C\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)}+|F(0)|\right)$$

که ضرایب C و α جهانی هستند.

تذکر: 1. تقعر F یعنی $F(tM+(1-t)N)\geq tF(M)+(1-t)F(N)$ برای $0\leq t\leq 1$

2. اگر قضیه بالا را برای عملگرهای مقعر ثابت کنیم به راحتی برای عملگرها محدب نیز نتیجه می‌شود با قرار دادن

$$G(M)=-F(-M)$$

از عملگر بیضوی محدب F یک عملگر بیضوی مقعر G ساخته می‌شود. (ثابت‌های بیضوی F و G یکسان هستند)

قضیه 1: اگر F تعریف شده و $u \in C^2(B_1)$ که $F(D^2u)=0$ در B_1. آنگاه $u \in C^{2,\alpha}(\overline{B_{1/2}})$ و

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{B_{1/2}})} \leq C \|u\|_{C^{1,1}(\overline{B_{3/4}})}$$

که ثابتهای C و $0<\alpha<1$ جهانی هستند.

لم ۲: تحت شرایط قضیه 1 ثابت جهانی $0<\delta_0<1$ وجود دارد بطوری که اگر $\operatorname{diam} D^2u(B_1)=2$ نتیجه شود $\operatorname{diam}(D^2u(B_{\delta_0})) \leq 1$.

اثبات قضیه 1: ابتدا نشان میدهیم برای هر اندیس ij نزول داریم:

$$\underset{B_{\delta_0 R}}{\operatorname{osc}}\, u_{ij} \leq \frac{1}{2} \underset{B_R}{\operatorname{osc}}\, u_{ij}$$

فرض کنید $t = \operatorname{diam} D^2u(B_R)$ قرار دهید:

$$v(x) := \frac{2u(Rx)}{tR^2}$$

$$D^2v(x) = \frac{2}{t} D^2u(Rx) \implies \operatorname{diam}(D^2v(B_1)) = 2$$

$$G(M) := \frac{2}{t} F\left(\frac{t}{2} M\right) \longrightarrow$$ یک عملگر بیضوی با ثابت‌های F

$$G(D^2 v) = 0$$

بنابر لم ۲ می‌دانیم که $\operatorname{diam}(D^2 v(B_{\delta_0})) \leq 1/2$

$$\Longrightarrow \operatorname{diam}(D^2 u(B_{\delta_0 R})) \leq t = \operatorname{diam}(D^2 u(B_R))$$

حال قرار دهید: $\varphi(R) := \underset{B_R}{\operatorname{osc}}\, u_{ij}$

$$\varphi(\delta_0 R) \leq 1/2\, \varphi(R) \Longleftarrow \varphi(R) := \underset{B_R}{\operatorname{osc}}\, u_{ij}$$

کافی است نشان دهیم $\varphi(r) \leq C r^{\alpha}$ برای هر $0 < r$ و ثابت‌های C و $0 < \alpha < 1$.

$$\varphi(\delta_0^m R) \leq \frac{1}{2^m} \varphi(R) \qquad \frac{r}{\delta_0^{m-1}} \leq \frac{1}{2} \leq \frac{r}{\delta_0^m} \qquad m \log \delta_0 \leq \log(2r)$$

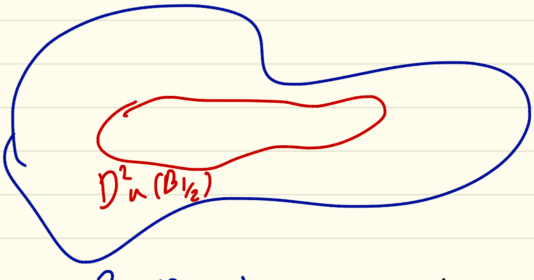
$$m \geq \frac{\log 2r}{\log \delta_0}$$

$$\varphi(r) \leq \frac{1}{2^{m-1}} \varphi\left(\frac{r}{\delta_0^{m-1}}\right) \leq 2\varphi(1/2) \cdot \frac{1}{2^m} \leq C\varphi(\tfrac{1}{2})\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\log 2r}{\log \delta_0}}$$

$$= C\varphi(\tfrac{1}{2})\,(2r)^{-\frac{\log 2}{\log \delta_0}} = \tilde{C}\varphi(\tfrac{1}{2})\, r^{\alpha}$$

ثابتهای $\tilde{C}$ و $\alpha > 0$ تنها به δ_0 وابسته‌اند. از طرفی $\|u\|_{C^{1,1}(B_{3/4})} \le \varphi(\frac{1}{2})$. ■

لم ۳. تحت شرایط قضیه 1 فرض کنید $1 < \operatorname{diam} D^2u(B_1) \le 2$ و $D^2u(B_1)$ با N گوی $B^1, \dots, B^N$ با شعاع ϵ (گوی در فضای ماتریس‌های متقارن) پوشانده شده باشد که $N \ge 1$، $\epsilon \le \epsilon_0$ که ϵ_0 یک ثابت جهانی است. آنگاه $D^2u(B_{1/2})$ با $N-1$ گوی از بین $B^1, \dots, B^N$ می‌توان پوشاند.



اثبات لم ۲: چون $\operatorname{diam} D^2u(B_1) = 2$ پس حداکثر با تعداد N گوی به شعاع ϵ_0 می‌توان آن را پوشاند که N تنها به ϵ_0 و بعد فضا ربط دارد.
نشان می‌دهیم $\delta_0 = \frac{1}{2^N}$ در ادعای قضیه صدق می‌کند. بنابر لم ۳ با $N-1$ گوی می‌توان $D^2u(B_{1/2})$ را پوشاند. اگر $\operatorname{diam} D^2u(B_{1/2}) \le 1$ آنگاه اثبات تمام است وگرنه

دوباره از لم ۳ استفاده کنید و $D^2u(B_{1/4})$ را با $N-2$ کوی بپوشانید. به همین ترتیب اگر در مرحله ای

$1 \geq \operatorname{diam} D^2u(B_{\frac{1}{2^k}})$ باشد برای $1 \leq K < N$ اثبات تمام می‌شود وگرنه مهران

$D^2u(B_{\frac{1}{2^{k+1}}})$ را با $N-K-1$ بپوشانند. ∎

ابزارهای اثبات لم ۳.

لم ۴. اگر $v \in \overline{S}(\lambda, \Lambda, 0)$ در B_1 و $v \geq 0$ در B_1. آنگاه

$$\inf_{B_{1/2}} v \geq C\,\left|\{v \geq 1\} \cap B_{1/4}\right|^{\delta}$$

که ثابت‌های C و δ جهانی هستند.

اثبات ـ بنابر صورت ضعیف هارناک داریم:

$$\|v\|_{L^{p_0}(B_{1/4})} \leq C\left(\inf_{B_{1/2}} v + \|f\|_{L^n(B_1)}\right) \quad \text{و}$$

$$\|v\|_{L^{p_0}(B_{1/4})} \geq \left[\int_{\{v\geq 1\}} |v|^{p_0}\,dx\right]^{1/p_0} \geq \left(\int_{\{v \geq 1\}} 1\,dx\right)^{1/p_0} = |\{v \geq 1\}|^{1/p_0}$$

لم ۵ اگر $F(M_1)=0=F(M_2)$ آنگاه رابطهٔ زیر برای $c_0=\frac{\lambda}{\lambda+\Lambda}$ برقرار است.

$$c_0\|M_2-M_1\| \le \|(M_2-M_1)^+\| = \sup_{\substack{e\in\mathbb{R}^n\\ \|e\|=1}} \left(e^t(M_2-M_1)e\right)^+$$

بزرگترین مقدار ویژه مثبت.

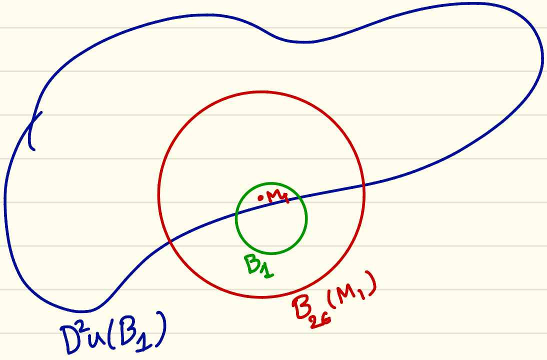
اثبات:

$$0 = F(M_2)-F(M_1) \le \Lambda\|(M_2-M_1)^+\| - \lambda\|(M_2-M_1)^-\|$$

$$\|M_2-M_1\| = \|(M_2-M_1)^+\| + \|(M_2-M_1)^-\| \le \left(1+\frac{\Lambda}{\lambda}\right)\|(M_2-M_1)^+\|$$

اثبات لم ۳ : فرض کنید $x_i \in B_1$ و $M_i = D^2u(x_i)$ و $B^i \subset B_{2\epsilon}(M_i)$

همچنین فرض کنید $2\epsilon \le 2\epsilon_0 \le \frac{c_0}{16}$ که c_0 ثابت لم ۵ است.



بنابراین می‌توان فرض کرد

$$D^2u(B_1) \subseteq B_{\frac{c_0}{16}}(M_1) \cup \dots \cup B_{\frac{c_0}{16}}(M_N)$$

ادعا می‌کنیم که اندیس j وجود دارد که

$$D^2u(B_{1/2}) \cap B_{2\epsilon}(M_j) = \emptyset$$

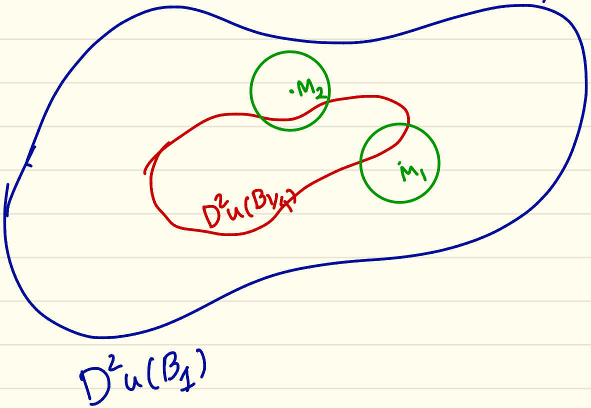
در این مرحله می‌توانیم فرض کنیم که

$$D^2u(B_1) \subseteq B_{\frac{c_0}{8}}(M_1) \cup \dots \cup B_{\frac{c_0}{8}}(M_{N'})$$

و فاصله دو به دو M_i ها بیشتر از $\frac{c_0}{16}$ است. چون قطر $D^2u(B_1)$ برابر 2 است در نتیجه N' یک ثابت جهانی است که به c_0 و بعد فضا وابسته است.

می‌توان فرض کرد برای یکی از M_iها مثل M_1 داریم $\left|D^2u^{-1}(B_{\frac{c_0}{8}}(M_1)) \cap B_{\frac14}\right| \geq \eta > 0$ در این صورت اندیس i وجود دارد که

در واقع $\eta = \frac{|B_{1/4}|}{N}$ ثابت جهانی است.



$\|M_i - M_1\| \geq 1/4$ که آن را قرار می‌دهیم $i=2$.

زیرا اگر برای همه اندیس $\frac{1}{4} > \|M_i - M_1\|$

$$B_{\frac{c_0}{8}}(M_i) \subseteq B_{\frac{c_0}{8}+\frac14}(M_1)$$

$$\Rightarrow D^2u(B_1) \subseteq B_{\frac{c_0}{8}+\frac14}(M_1)$$

$$\Rightarrow \operatorname{diam}(B_1) < \frac{c_0}{4} + \frac{1}{2} < 1$$

که تناقض با فرض است.

اکنون به کمک لم ۵ داریم:

$$\frac{c_0}{4} \leq \|(M_2 - M_1)^+\| = \left\|\left(D^2u(x_2) - D^2u(x_1)\right)^+\right\|$$

$$= \sup e^t (\,\cdots\,) e$$

بنابراین بردار e با شرط $\|e\|=1$ وجود دارد که

$$\frac{c_0}{4} \leq u_{ee}(x_2) - u_{ee}(x_1)$$

قرار دهید: $0 \leq v = K - u_{ee}$ ، $K = \sup_{B_1} u_{ee}$

داریم: $v \in \bar{S}(\frac{\lambda}{n}, \Lambda, 0)$ در B_1. (نتیجه ۲ جلسه قبل)

اکنون لم ۴ را برای تابع v $\frac{c_0}{8}$ بنویسید:

$$\inf_{B_{1/2}} v \geq C \left| \{ v \geq \frac{c_0}{8} \} \cap B_{1/4} \right|^{\delta}$$

که ثابت c_1 جهانی است.

$$(*) \qquad \inf_{B_{1/2}} (K - u_{ee}) \geq C_1 > 0$$

چون $B_{2\epsilon}(M_1) \cup \cdots \cup B_{2\epsilon}(M_N) \supseteq D^2u(B_1)$ پس اندیس j وجود دارد که

$$K - u_{ee}(x_j) < 3\epsilon$$

به کمک $(*)$ می‌توان دید که $B_{2\epsilon}(M_j) \cap D^2u(B_{1/2}) = \phi$ به شرط آنکه $\epsilon \leq \epsilon_0 < \frac{C_1}{5}$

زیرا در غیر اینصورت $y \in B_{1/2}$ وجود دارد که

$$\left.\begin{array}{l} |u_{ee}(y)-u_{ee}(x_j)| \leq \left|D^2u(y) - D^2u(x_j)\right| < 2\epsilon \\ K - u_{ee}(x_j) < 3\epsilon \end{array}\right\} \Rightarrow K - u_{ee}(y) < 5\epsilon$$

رابطه $(*)$ نتیجه می‌دهد $C_1 < 5\epsilon$ که تناقض دارد با انتخاب ε_0.

برای اثبات رابطه $(*)$ کافی است نشان دهیم

$$y \in D^2u^{-1}\left(B_{\frac{c_0}{8}}(M_1)\right) \cap B_{\frac{1}{4}} \subseteq \left\{v \geq \frac{c_0}{8}\right\} \cap B_{1/4}$$

$$\Downarrow$$

$$\left|D^2u(y) - M_1\right| < \frac{c_0}{8} \Rightarrow |D^2u(y) - D^2u(x_1)| < \frac{c_0}{8} \Rightarrow |u_{ee}(y) - u_{ee}(x_1)| < \frac{c_0}{8}$$

$$u_{ee}(y) + \frac{c_0}{8} \leq u_{ee}(x_2) \leq K \Leftarrow \frac{c_0}{4} \leq u_{ee}(x_2) - u_{ee}(x_1) \quad \text{از طرفی داشتیم}$$

$$\Rightarrow \frac{c_0}{8} \leq v(y).$$

مباحثی در PDE

جلسه چهارده ۹۶/۸/۱۳

تذکر: در لم ۳ جلسه پیش و در نتیجه قضیه 1 می‌توان شرط $u \in C^2$ را به $u \in C^{1,1}$ تقلیل داد. در واقع کاربرد اساسی این فرض در پیوستگی $v = K - u_{ee}$ و $v \in \overline{S}(\lambda/n, \Lambda)$ و همچنین استفاده از لم ۴ (جلسه قبل) است.

برای برطرف کردن این مشکل دقت کنید که بنا بر نتیجه ۲ جلسه ۱۲ می‌دانیم

$$\Delta_{he}^2 u = \frac{u(x+he) + u(x-he) - 2u(x)}{h^2} \in \underline{S}(\lambda/n, \Lambda)$$

چون $u \in C^{1,1}$ بازی توان فرض کرد که

$$\sup_{B_1} \Delta_{he}^2 u \le K \quad \text{برای هر } 0 < h < 1$$ (ثابت K مستقل از h است)

$$v_h = K - \Delta_{he}^2 u \in \overline{S}(\lambda/n, \Lambda)$$

می‌دانیم $\Delta_{he}^2 u \longrightarrow u_{ee}$ در L^∞ وقتی $h \to 0$. اکنون لم ۴ جلسه قبل را برای v_h استفاده کنید

نتیجه می‌گیریم که

$$\inf_{B_{1/2}} v_h \ge c \left| \left\{ v_h \ge \frac{c_0}{16} \right\} \cap B_{1/4} \right|^{\delta}$$

کافی است نشان دهیم سمت راست نامساوی از یک ثابت جهانی مثل C_1 بزرگتر است آنگاه

$$\forall x \in B_{1/2} \implies \varphi_h(x) \ge C_1 > 0$$

$$\Big\downarrow \text{a.e.}$$

$$K - u_{ee}(x) \ge C_1 > 0$$

و نتیجه اثبات می‌شود. برای اثبات وجود C_1 ابتدا دقت کنید بنابر قضیه‌ی الکروف زیرمجموعه $A \subseteq {D^2u}^{-1}(B_{\frac{c_0}{8}}(M_1)) \cap B_{1/4}$ وجود دارد که $|A| \ge \eta/2$ (η ثابت جهانی که در اثبات لم ۳ آمده است)

$\Delta^2_{he}u \xrightarrow{\text{uniform}} u_{ee}$ in A پس برای $h<h_0$ داریم $|u_{ee} - \Delta^2_{he}u| < \frac{c_0}{16}$ در A

حال کافی است نشان دهیم $A \subseteq \{\varphi_h \ge \frac{c_0}{16}\}$.

$$y \in A \Rightarrow \left|D^2u(y) - M_1\right| < \frac{c_0}{8} \implies |D^2u(y) - D^2u(x_1)| < \frac{c_0}{8} \implies |u_{ee}(y) - u_{ee}(x_1)| < \frac{c_0}{8}$$

از طرفی داشتیم $u_{ee}(y) + \frac{c_0}{8} \le u_{ee}(x_2) \le K \Leftarrow \frac{c_0}{4} \le u_{ee}(x_2) - u_{ee}(x_1)$

$$\frac{c_0}{8} \le K - u_{ee}(y) \implies \frac{c_0}{16} \le K - \Delta^2_{he}u(y) = \varphi_h(y)$$

قضیه Evans- Krylov

اگر F مقعر (محدب) باشد و u جواب لزج پیوسته $F(D^2u)=0$ در B_1 . آنگاه $u \in C^{2,\alpha}(\overline{B_{1/2}})$ و

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{B_{1/2}})} \le C\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + |F(0)|\right)$$

که ضرایب C و α جهانی هستند.

<u>نکته</u>: کافی است قضیه را برای $F(0)=0$ اثبات کنیم. فرض کنید چنین نباشد ولی بنابر خاصیت بیضوی F ثابت $t \in \mathbb{R}$ وجود دارد که $F(tI)=0$ که $|t| < \frac{|F(0)|}{\lambda}$ عملگر G را به صورت زیر تعریف کنید:

$$G(M) := F(M+tI), \qquad G(0)=0$$

$$F(D^2u)=0 \implies G\Big(D^2\big(\underbrace{u - \tfrac{t}{2}|x|^2}_{v}\big)\Big) = 0$$

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}} + t \simeq \|v\|_{C^{2,\alpha}} \le C\|v\|_{L^\infty(B_1)} \le C\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + t\right)$$

اثبات قضیه: کافی است ثابت کنیم جواب‌های پیوسته لزجی داریم

$$\|u\|_{C^{1,1}(B_{3/4})} \leq C\|u\|_{L^\infty(B_1)}$$

(فرض می‌کنیم $F(0)=0$) همچنین می‌توان فرض کرد $\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leq 1$. زیرا اگر $r=\|u\|_{L^\infty(B_1)}$

آنگاه $\frac{u}{r}$ جواب لزجی عملگر $\frac{1}{r}F(rM)=0$ است که ثابت‌های بیضوی آن مشابه F است.

چون F مقعر است عملگر خطی L وجود دارد که $L(M)=\sum a_{ij}m_{ij}=tr(AM)$ برای هر ماتریس متقارن M داریم:

$$L(M) \geq F(M)$$

دقت کنید که A یک ماتریس مثبت معین است با مقادیر ویژه در $[\lambda,\Lambda]$ زیرا

$$M=\xi\otimes\xi=[\xi_i\xi_j]_{i,j} \Rightarrow \sum a_{ij}\xi_i\xi_j \geq F(\xi\otimes\xi) \geq F(0)+\lambda\|\xi\otimes\xi\| =\lambda|\xi|^2$$

$$\sum a_{ij}\xi_i\xi_j = -L(-\xi\otimes\xi) \leq -F(-\xi\otimes\xi) \leq -F(0)+\Lambda\|\xi\otimes\xi\| = \Lambda|\xi|^2$$

اکنون تغییر متغیر وجود دارد که در آن عملگر L برابر Δ خواهد بود. دقت کنید این تغییر متغیر به ماتریس A وابسته است

و نرم اپراتوری $\|\cdot\|$ در فضای جدید، در حد ثابت‌های $\|A\|$ و $\|A^{-1}\|$ تغییر می‌کند. (که این دو تنها به λ و Λ وابسته‌اند)

پس فرض می‌کنیم $F \leq L = \Delta$. چون $F(D^2u)=0$ به معنای لزجی برقرار است داریم

$$(1) \qquad \Delta u \geq 0 \quad \text{به معنای لزجی}$$

زیرا اگر $\varphi \in C^2$ و از بالا به u تماس داشته باشد آنگاه $\Delta\varphi \geq F(D^2\varphi) \geq 0$.

در نتیجه $\forall x_0 \in B_{1/2}\,,\ h<1/2$:

$$(2) \qquad u(x_0) \leq \fint_{\partial B_h(x_0)} u$$

دقت کنید برای اثبات کلاسیک از (1) به (2) احتیاج است که $u \in C^2$ باشد و در اینجا تنها فرض پیوستگی u را داریم. اما اگر $\varphi \in C^2$ و از بالا به u در نقطه x_0 تماس داشته باشد داریم $\Delta\varphi \geq 0$

$$u(x_0)=\varphi(x_0) \leq \fint_{\partial B_h(x_0)} \varphi \Rightarrow u(x_0) \leq \inf_{u\leq\varphi} \left[\fint_{\partial B_h(x_0)} \varphi\right] = \fint_{\partial B_h(x_0)} u$$

و در نتیجه رابطه (2) برای تقریباً همه نقاط x_0 در $B_{1/2}$ برقرار است. اکنون از پیوستگی u می‌توان نتیجه گرفت (2) برای همه نقاط برقرار است.

$$u_h^*(x) := \frac{1}{h^2}\left(\fint_{\partial B_h(x)} u(y) - u(x)\, dy \right)$$

برای هر تابع $\varphi \in C^\infty$ می‌توان دید که $\varphi_h^* \to \frac{1}{2n}\Delta\varphi$ به طور یکنواخت.

بنابر تساوی (2) داریم $0 \le u_h^*$ در $B_{1/2}$.

از طرفی بنابر قضیه‌ای در جلسه ۱۲ می‌دانیم که ترکیب خطی دو زیرجواب $F(D^2u)=0$، زیرجواب است و با استقراء می‌توان این مطلب را برای تعداد متناهی جواب نیز گفت. از طرفی می‌توان $\fint_{\partial B_h(x)} u$ به صورت حد ترکیب خطی تعداد متناهی تابع نوشت بنابراین این تابع نیز زیرجواب $F(D^2u)=0$ است.

در نتیجه $\underline{S}(\lambda/n,\Lambda) \ni u_h^* \Longleftarrow \underline{S}(\lambda/n,\Lambda) \ni \fint_{\partial B_h(x)} u - u(x)$

هارناک ضعیف $\Longrightarrow \sup_{B_{1/4}} u_h^* \le C \, \|u_h^*\|_{L^p(B_{1/3})}$

تابع هموار و مثبت $0 \le \varphi$ را در نظر بگیرید که $\varphi \equiv 1$ روی $B_{1/3}$ و خارج $B_{1/2}$ برابر صفر

$$\int_{B_{1/3}} |u_h^*| = \int_{B_{1/3}} u_h^* \varphi \le \int_{B_{1/2}} u_h^* \varphi = \int_{B_{1/2}} \varphi_h^* u \le C \, \|D^2\varphi\|_{L^\infty}$$

$\|u\|_{L^\infty} \le 1$

$$\int_{B_1} u_h^* \varphi = \int_{B_1} \frac{1}{h^2}\left[\fint_{\partial B_h(x)} u - u(x)\right]\varphi(x)\,dx = \frac{1}{h^2}\int_{B_1}\left[\int_{\partial B_h(0)} u(y+x)\varphi(x)\,dy - u(x)\varphi(x)\right]dx$$

$$= \frac{1}{h^2}\int_{\partial B_h(0)}\left[\int_{B_1} u(\underbrace{y+x}_{z})\varphi(\underbrace{x}_{z-y})\underbrace{dx}_{dz}\right]dy - \frac{1}{h^2}\int_{B_1}\int_{\partial B_h(0)} u(x)\varphi(x)\,dx$$

$$\int_{B_1}\int_{\partial B_h(0)} u(z)\varphi(z+y)\,dy\,dz$$

بنابراین در هارناک ضعیف $p=1$ قرار داده و نتیجه می‌شود

$$\|u_h^*\|_{L^\infty(B_{1/4})} \leq C$$

برای ثابت جهانی C.

اکنون نشان می‌دهیم Δu به معنای توزیعی یک تابع L^∞ است. برای این منظور باید نشان دهیم

$$\langle \Delta u, \psi \rangle = \langle u, \Delta\psi \rangle \leq C \|\psi\|_{L^1(B_{1/4})} \qquad \forall \psi \in C_0^\infty(B_{1/4})$$

$$\int_{B_{1/4}} u\Delta\psi = \lim_{h\to 0} 2n\int_{B_{1/4}} u\,\psi_h^* = \lim_{h\to 0} 2n\int_{B_{1/4}} u_h^*\,\psi \leq 2Cn\int_{B_{1/4}} |\psi|$$

$$\Longrightarrow \|\Delta u\|_{L^\infty(B_{1/4})} \leq 2Cn \Longrightarrow u \in W^{2,p}(B_{1/5}) \quad \forall p<\infty$$

$$(3) \Longrightarrow \|D^2 u\|_{L^2(B_{1/5})} \leq C \longleftarrow \text{ثابت جهانی}$$

می دانیم که $\underline{S}(\lambda/n,\Lambda) \ni \Delta^2_{he} u(x) = \dfrac{u(x+he)+u(x-he)-2u(x)}{h^2}$

و رابطه (3) در صفحه قبل اثبات می‌کند که

$$\|\Delta^2_{he} u\|_{L^2(B_{\frac{1}{10}})} \le \underset{\text{مستقل از } e,h}{C} \qquad \text{for } 0<h<\tfrac{1}{10}$$

دوباره به کمک قضیه هارناک ضعیف داریم:

$$\sup_{B_{\frac{1}{11}}} \Delta^2_{he} u \le C \, \|\Delta^2_{he} u\|_{L^2(B_{\frac{1}{10}})} \le C$$

$$\Rightarrow \quad u_{ee}(x) \le \underset{\text{مستقل از } e}{C} \quad \text{in } B_{\frac{1}{11}}$$

اکنون به وسیله لم ۵ طبق ۱۳ و با توجه به اینکه $F(0)=0$ داریم:

$$\|D^2 u\|_{L^\infty} \le \frac{1}{c_0} \sup_{\|e\|=1} (u_{ee})^+ \le C$$

مباحثی در PDE

جلسه پانزده ۹۶/۸/۱۵

$W^{2,p}$ Regularity

$$F(D^2u, x) = f(x)$$

فرض ها:

(i) $\quad F(0, x) = 0$

$$G(D^2u, x) := F(D^2u, x) - F(0, x)$$

این فرض محدود کننده نیست.

$$= f(x) - F(0, x) = g(x)$$

$$G(0, x) = 0$$

(ii) به ازای هر نقطه ثابت $x_0 \in B_1$، عملگر $F(\cdot, x_0)$ دارای تخمین درونی $C^{1,1}$ باشد یعنی

برای هر تابع $w_0 \in C(\partial B_1)$ معادله زیر دارای جواب $w \in C^2(B_1) \cap C(\overline{B_1})$ است

$$\begin{cases} F(D^2w(x), x_0) = 0 & \text{in } B_1 \\ w(x) = w_0(x) & \text{on } \partial B_1 \end{cases}$$

و داریم

$$\|w\|_{C^{1,1}(\overline{B_{\frac{1}{2}}})} \leq C_e \|w_0\|_{L^\infty(\partial B_1)} \qquad (1)$$

ثابت C_e یک ثابت جهانی است که تنها به λ ، Λ و n وابسته است.

دقت کنید اگر $F(M, x_0)$ نسبت به M محدب یا مقعر باشد آنگاه ویژگی بالا برقرار است.

هر چند قضیه Evans-krylov در سمت راست تقریب (1) داریم $\|w\|_{L^\infty(B_1)}$ ولی به کمک اصل ماکسیمم

هر کران دیگر $\|w\|_{L^\infty(B_1)} \leq \|w_0\|_{L^\infty(\partial B_1)}$. برای استفاده از اصل ماکسیمم دقت کنید $F(0, x_0) = 0$ و

در نتیجه $w \in \overline{S} \cap \underline{S} \Longleftarrow w - \|w_0\|_{L^\infty} \in \underline{S}$ و $w + \|w_0\|_{L^\infty} \in \overline{S}$

$$\Rightarrow \quad w - \|w_0\|_{L^\infty} \leq 0 \ , \quad w + \|w_0\|_{L^\infty} \geq 0 \quad \text{in } B_1$$

$$\Rightarrow \quad \|w\|_{L^\infty(B_1)} \leq \|w_0\|_{L^\infty(\partial B_1)}$$

(iii)

$$\beta(x,x_0)=\beta_F(x,x_0)=\sup_{M\neq 0}\frac{|F(M,x)-F(M,x_0)|}{\|M\|}$$

$$\left(\fint_{B_r(x_0)}(\beta(x,x_0))^n\,dx\right)^{\frac{1}{n}}\leq\beta_0$$

برای هر $B_r(x_0)\subseteq B_1$.

قضیه: فرض کنید u جواب لزجی $F(D^2u,x)=f(x)$ در B_1 باشد. که F در فرض‌های (i) و (ii) صدق می‌کند. همچنین فرض کنید $f\in L^p$ برای $n<p<\infty$. آنگاه ثابت‌های مثبت C و β_0 وجود دارند که تنها به λ و Λ و n و C_e و p بستگی دارند به طوری که اگر (iii) برقرار باشد آنگاه $u\in W^{2,p}(B_{\frac{1}{2}})$ و

$$\|u\|_{W^{2,p}(B_{\frac{1}{2}})}\leq C\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)}+\|f\|_{L^p(B_1)}\right)$$

تذکر - قضیه برای گوی به شعاع B_r درست است تنها باید نرم‌های زیر را جایگزین کرد:

$$\|u\|^*_{W^{2,p}(B_r)} := \|u\|_{L^p(B_r)} + r\,\|Du\|_{L^p(B_r)} + r^2\,\|D^2u\|_{L^p(B_r)}$$

و باید در فرض (خ۲) نیز نرم مشابه $\|\cdot\|^*_{C^{1,1}}$ استفاده کرد.

<u>نکته:</u> کافی است قضیه را با فرض $\|u\|_{L^\infty} \leq 1$ و $\|f\|_{L^p} \leq \epsilon$ ثابت کرد زیرا می‌توان همیشه قرار داد:

$$v = \underbrace{\frac{\epsilon}{\epsilon\|u\|_{L^\infty} + \|f\|_{L^p}}}_{K}\,u \quad \Rightarrow \quad \|v\|_{L^\infty} \leq 1$$

$$G(D^2v, x) = K\,F\left(\frac{1}{K}D^2v(x), x\right) = Kf(x) = g(x)$$

$$\|g\|_{L^p} = K\,\|f\|_{L^p} \leq \epsilon$$

گزاره 1 : فرض کنید u جواب لزج $F(D^2u, x) = f(x)$ در $B_{8\sqrt{n}}$ باشد، که

F در فرض‌های (i) و (ii) صدق می‌کند و فرض کنید

$$\|f\|_{L^p(B_{8\sqrt{n}})} \leq \epsilon \quad , \quad \|u\|_{L^\infty(B_{8\sqrt{n}})} \leq 1$$

و فرض (iii) برای $\beta_0 = \epsilon$ برقرار است. آنگاه $u \in W^{2,p}(B_{\frac{1}{2}})$ و

$$\|u\|_{W^{2,p}(B_{1/2})} \leq C$$

که C و ϵ ثابت‌های جهانی هستند که تنها به n، λ، Λ، p و C_e وابسته هستند.

تعریف: برای هر مجموعه $H \subseteq \Omega$ و عدد $0 < M$،

$$\underline{G}_M(u,H) = \{x_0 \in H : \text{یک سهموی مقعر } P \text{ با دهانه } M \text{ وجود داشته باشد به طوری که } P(x_0)=u(x_0) \text{ و } P(x) \le u(x) \text{ برای هر } x \in H\}$$

تعبیر $\underline{G}_M$: نقاطی است که مشتق دوم u در آن از پایین با $M-$ کنترل می‌شود.

$$\underline{A}_M(u,H) = H \setminus \underline{G}_M(u,H) \longrightarrow$$ نقاطی که مشتق از M بزرگتر است.

به طور مشابه $\overline{G}_M(u,H)$ و $\overline{A}_M(u,H)$

$$G_M(H) := \overline{G}_M(u,H) \cap \underline{G}_M(u,H) \longrightarrow$$ قدر مطلق مشتق دوم کوچکتر از M است.

$$A_M(H) := H \setminus G_M(H) \longrightarrow$$ مشتق دوم بزرگ است.

$$\Theta(x) := \inf\{M : x\in G_M(B_{1/2})\} \in [0,\infty]$$

به تعبیری نرم مشتق دوم است.

$$M\le N \Rightarrow G_M \subseteq G_N$$

کافی است ثابت کنیم $\|\Theta\|_{L^p(B_{1/2})} \le C$ که C ثابت جهانی است.

$$\mu_\Theta(t) = |\{x\in B_{1/2} : \Theta(x) > t\}|$$

لم 2: فرض کنید g یک تابع نامنفی اندازه‌پذیر در Ω باشد، و μ_g تابع توزیع آن

$$\mu_g(t) = |\{x\in\Omega : g(x)>t\}| \qquad t>0$$

$\eta>0$ و $M>1$ اعداد ثابت دلخواه بگیرید آنگاه برای $0<p<\infty$

$$g\in L^p(\Omega) \iff \sum_{k\ge 1} M^{pk}\mu_g(\eta M^k) = S<\infty$$

در این صورت $C^{-1}S \le \|g\|_{L^p}^p \le C(|\Omega|+S)$ که ثابت C تنها به p، η، M وابسته است.

از طرفی وقتی $x \in A_t \Leftarrow x \notin G_t \Leftarrow \Theta(x) > t$

$$\mu_{\Theta}(t) \le |A_t|$$

ایده اثبات: نشان می‌دهیم $\sum_{k=1}^{\infty} M^{pk} |A_{M^k}| < \infty .$

مباحثی در PDE

جلسه شانزده ۹۶/۸/۲۰

$$(H)\begin{cases} u \in \overline{S}(f) \quad \text{in } B_{6\sqrt{n}} \subseteq \Omega \\ \|f\|_{L^n(B_{6\sqrt{n}})} \leq \delta_0 \longrightarrow \text{یک ثابت جهانی که بعداً مشخص می‌شود.} \\ \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1 \end{cases}$$

<u>لم ۳</u>: با فرض‌های (H) داریم:

$$\left|\underline{A}_t(u,\Omega) \cap Q_1\right| \leq C_2 t^{-\mu}$$

که C_2 و μ ثابت‌های جهانی هستند. به‌علاوه اگر $u \in S(f)$ آنگاه

$$|A_t(u,\Omega) \cap Q_1| \leq C_2 t^{-\mu}.$$

نتیجه: اگر $u\in S(f)$ و $f\in L^n(B_1)$. آنگاه ثابت جهانی $\delta>0$ وجود دارد که $u\in W^{2,\delta}(B_{1/2})$ و

$$\|u\|_{W^{2,\delta}(B_{1/2})} \le C\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{L^n(B_1)} \right)$$

که C ثابت جهانی است.

اثبات ـ کافی است برای $\|f\|_{L^n}\le\delta_0$ و $\|u\|_{L^\infty}\le 1$ ثابت کنیم یک ثابت جهانی C وجود دارد که

$$\|D^2u\|_{L^\delta(B_{1/2})} \le C$$

یا به طور معادل $\Theta\in L^\delta \iff \sum_{k=1}^{\infty} M^{\delta k}|A_{M^k}| < \infty$

بنابر لم ۳ داریم:

$$\sum_{k=1}^{\infty} M^{\delta k}\, M^{-k\mu} < \infty$$

که گزاره آخر برای هر $\delta<\mu$ درست است.

تعریف: برای $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ تابع ماکسیمال و را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$m(g)(x) = \sup_{r>0} \fint_{Q_r(x)} |g(y)|dy$$

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : m(g)(x) \geq t\}| \leq \frac{C_1}{t} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall t > 0$$

$$\|m(g)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_2 \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \qquad 1 < p \leq \infty$$

لم ۴. تحت فرضهای (H) تابع f را خارج $B_{6\sqrt{n}}$ با صفر توسعه دهید و

$$A := \underline{A}_{M^{k+1}} \cap Q_1 \quad ,$$

$$B := \left(\underline{A}_{M^k} \cap Q_1\right) \cup \{x \in Q_1 : m(f^n)(x) \geq (c_1 M^k)^n\}$$

آنگاه $|A| \leq \sigma |B|$ که $0 < \sigma < 1$ و $1 < M$ و δ_0 و c_1 ثابتهای جهانی هستند.

اثبات لم ۳ :

$$\alpha_k = \left| A_{M^k} \cap Q_1 \right|$$

$$\beta_k = \left| \{ x \in Q_1 : m(f^n)(x) \geq (c_1 M^k)^n \} \right|$$

لم 4 $\Longrightarrow \quad \alpha_{k+1} \leq \sigma(\alpha_k + \beta_k)$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_k \leq \sigma^k + \sum_{i=0}^{k-1} \sigma^{k-i} \beta_i$$

از لون می‌دانیم :

$$\beta_k \leq \frac{c_1}{(c_1 M^k)^n} \| f^n \|_{L^1(B_{6\sqrt{n}})} \leq c_1 \left(\frac{\delta_0}{c_1 M^k} \right)^n$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} \sigma^{k-i} \beta_i \leq C \delta_0^n \sum_{i=0}^{k-1} \sigma^{k-i} M^{-in} \leq C \delta_0^n k m_0^k$$

$$\underline{m_0 = \max\{\sigma, M^{-n}\} < 1}$$

$$\alpha_k \leq (1 + Ck) m_0^k \Longrightarrow \left| A_t \cap Q_1 \right| \leq C_2 t^{-\mu}$$

$$\sqrt[k]{1+Ck} \qquad m_0 \leq C_2 M^{-\mu} \qquad \longrightarrow M^{\mu} \leq C/m_0$$

نکته: مقدار δ در نتیجه $u \in W^{2,\delta}$ به μ وابسته است در واقع $\delta < \mu$. برای اینکه قضیه ۱ را اثبات کنیم یعنی $u \in W^{2,p}$ بازای هر $n < p < \infty$. باید نتیجه اساسی لم ۳ برای μ به اندازه کافی بزرگ داشته باشیم. به طور مشابه برای اینکه μ به اندازه کافی بزرگ شود باید لم ۴ را برای σ به اندازه دلخواه کوچک داشته باشیم.

برای اثبات لم ۴ به دو لم زیر احتیاج است:

لم ۵. ثابت‌های $0 < \delta_0$ و $1 < M$ و $0 < \sigma < 1$ وجود دارند به طوری که تحت فرض‌های (H) داریم:

$$|G_M(u,\Omega) \cap Q_1| \geq 1-\sigma$$

لم ۶. اگر $u \in S(f)$ و $\|f\|_{L^n(B_{6\sqrt{n}})} \leq \delta_0$ و اگر $\phi \neq G_1(u,\Omega) \cap Q_3$ آنگاه

$$|G_M(u,\Omega) \cap Q_1| \geq 1-\sigma$$

اثبات لم ۴

ایده اثبات استفاده از لم ۲ در جلسه ۸ است . داریم :

$$|\underline{A}_M \cap Q_1| \leq \sigma \implies |A| \leq \sigma$$

مکعب $Q = Q_{\frac{1}{2^i}}(x_0)$ در نظر بگیرید که $|A \cap Q| > \sigma |Q|$ باید نشان دهیم $\tilde{Q} \subset B$.

فرض کنید $\tilde{Q} \not\subset B$ یعنی $x_1 \in \tilde{Q}$ و $x_1 \notin B$

$$\implies \begin{cases} x_1 \notin \underline{A}_{M^k} \implies x_1 \in \underline{G}_{M^k} \\ m(f^n)(x_1) < (C_1 M^k)^n \implies \sup_{r>0} \fint_{Q_r(x_1)} |f|^n < (C_1 M^k)^n \end{cases}$$

اکنون با استفاده زیر از لم ۶ استفاده می‌کنیم

$$x = x_0 + \frac{1}{2^i} y \quad , \quad y \in Q_1 \quad , \quad x \in Q$$

$$\tilde{u}(y) = \frac{2^{2i}}{M^k} u\left(x_0 + \frac{1}{2^i} y\right)$$

یک لحظه فرض کنید شرایط لم ۶ برقرار باشد نتیجه می‌شود $|\underline{G}_M(\tilde{u},\Omega)\cap Q_1| \geq 1-\sigma$

$$\Rightarrow \left|\underline{G}_{M^{k+1}}(u,\Omega)\cap Q\right| \geq (1-\sigma)|Q|$$

که با فرض $|A\cap Q| > \sigma|Q|$ تناقض دارد.

برای بررسی شرایط لم ۶ ابتدا واضح است که $\underline{G}_1(\tilde{u},\Omega)\cap Q_3 \neq \emptyset$ چون $x_1\in \underline{G}_{M^k}(u,\Omega)\cap \tilde{Q}$

اما $\tilde{f}(y) := \frac{1}{M^k} f\left(x_0+\frac{1}{2^i}y\right)$, $\tilde{u}\in \overline{S}(\tilde{f})$

$$\|\tilde{f}\|^n_{L^n(B_{6\sqrt{n}})} = \int_{B_{6\sqrt{n}}} \frac{1}{M^{kn}} \left|f\left(x_0+\frac{1}{2^i}y\right)\right|^n dy = \int_{B_{\frac{6\sqrt{n}}{2^i}}(x_0)} \frac{2^{ni}}{M^{kn}} |f(x)|^n dx$$

$$\leq \fint_{Q_{\frac{15\sqrt{n}}{2^i}}(x_1)} \frac{1}{M^{kn}} |f|^n dx < c_1^n \leq \delta_0^n$$

$|x_1-x_0|_\infty \leq \frac{1}{2^i}$

مباحثی در PDE

جلسه هفده ۹۶/۸/۲۲

نظم $W^{2,p}$ برای $n<p<\infty$

تذکر از جلسه قبل: مقدار δ در نتیجه $u\in W^{2,\delta}$ به μ در لم ۳ وابسته است در واقع $\delta<\mu$. برای اینکه قضیه 1 را اثبات کنیم یعنی $u\in W^{2,p}$ بازای هر $n<p<\infty$. باید نتیجه اصلی لم ۳ برای μ به اندازه کافی بزرگ داشته باشیم. به طور متناظر برای اینکه μ به اندازه کافی بزرگ شود باید لم ۴ را برای σ به اندازه دلخواه کوچک داشته باشیم. اثبات لم ۴ به لم ۵ و ۶ وابسته است. ابتدا نسخه‌ای معادل این دو لم را می‌بینیم.

لم ۷ (معادل لم ۵) $0<\varepsilon_0<1$ دلخواه در نظر بگیرید و u جواب لزجی $F(D^2u,x)=f(x)$ در $B_{8\sqrt{n}}$ به طوری که $\|u\|_{L^\infty(B_{8\sqrt{n}})}\le 1$ و $-|x|^2\le u(x)\le |x|^2$ در $\Omega\setminus B_{6\sqrt{n}}$. فرض کنید $\|f\|_{L^n(B_{7\sqrt{n}})}\le\varepsilon$ و $\|\beta\|_{L^n(B_{7\sqrt{n}})}\le\varepsilon$ و $F(D^2w,0)=0$ دارای تخمین درونی $C^{1,1}$ با ثابت C_e باشد. (خاصیت (H) جلسه قبل) آنگاه

$$|G_M(u,\Omega)\cap Q_1|\ge 1-\varepsilon_0$$

که $M>1$ تنها به n، C_e وابسته است و ε به n، λ، Λ، C_e و ε_0 وابسته است.

لم ۸ (معادل لم ۶) $0<\varepsilon_0<1$ دلخواه در نظر بگیرید و $u\in C(\Omega)$ جواب $F(D^2u,x)=f(x)$ در $\Omega\supseteq B_{8\sqrt{n}}$.

و $\|\beta\|_{L^n(B_{7\sqrt{n}})}=\|f\|_{L^n(B_{7\sqrt{n}})}\le\varepsilon$ و $F(D^2w,0)=0$ دارای ترتیب درونی $C^{1,1}$ با ضریب ثابت C_e باشد. آنگاه

$$G_1(u,\Omega)\cap Q_3\neq\emptyset \Longrightarrow |G_M(u,\Omega)\cap Q_1|\ge 1-\varepsilon_0$$

که M و ε از لم ۷ به دست می‌آیند.

اثبات لم ۸: $x_1\in G_1(u,\Omega)\cap Q_3 \Longrightarrow -\frac{1}{2}|x-x_1|^2\le u(x)-L(x)\le\frac{1}{2}|x-x_1|^2$

که L یک تابع آفین است.

$$v=\frac{u(x+x_1)-L(x+x_1)}{c}$$

$$c=\max\left(1,\max_{x\in\Omega}\frac{1}{2}|x-x_1|^2\right)$$

داریم:

در $\Omega\setminus B_{6\sqrt{n}}$: $-|x|^2\le v(x)\le|x|^2$

$$\frac{1}{c}F(cD^2v,x+x_1)=\frac{1}{c}f(x+x_1)$$

$$\xRightarrow{\text{لم ۷}} |G_M(v,\Omega)\cap Q_1| \geq 1-\varepsilon_0 \Rightarrow |G_{cM}(u,\Omega)\cap Q_1| \geq 1-\varepsilon_0$$

$$\Rightarrow |G_M(u,\Omega)\cap Q_1| \geq 1-\varepsilon_0$$

لم ۹ (معادل لم ۴) $0<\varepsilon_0<1$ دلخواه در نظر بگیرید u جواب $F(D^2u,x)=f(x)$ در $B_{8\sqrt{n}}$.

$$\|u\|_{L^\infty(B_{8\sqrt{n}})} \leq 1 \quad , \quad \|f\|_{L^n(B_{8\sqrt{n}})} \leq \varepsilon$$

$$\left(\fint_{B_r(x_0)} \beta(x,x_0)^n \, dx \right)^{1/n} \leq \varepsilon$$

و $F(D^2w,x_0)=0$ دارای تقریب درونی $C^{1,1}$ با ضریب ثابت C_e است. فرض کنید u خارج $B_{8\sqrt{n}}$ با صفر توسعه دهید و قرار دهید:

$$A = A_{M^{k+1}}(u, B_{8\sqrt{n}})\cap Q_1$$

$$B = \left(A_{M^k}(u, B_{8\sqrt{n}})\cap Q_1\right) \cup \{x\in Q_1 : m(f^n)(x) \geq (C_3M^k)^n\}$$

آنگاه $|A| \leq \varepsilon_0 |B|$ که $C_3 > 0$ تنها به n، λ، Λ، C_e و ε_0 وابسته است.

$\varepsilon > 0$ و $M > 1$ از لم $\underline{V}$ به دست می‌آیند.

<u>اثبات</u>: $|u(x)| \leq 1 \leq |x|^2$ در $B_{8\sqrt{n}} \setminus B_{6\sqrt{n}}$ بنابراین شرایط لم $\underline{V}$ برقرار است و در نتیجه

$$|A| \leq \varepsilon_0$$

فرض کنید $Q = Q_{\frac{1}{2^i}}(x_0)$ که $|A \cap Q| > \varepsilon_0 |Q|$ نشان می‌دهیم $\tilde{Q} \subseteq B$. فرض کنید چنین نباشد

$$x_1 \in \tilde{Q} \setminus B$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 \in G_{M^k}(u, B_{8\sqrt{n}}) \\ \\ m(f^n)(x_1) < (C_3 M^k)^n \Rightarrow \sup\limits_{r>0} \fint_{Q_r(x_1)} |f|^n < (C_3 M^k)^n \end{cases}$$

$$\tilde{u}(y) = \frac{2^{2i}}{M^k}\, u\left(x_0 + \frac{1}{2^i} y\right) \qquad y \in Q_1$$

$$G(D^2\tilde{u}, y) = \frac{1}{M^k} F\left(M^k D^2\tilde{u},\ x_0 + \frac{1}{2^i} y\right) = \frac{1}{M^k} f\left(x_0 + \frac{1}{2^i} y\right) = \tilde{f}(y)$$

اکنون نشان می‌دهیم $\tilde{u}$ و G در شرایط لم ۸ صدق می‌کند. واضح است $\beta_G = \beta_F$ و از طرفی

$$\|\tilde{f}\|^n_{L^n(B_{7\sqrt{n}})} = \frac{1}{M^{kn}} \int_{B_{7\sqrt{n}}} \left|f\left(x_0 + \frac{1}{2^i} y\right)\right|^n dy$$

$$= \frac{1}{M^{kn}} \int_{B_{\frac{7\sqrt{n}}{2^i}}(x_0)} |f(z)|^n\, 2^{ni}\, dz \le \frac{2^{ni}}{M^{kn}} \int_{Q_{\frac{19\sqrt{n}}{2^i}}(x_1)} |f|^n\, dz$$

$$< \tilde{C}\, C_3^n < \varepsilon^n$$

$\tilde{C}$ ثابت جهانی تنها به n وابسته است. کافی است C_3 را به اندازه کافی کوچک انتخاب کنیم.

شرط $x_1 \in G_{M^k}(u, B_{8\sqrt{n}})$ نتیجه می‌دهد که $\tilde{x} = 2^i(x_1 - x_0) \in G_1(\tilde{u}, B_{8\sqrt{n}})$

از طرفی $\|\tilde{x}\| \leq 2 \Rightarrow \tilde{x} \in Q_3$

اکنون به کمک لم ۸ داریم:

$$\left|G_M(\tilde{u}, B_{8\sqrt{n}}) \cap Q_1\right| \geq 1 - \varepsilon_0$$

$$\Rightarrow \left|G_{M^{k+1}}(u, B_{8\sqrt{n}}) \cap Q\right| \geq (1-\varepsilon_0)|Q|$$

که با شرط $|A \cap Q| > \varepsilon_0 |Q|$ تناقض دارد.

اثبات گزاره ۱ از صفحه ۱۵ : $(u \in W^{2,p})$

$$\alpha_k = |A_{M^k}(B_{8\sqrt{n}}) \cap Q_1| \quad , \quad \beta_k = |\{x \in Q_1 : m(f^n)(x) \geq (c_3 M^k)^n\}|$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_{k+1} \leq \varepsilon_0 (\alpha_k + \beta_k)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_k \leq \varepsilon_0^{\,k} + \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon_0^{\,k-i} \beta_i$$

برای اینکه $D^2 u \in L^p$ کافی است ثابت کنیم :

$$\sum_{k \geq 1} M^{pk} \alpha_k < C$$

$$\sum_{k \geq 1} M^{pk} \Big(\varepsilon_0^{\,k} + \sum_{0 \leq i \leq k-1} \varepsilon_0^{\,k-i} \beta_i \Big) = \sum_{k \geq 1} \varepsilon_0^{\,k} M^{pk} + \sum_{k \geq 1} \sum_{i \leq k-1} M^{pk} \varepsilon_0^{\,k-i} \beta_i$$

$$\leq C + \sum_i \beta_i \sum_{i \leq K} M^{PK} \varepsilon_0^{\,K-i}$$

$$\sum_i \beta_i \sum_{i<K} M^{pK}\, \varepsilon_0^{K-i} = \sum_i \beta_i M^{pi} \sum_{l<K} M^{pk}\, \varepsilon_0^{k}$$

$$\le C \sum_{i\ge 0} \beta_i M^{pi} \underset{?}{<} \infty$$

$$f \in L^p \Rightarrow f^n \in L^{p/n} \Rightarrow m(f^n) \in L^{p/n}$$

$$\Rightarrow \|m(f^n)\|_{L^{p/n}} \le C \|f^n\|_{L^{p/n}} \le C \|f\|_{L^p}$$

$$\sum_{k\ge 0} M^{pk} \beta_k \le C \|m(f^n)\|_{L^{p/n}} \Leftarrow \eta = C_3^n$$ لم ۲ جلسه ۱۵ برای

مباحثی در PDE

جلسه هجده ۹۶/۸/۲۷

فصل ۸ : نظم هولدر

$$F(D^2u, x) = f(x) \qquad x \in B_1 \qquad (1)$$

می توان فرض کرد $f(0)=0$ زیرا اگر قرار دهیم $G(M,x) = F(M,x) - f(0)$

در این صورت (1) معادل است با (2)

$$G(D^2u, x) = \underbrace{f(x) - f(0)}_{g(x)}$$

به علاوه می توان فرض کرد $F(0,0)=0$. زیرا

$$\exists\, t \in \mathbb{R} \qquad G(tI, 0) = 0 \qquad |t| \leq \frac{1}{\lambda}\,|G(0,0)| = \frac{1}{\lambda}\,|F(0,0) - f(0)|$$

$$H(M,x) = G(M + tI, x) \Rightarrow H(0,0) = 0$$

به علاوه (2) معادل است با

$$H(D^2\underbrace{(u - \tfrac{t}{2}|x|^2)}_{v}, x) = g(x)$$

پس فرض می کنیم $F(0,0) = f(0) = 0$.

به علاوه نوسان F در x را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$F(\mu^{i\alpha} D^2 h + C_i, 0) = 0$

$F(C_i, 0) = 0$

$$\tilde{\beta}(x) = \tilde{\beta}_F(x) = \sup_{M \in S} \frac{|F(M,x) - F(M,0)|}{\|M\| + 1}$$

قضیه ۱: فرض کنید F عملگر بیضوی با ثابت‌های λ و Λ و F و f نسبت به x پیوسته باشند و $F(0,0) = f(0) = 0$. فرض کنید ثابت‌های $0 < \bar{\alpha} < 1$ و $C_e > 0$ وجود دارند به طوری که برای هر $M \in S$ که $F(M,0) = 0$ و هر $w_0 \in C(\partial B_1)$ معادله زیر دارای جواب $w \in C^2(B_1) \cap C(\bar{B}_1) \cap C^{2,\bar{\alpha}}(B_{\frac{1}{2}})$ باشد:

$$\begin{cases} F(D^2 w(x) + M, 0) = 0 & B_1 \\ w = w_0 & \partial B_1 \end{cases}$$

و به علاوه

$$\|w\|_{C^{2,\bar{\alpha}}(B_{\frac{1}{2}})} \le C_e \|w\|_{L^\infty(B_1)}$$

$\le Ce$

$\|h\|^*_{C^{2,\bar{\alpha}}} \le C_e \|h\|_{L^\infty(\ldots)}$

همچنین فرض کنید $0 < \alpha < \bar{\alpha}$ و $r_0 > 0$ و $C_1, C_2 > 0$ موجودند به طوری که

$$(1) \quad \left(⨍_{B_r(0)} \tilde{\beta}^n \right)^{\frac{1}{n}} \le C_1 \left(\frac{r}{r_0}\right)^\alpha, \quad \left(⨍_{B_r(0)} |f|^n \right)^{\frac{1}{n}} \le C_2 \left(\frac{r}{r_0}\right)^\alpha \quad \forall r \le r_0$$

دراین صورت اگر u یک جواب لزجی $F(D^2u, x) = f(x)$ در $B_{r_0}(0)$ باشد آنگاه u در مبدأ $C^{2,\alpha}$ است، به عبارت دیگر چند جمله‌ای درجه دوی P موجود است به طوریکه

$$(2)\qquad \|u - P\|_{L^\infty(B_r(0))} \leq C_3 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2+\alpha} \quad \forall\, r \leq r_1$$

$$(3)\qquad r_0\, |DP(0)| + r_0^2\, \|D^2P\| \leq C_3$$

$$(4)\qquad C_3 \leq C\left(\|u\|_{L^\infty(B_{r_0}(0))} + r_0^2 (C_2 + 1)\right)$$

$$(5)\qquad r_1 = C^{-1} r_0$$

که $C > 1$ تنها به n، λ و Λ، C_e، α، $\bar{\alpha}$ و C_1 وابسته است.

*نکته. اگر برای هر $x_0 \in \overline{B}_{\frac{r_0}{2}}(0)$ چند جمله ای p از درجه ۲ موجود باشد که در شرایط (2) و (3) صدق کند در این صورت می توان دید که

$$\|u\|^*_{C^{2,\alpha}(\overline{B}_{\frac{r_0}{2}}(0))} \leq C(n) C_3 , \quad u \in C^{2,\alpha}(\overline{B}_{\frac{r_0}{2}}(0))$$

که در آن

$$\|u\|^*_{C^{2,\alpha}(\overline{B}_d)} := \|u\|_{L^\infty(B_d)} + d\,\|Du\|_{L^\infty(B_d)} + d^2\,\|D^2u\|_{L^\infty(B_d)}$$

$$+ d^{2+\alpha} \sup_{x,y \in \overline{B}_d} \frac{\|D^2u(x) - D^2u(y)\|}{|x-y|^\alpha}$$

از قضیه زیر (مربوط به فصل ۷ است) در طول اثبات استفاده خواهد شد:

قضیه 7.9 : فرض کنید $0<\varepsilon<1$ ، $F(0,x)=0$ برای هر $x\in B_{8\sqrt{n}}$. به علاوه فرض کنید u یک جواب لزجی $F(D^2u,x)=f(x)$ در $B_{8\sqrt{n}}$ باشد و $\|u\|_{L^\infty(B_{8\sqrt{n}})}\leq 1$.

فرض کنید $\|\beta\|_{L^n(B_{7\sqrt{n}})}=\|\beta(\cdot,0)\|_{L^n(B_{7\sqrt{n}})}\leq\varepsilon$ و $F(D^2w,0)=0$ دارای تخمین های $C^{1,1}$ با ثابت c_e باشد. در این صورت تابع های $h\in C^2(B_{6\sqrt{n}})$ ، $\varphi\in C(B_{6\sqrt{n}})$ وجود دارند به طوریکه $\|h\|_{C^{1,1}(\bar{B}_{6\sqrt{n}})}\leq C(n)c_e$ ، $u-h\in S(\frac{\lambda}{n},\Lambda,\varphi)$ در $B_{6\sqrt{n}}$.

$$\|u-h\|_{L^\infty(B_{6\sqrt{n}})}+\|\varphi\|_{L^n(B_{6\sqrt{n}})}\leq C\left(\varepsilon^\gamma+\|f\|_{L^n(B_{8\sqrt{n}})}\right)$$

که C و $0<\gamma<1$ جهانی هستند.

ایده اثبات : درواقع $h \in C^2(B_{7\sqrt{n}})$ را جواب معادله زیر می‌گیریم :

$$\begin{cases} F(D^2 h, 0) = 0 & B_{7\sqrt{n}} \\ h = u & \partial B_{7\sqrt{n}} \end{cases} \quad \cdots$$

اثبات قضیه ۱: ابتدا ثابت می‌کنیم $0 < \delta = \delta(n, \lambda, \Lambda, c_e, \alpha, \bar{\alpha})$ به اندازه کافی کوچک وجود دارد به

طوریکه اگر u یک جواب لزجی $F(D^2u, x) = f(x)$ در B_1 باشد و $\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leq 1$ ،

$$(6) \qquad \left(\fint_{B_r(0)} \tilde{\beta}^n \right)^{\frac{1}{n}} \leq \delta r^\alpha , \quad \left(\fint_{B_r(0)} |f|^n \right)^{\frac{1}{n}} \leq \delta r^\alpha \qquad \forall r \leq 1$$

دراین صورت چند جمله‌ای درجه دوی P وجود دارد به طوریکه

$$(7) \qquad \|u - P\|_{L^\infty(B_r)} \leq C r^{2+\alpha} \qquad \forall r \leq 1$$

$$(8) \qquad |DP(0)| + \|D^2 P\| \leq C$$

برای یک ثابت $C = C(n, \lambda, \Lambda, c_e, \alpha, \bar{\alpha})$.

اگر قسمت بالا را نشان دهیم دراین صورت قضیه ۱ به اثبات می‌رسد. زیرا اگر u در شرایط قضیه صدق

کند قرار دهیم:

$r_1 \le r_0$ را طوری انتخاب کنید که $C_1 r_0^{-\alpha} r_1^{\alpha} \le \delta$. قرار دهید

$$\tilde{u}(y) := \frac{r_1^{-2} u(r_1 y)}{r_1^{-2} \|u\|_{L^\infty(B_{r_0})} + \delta^{-1} C_2} = \frac{r_1^{-2} u(r_1 y)}{K}, \qquad \forall y \in B_1$$

اگر $K \ge 1$. (در غیر این صورت قرار دهید $\tilde{u}(y) = r_1^{-2} u(r_1 y)$). در هر دو حالت داریم $\|\tilde{u}\|_{L^\infty(B_1)} \le 1$

$$G(D^2 \tilde{u}, y) := \frac{1}{K} F(K D^2 \tilde{u}, r_1 y) = \frac{f(r_1 y)}{K} := \tilde{f}(y)$$

به علاوه به راحتی می توان دید $\tilde{\beta}_G(y) \le \tilde{\beta}(r_1 y)$. به راحتی می توان دید که رابطه (6) برای $\tilde{\beta}$ و $\tilde{f}$ برقرار است. بنابراین چند جمله ای درجه دوم $\tilde{P}$ وجود دارد به طوری که در (7) (برای $\tilde{u}$) و (8) صدق می کند. اگر مجدداً تغییر مقیاس دهیم روابط (2)، (3) و (4) برای یک چند جمله ای درجه دوم P برقرار است.

بنابراین فرض می‌کنیم $\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leq 1$ و (6) برقرار است. می‌خواهیم (7) و (8) را نشان دهیم.

* ادعا: عدد $0<\mu<1$ که فقط به n، λ، Λ، C_e، α و $\bar{\alpha}$ وابسته است و دنباله چند جمله‌ای های $\{P_k\}$ وجود دارند به طوریکه

$$P_k(x) = a_k + \langle b_k, x\rangle + \frac{1}{2} x^t C_k x$$

$$P_0 \equiv P_{-1} \equiv 0$$

$$F(C_k, 0) = 0 \qquad \forall k \geq 0 \tag{9}$$

$$\|u - P_k\|_{L^\infty(B_{\mu^k})} \leq \mu^{k(2+\alpha)} \qquad \forall k \geq 0 \tag{10}$$

$$|a_k - a_{k-1}| + \mu^{k-1}|b_k - b_{k-1}| + \mu^{2(k-1)}\|C_k - C_{k-1}\| \leq 13\, C_e\, \mu^{(k-1)(2+\alpha)} \qquad \forall k \geq 0 \tag{11}$$

اگر ادعای فوق ثابت شود در این صورت قضیه I به اثبات می‌رسد، زیرا از (11) نتیجه می‌شود که $\{P_k\}$ دنباله‌ای کوشی است پس به طور یکنواخت در B_1 به یک چند جمله‌ای درجه دوی P همگراست.

P در (8) صدق می‌کند زیرا:
$$|Dp(0)| = \left|\lim_{k\to\infty} b_k\right| \leq C(\cdots)$$

$$(11) \Rightarrow \quad |b_k| = \left|\sum_{i=1}^{k} b_i - b_{i-1}\right| \leq C \sum_{i=1}^{k} \mu^{(i-1)(1+\alpha)} \leq C(--)$$

$\|D^2 P\|$ به طور مشابه بررسی می‌شود. برای اثبات (7) توجه کنید که برای هر $k \geq 0$ داریم:

$$\|u - P\|_{L^\infty(B_{\mu^k})} = \left\|u - \lim_{m\to\infty} P_m\right\|_{L^\infty(B_{\mu^k})} = \left\|u - \left(P_k - \sum_{i=k+1}^{\infty} (P_i - P_{i-1})\right)\right\|_{L^\infty(B_{\mu^k})}$$

$$\overset{(10)}{\leq} \mu^{k(2+\alpha)} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \left[|a_i - a_{i-1}| + \mu^k |b_i - b_{i-1}| + \frac{1}{2}\mu^{2k} \|C_i - C_{i-1}\| \right]$$

$$\overset{(11)}{\leq} \mu^{k(2+\alpha)} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \left[\mu^{(i-1)(2+\alpha)} + \mu^k \mu^{(i-1)(1+\alpha)} + \frac{1}{2}\mu^{2k}\mu^{i(1-\alpha)} \right]$$

$$\leq C \mu^{k(2+\alpha)}$$

C فقط به μ وابسته است.

اکنون برای هر $1 \leq r$ ، $k \geq 0$ را طوری بگیرید که $\mu^{k+1} < r \leq \mu^{k}$ در این صورت

$$\|u-P\|_{L^\infty(B_r)} \leq \|u-P\|_{L^\infty(B_{\mu^k})} \leq C\mu^{k(2+\alpha)} = \frac{C}{\mu^{2+\alpha}}\mu^{(k+1)(2+\alpha)}$$

$$\leq C^* r^{2+\alpha} \quad \Rightarrow$$ (7) برقرار است.

اکنون ادعا را اثبات می‌کنیم. عدد μ را به اندازه کافی کوچک می‌گیریم به طوری که

$$28\, c_e\, \mu^{\bar{\alpha}} \leq \mu^{\alpha} \quad , \quad \mu \leq \frac{7}{16} \quad , \quad \mu^{\alpha} \leq \frac{1}{2} \qquad (12)$$

$\varepsilon \in (0,1)$ را نیز طوری می‌گیریم که $2C^* \varepsilon^{\gamma} \leq c_e \mu^{2+\bar{\alpha}}$ (13)

که γ و $C^* = C$ ثابت های جهانی معرفی شده در قضیه 7.9 هستند. در نهایت δ را که

می‌خواهیم در رابطه (6) صدق کند طوری در نظر می‌گیریم که $2(1+26\,c_e)C(n)\delta = \varepsilon$ (14) که $C(n)$ فقط

وابسته به n است (در طول اثبات معرفی می‌شود).

اکنون به طور استقرایی P_k ها را طوری می‌سازیم که در (9)، (10)، (11) صدق کنند. به وضوح P_0 چنین است. اگر برای $k \le i$، P_k را داشته باشیم P_{i+1} را می‌سازیم. تعریف کنید:

$$v(y) = \frac{(u - P_i)(\mu^i y)}{\mu^{i(2+\alpha)}} \qquad y \in B_1$$

داریم $\|v\|_{L^\infty(B_1)} \le 1$. به علاوه

$$\frac{1}{\mu^{i\alpha}} F(\mu^{i\alpha} D^2 v(y) + C_i, \mu^i y) = \frac{1}{\mu^{i\alpha}} f(\mu^i y)$$

پس $F_i(D^2 v, y) = f_i(y)$ که

$$F_i(M, y) = \frac{1}{\mu^{i\alpha}} \left[F(\mu^{i\alpha} M + C_i, \mu^i y) - F(C_i, \mu^i y) \right]$$

$$f_i(y) = \frac{1}{\mu^{i\alpha}} \left[f(\mu^i y) - F(C_i, \mu^i y) \right]$$

پس $F_i(0, y) = 0$.

$F_i(D^2 h, 0) = 0$

به علاوه $\underset{(*)}{F_i(D^2 w, 0) = 0}$ دارای تخمین های $C^{1,1}$ با ثابت C_e است زیرا

$$(*) \iff F(D^2(\mu^{i\alpha} w) + C_i, 0) = 0$$

از طرفی $F(C_i, 0) = 0$ پس طبق فرض قضیه ۱، معادله فوق دارای تخمین های $C^{2,\bar{\alpha}}$ است پس $C^{1,1}$ است.

به علاوه $\|\tilde{\beta}_{F_i}\|_{L^n(B_1)} \le \varepsilon$ زیرا.

$$\tilde{\beta}_{F_i}(y) = \sup_{M \in S} \left| \frac{F(\mu^{i\alpha} M + C_i, \mu^i y) - F(\mu^{i\alpha} M + C_i, 0)}{\mu^{i\alpha}(\|M\| + 1)} - \frac{F(C_i, \mu^i y) - F(C_i, 0)}{\mu^{i\alpha}(\|M\| + 1)} \right|$$

$$\le \sup_M \frac{\|\mu^{i\alpha} M + C_i\| + 1 + \|C_i\| + 1}{\mu^{i\alpha}(\|M\| + 1)} \tilde{\beta}_F(\mu^i y) \le 2(1 + 26 C_e)\mu^{-i\alpha} \tilde{\beta}_F(\mu^i y)$$

$$\left(\|C_i\| \le \sum_{k=1}^{i} \|C_k - C_{k-1}\| \le 13 C_e \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{(k-1)\alpha} = \frac{13 C_e}{1 - \mu^\alpha} \overset{(12)}{\le} 26 C_e \right)$$

$$\Longrightarrow \|\tilde\beta_{F_i}\|_{L^n(B_1)} \le 2(1+26c_e)\mu^{-i\alpha}\mu^{-i}\|\tilde\beta\|_{L^n(B_{\mu^i})} \quad (*_1)$$

اکنون اگر در (6) $r=\mu^i$ قرار دهیم:

$$\left(\int_{B_{\mu^i}} \tilde\beta^n\right)^{\frac{1}{n}} \le c(n)\,\mu^i\mu^{i\alpha} \xRightarrow{(*_1)} \|\tilde\beta_{F_i}\|_{L^n(B_1)} \le \underbrace{2(1+26c_e)c(n)}_{=\varepsilon\ (14)}$$

بنابراین شرایط استفاده از لم 7.9 برقرار است. پس $h\in C^2(\overline{B}_{\frac{3}{4}})$ وجود دارد به طوری که

$$(1)\quad \|v-h\|_{L^\infty(B_{\frac12})} \le C^*\left(\varepsilon^\gamma + \|f_i\|_{L^n(B_1)}\right) \le C^*(\varepsilon^\gamma+\varepsilon) \le 2C^*\varepsilon^\gamma$$

با محاسبات مشابه بالا می‌توان دید که $\|f_i\|_{L^n(B_1)} \le \varepsilon$.

از طرفی قبلاً اشاره شده بود که h در معادله زیر صدق می کند:

$$\begin{cases} F_i(D^2 h, 0) = 0 & B_{7/8} \\ h = v & \partial B_{7/8} \end{cases}$$

بنابراین $(*)$ $F(\mu^{i\alpha} D^2 h + C_i, 0) = 0$ در $B_{7/8}$.

پس طبق فرض قضیه

$$\|h\|^{*}_{C^{2,\bar{\alpha}}(B_{7/16})} \leq C_e \|v\|_{L^\infty(\partial B_{7/8})} \leq C_e$$

بنابراین اگر تعریف کنیم

$$\bar{P}(x) = h(0) + \langle \nabla h(0), x \rangle + \frac{1}{2} x^t D^2 h(0)\, x$$

در این صورت ($\mu \leq \frac{7}{16}$)

$$\|h - \bar{P}\|_{L^\infty(B_\mu)} \leq C_e \left(\frac{16}{7}\right)^{2+\bar{\alpha}} \mu^{2+\bar{\alpha}}$$

(2)
$$\leq 27\, C_e\, \mu^{2+\alpha}$$

اکنون تعریف می‌کنیم

$$P_{i+1}(x) = P_i(x) + \mu^{i(2+\alpha)}\,\bar{P}(\mu^{-i}x)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \|v-\bar{P}\|_{L^\infty(B_\mu)} \le 2C^*\varepsilon^\gamma + 27\,C_e\,\mu^{2+\bar{\alpha}} \le 28\,C_e\,\mu^{2+\bar{\alpha}} \le \mu^{2+\alpha}$$

بنابراین اگر با تغییر مقیاس به عقب برگردیم خواهیم داشت

$$|u(x)-P_i(x)-\mu^{i(2+\alpha)}\,\bar{P}(\mu^{-i}x)| \le \mu^{(i+1)(2+\alpha)} \qquad \forall x \in B_{\mu^{i+1}}$$

یعنی شرط (۱۰) برقرار است. از طرفی (۹) نیز برقرار است یعنی $F(C_{i+1},0)=0$ زیرا

$$C_{i+1} = C_i + \mu^{i\alpha} D^2h(0) \xrightarrow{(*)} F(C_{i+1},0)=0 \Rightarrow (9)\checkmark$$

برای بررسی (۱۲) داریم، $\|h\|^*_{C^{2,\alpha}(B_{7/16})} \le C_e$

$$|a_{i+1}-a_i| + \mu^i|b_{i+1}-b_i| + \mu^{2i}\|C_{i+1}-C_i\|$$

$$= \mu^{i(2+\alpha)}\left(|h(0)| + |\nabla h(0)| + \|D^2h(0)\|\right) \le \mu^{i(2+\alpha)}\left(1+\frac{16}{7}+\left(\frac{16}{7}\right)^2\right)C_e$$

$$\le 13\,C_e\,\mu^{i(2+\alpha)} \Rightarrow (12)\checkmark$$

∎

مباحثی در PDE

جلسه نوزده ۹۶/۸/۲۹

تخمین های $C^{1,\alpha}$

$$F(D^2u, x) = f(x)$$

$$\beta(x) = \beta_F(x) = \sup_{M \in S\setminus\{0\}} \frac{|F(M,x) - F(M,0)|}{\|M\|}$$

$$G(M,x) = F(M,x) - F(0,x)$$

لم ۲: فرض کنید $F(0,x) \equiv 0$. F نسبت به x پیوسته و β در B_1 هولدر پیوسته (برای یک ثابت $0<\gamma<1$) باشد. فرض کنید $u_0 \in C(\partial B_1)$ و $\rho = \rho(s)$ یک مدول پیوستگی برای u_0 روی ∂B_1 باشد و برای یک ثابت K داشته باشیم $\|u_0\|_{L^\infty(\partial B_1)} \le K$. در این صورت برای $\varepsilon > 0$ داده شده، $\delta = \delta(n, \lambda, \Lambda, \varepsilon, \rho, K) > 0$ وجود دارد به طوریکه اگر f هولدر پیوسته (برای یک ثابت $0<\gamma'<1$) در B_1 باشد و

$$(**) \qquad \|\beta\|_{L^n(B_1)} \le \delta \quad \text{و} \quad \|f\|_{L^n(B_1)} \le \delta$$

در این صورت برای هر دو جواب لزجی v و w که در معادلات زیر صدق کنند داریم $\|w - v\|_{L^\infty(B_1)} \le \varepsilon$

$$\begin{cases} F(D^2v, x) = f(x) & B_1 \\ v = u_0 & \partial B_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} F(D^2w, 0) = 0 & B_1 \\ w = u_0 & \partial B_1 \end{cases}$$

مقضیه ۳. فرض کنید $F(0,x)\equiv 0$. F نسبت به $x\in B_1$ و $\beta=\beta_F$ و f در B_1 هولدر پیوسته باشند.

فرض کنید ثابت های $1>\bar{\alpha}>0$ و $c_e>0$ وجود داشته باشند به طوریکه برای هر $w_0\in C(\partial B_1)$ معادله زیر

دارای جوابی مانند $w\in C(B_1)\cap C^{1,\bar{\alpha}}(B_{\frac{1}{2}})$ باشد و

$$\begin{cases} F(D^2w,0)=0 & B_1 \\ w=w_0 & \partial B_1 \end{cases}$$

به علاوه

$$\|w\|_{C^{1,\bar{\alpha}}(B_{\frac{1}{2}})}\le c_e\|w\|_{L^\infty(B_1)}$$

فرض کنید $0<\alpha<\bar{\alpha}$ و $r_0>0$ ، $c_1>0$. دراین صورت $\theta=\theta(n,\lambda,\Lambda,c_e,\alpha,\bar{\alpha})>0$ وجود دارد به طوریکه اگر

$$(1)\qquad \left(\fint_{B_r(0)}\beta^n\right)^{\frac{1}{n}}\le\theta\ ,\qquad \left(\fint_{B_r(0)}|f|^n\right)^{\frac{1}{n}}\le c_1 r^{\alpha-1}\qquad \forall r\le r_0$$

دراین صورت هر جواب لزجی u از معادله $F(D^2u,x)=f(x)$ در مبدأ $C^{1,\alpha}$ است، به عبارت دیگر تابع آفینی ℓ وجود دارد به طوریکه

$$\begin{cases} \|u-\ell\|_{L^\infty(B_r(0))}\le C_2 r^{1+\alpha} & \forall r\le r_0 \\ r_0^{-\alpha}|\nabla\ell|\le C_2\ ,\quad C_2\le C\left(r_0^{-(1+\alpha)}\|u\|_{L^\infty(B_{r_0}(0))}+C_1\right) \end{cases}$$

که $C=(\cdots)$

اثبات: با در نظر گرفتن $\tilde{u}(x) = \left(\frac{r_0}{2}\right)^{-2} u\left(\frac{r_0}{2} x\right)$: $\forall x \in B_2$

$$D^2 \tilde{u}(x) = D^2 u\left(\frac{r_0}{2} x\right)$$

می‌توان فرض کرد $r_0 = 2$. به علاوه اگر تعریف کنیم $K = \|u\|_{L^\infty(B_2)} + \theta^{-1} C_1$ و $v(x) = K^{-1} u(x)$

در این صورت می‌توان فرض کرد $\|u\|_{L^\infty(B_2)} \leq 1$ ، $F(D^2 u, x) = f(x)$ در B_2 و

$$\left(\fint_{B_r} \beta^n \right)^{\frac{1}{n}} \leq \theta \quad , \quad \left(\fint_{B_r} |f|^n \right)^{\frac{1}{n}} \leq \theta r^{\alpha - 1} \quad \forall r \leq 2$$

برای اثبات حقیقه کافی است ثابت کنیم تابع آفین ℓ و یک ثابت $C = C(\dots)$ وجود دارد به طوری که

$$\sup_{r \leq 2} \left(r^{-(1+\alpha)} \|u - \ell\|_{L^\infty(B_r)} + |\nabla \ell| \right) \leq C$$

ادعا: عدد $1 > \mu > 0$ که فقط به ... وابسته است و دنباله توابع آفین ℓ_k موجودند به طوریکه

$$\ell_k(x) = a_k + \langle b_k, x\rangle$$

$$\ell_0 \equiv \ell_{-1} \equiv 0$$

$$(2) \quad \|u - \ell_k\|_{L^\infty(B_{\mu^k})} \leq \mu^{k(1+\alpha)} \quad \forall k \geq 0$$

$$(3) \quad |a_k - a_{k-1}| + \mu^{k-1}|b_k - b_{k-1}| \leq 2c_e \mu^{(k-1)(1+\alpha)} \quad \forall k \geq 0$$

$$\forall x, y \in \overline{B}_1 : \ |(u-\ell_k)(\mu^k x) - (u - \ell_k)(\mu^k y)| \leq 2C^* \mu^{k(1+\alpha)} |x-y|^\beta \quad \forall k \geq 0$$

$$(4)$$

که C^* و β ثابت های جهانی هستند که اگر $w \in S(\frac{\lambda}{n}, \Lambda, g)$ در B_{2s} آنگاه

$$w \in C^\beta(B_s), \qquad [w]_{\beta, B_s} \leq C^* s^{-\beta}\left(\|w\|_{L^\infty(B_{2s})} + s\|g\|_{L^n(B_{2s})}\right)$$

(گزاره ۱ در جلسه ۱۰)

برای اثبات ادعا $\mu \in (0,1)$ را طوری بگیرید که

$$2C_e 2^{1+\bar{\alpha}} \mu^{\bar{\alpha}} \le \mu^{\alpha}, \quad \mu \le \frac{1}{4} \qquad (5)$$

$$\varepsilon = C_e (2\mu)^{1+\bar{\alpha}}$$

δ را نیز متناظر با ε، n، λ، Λ، C_e، $\rho(s) = 2C^* s^{\beta}$، $K=1$ معرفی شده در لم ۲ در نظر بگیرید.

در نهایت θ را طوری در نظر بگیرید که $c(n)\theta = \delta$. در صورت لزوم δ را کوچکتر می‌گیریم تا

$$c'(n)\theta \le 1, \quad \delta \le \mu^{\alpha}$$

برای $k=0$، (2)، (3) به وضوح برقرار هستند. برای (4) نیز دقت کنید

$$[u]_{\beta, B_1} \le C^*(1 + c'(n)\theta 2^{\alpha-1}) \le 2C^* \Leftarrow u \in S(\tfrac{\lambda}{n}, \Lambda, f)$$

اکنون اگر ℓ_k را برای $k=i$ داشته باشیم ℓ_{i+1} را می‌سازیم.

$y \in \overline{B_1}$: $\quad v(y) = \dfrac{(u-l_i)(\mu^i y)}{\mu^{i(1+\alpha)}} \quad \Rightarrow \quad F_i(D^2 v, y) = f_i(y)$

$$F_i(M,y) = \mu^{i(1-\alpha)} F(\mu^{i(\alpha-1)} M, \mu^i y)$$

$$f_i(y) = \mu^{i(1-\alpha)} f(\mu^i y)$$

اکنون می خواهیم از لم ۲ استفاده کنیم. دقت کنید که $\beta_{F_i}(y) = \beta(\mu^i y)$ و می توان دید که $(**)$ برای β_{F_i} و f_i برقرار است. بنابراین اگر h جواب معادله زیر باشد:

$$\begin{cases} F_i(D^2 h, 0) = 0 & B_1 \\ h = v & \partial B_1 \end{cases}$$

با توجه به اینکه v جواب معادله $\begin{cases} F_i(D^2 v, 0) = f(x) & B_1 \\ v = v & \partial B_1 \end{cases}$

$$\overset{\text{۲ لم}}{\Longrightarrow} \quad \|h - v\|_{L^\infty(B_1)} \leq \varepsilon = C_e (2\mu)^{1+\bar{\alpha}} \qquad (6)$$

از طرفی $\|h\|_{L^\infty(B_1)} \leq 1$ و $F(D^2(\mu^{i(\alpha-1)} h), 0) = 0$. پس طبق فرض قضیه داریم

$$\|h\|_{C^{1,\bar{\alpha}}(B_{\frac{1}{2}})} \leq C_e \qquad (7)$$

پس اگر تعریف کنیم $\bar{\ell}(x) = h(0) + \langle \nabla h(0), x \rangle$ در این صورت $\left(2\mu \le \frac{1}{2}\right)$

$$\|h - \bar{\ell}\|_{L^\infty(B_{2\mu})} \le c_e (2\mu)^{1+\bar{\alpha}} \qquad (8)$$

قرار دهید:

$$\ell_{i+1}(x) = \ell_i(x) + \mu^{i(1+\alpha)} \bar{\ell}(\mu^{-i} x)$$

$$\xRightarrow{(6),(8)} \|v - \bar{\ell}\|_{L^\infty(B_{2\mu})} \le 2 c_e (2\mu)^{1+\bar{\alpha}} \le \mu^{1+\alpha}$$

$\Longrightarrow$ (2) برای $k = i+1$ به دست می‌آید.

(3) نیز با توجه به (7) به دست می‌آید. برای (4) داریم

$$\frac{(u - \ell_{i+1})(\mu^{i+1} x)}{\mu^{(i+1)(1+\alpha)}} = \frac{(v - \bar{\ell})(\mu x)}{\mu^{1+\alpha}} \qquad \forall x \in B_1$$

پس کافی است نشان دهیم

$$[v - \bar{\ell}]_{\beta, B_\mu} \le 2C^* \mu^{1+\alpha-\beta}$$

$$v-\bar{\ell} \in S\left(\frac{\lambda}{n}, \Lambda, f_i\right) \Longleftarrow F_i\left(D^2(v-\bar{\ell}), y\right) = f_i(y)$$ از فرض

$$\Rightarrow [v-\bar{\ell}]_{\beta, B_\mu} \le C^* \mu^{-\beta}\left[\mu^{1+\alpha} + \mu\delta\right] \underset{\delta \le \mu^{\alpha}}{\le} 2C^* \mu^{1+\alpha-\beta}$$