به نام او

**امتحان پایان ترم درس معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی** وقت امتحان: **۳** ساعت

---

۱. مساله اصل بقای زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} u_t + au_x = f(x,t) & 0 < x < \ell,\ t > 0 \\ u(0,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < \ell \end{cases}$$

تقریب پایداری زیر را اثبات کنید:

$$\int_0^\ell |u(x,t)|^2\, dx \le e^t \int_0^t \int_0^\ell |f(x,t)|^2 dx\, ds.$$

۲. به کمک روش تقارن یک جواب نامنفی برای معادله غیر خطی $u_t = (u^m)_{xx}$ پیدا کنید که در آن $m$ یک عدد صحیح مثبت است.

۳. الف- برای تابع هارمونیک $u$ در $\mathbb{R}^2$ فرمول پواسن زیر را ثابت کنید:

$$u(x) = \frac{r^2 - |x-p|^2}{2\pi r} \int_{\partial B_r(p)} \frac{u(\sigma)}{|x-\sigma|^2} d\sigma$$

ب- ثابت کنید اگر داشته باشیم:

$$\sup_{r>0} \fint_{B_r(x)} |u(x)| dx < \infty$$

آنگاه $u$ یک تابع ثابت است.

۴. معادله فیشر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \lambda u(1-u) & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = g(x), & 0 < x < 1 \end{cases}$$

الف- برای شرط اولیه $0 \le g \le 1$ نشان دهید معادله جواب یکتا دارد.

ب- ثابت کنید اگر $\lambda < \pi^2$ آنگاه این جواب به حالت تعادل $v_s = 0$ همگرا است.

پ- نشان دهید در حالت $\lambda > \pi^2$ یک حالت تعادل یکتای مثبت برای معادله وجود دارد.

ت- ثابت کنید حالت تعادل قسمت قبل پایدار مجانبی است.

موفق باشید.

۹۶/۳/۲۱