

۱- رابطه انتگرالی زیر را اثبات کنید.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\pi\omega) \sin(\omega x)}{1 - \omega^2} d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \pi < x \end{cases}$$

۲- ثابت کنید جواب معادله موج با شرایط مرزی زیر در رابطه $u(x, t + 2) = u(x, t) + 2$ صدق می‌کند:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad 0 < x < 1, 0 < t$$

$$u(0, t) = t \quad 0 < t$$

$$u(1, t) = t \quad 0 < t$$

۳- جواب معادلات زیر را پیدا کنید.

$$u_t - u_{xx} + 2u = \delta(x - 1) \quad 0 < x, 0 < t \quad \text{الف -}$$

$$u(x, 0) = e^{-x} \quad 0 < x$$

$$u_x(0, t) = t \quad 0 < t$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0 \quad 0 < t$$

$$u_t + hu = ku_{xx} \quad -\pi < x < \pi, 0 < t \quad \text{ب -}$$

$$u(-\pi, t) = u(\pi, t) - 2\pi \quad 0 < t$$

$$u_x(-\pi, t) = u_x(\pi, t) \quad 0 < t$$

$$u(x, 0) = x \quad -\pi < x < \pi$$

۴- تابع $u(x, y)$ را از معادله زیر پیدا کنید به طوری که در نقاط منحنی $y = x^2 + x$ مقدار آن برابر $u = x^2 - x$ باشد.

$$-\frac{1}{2}xu_x + uu_y = u + x$$

۵- تابع $u(r, \theta)$ در داخل دایره واحد در معادله همراه با شرط مرزی زیر صدق می‌کند.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad r < 1$$

$$u(1, \theta) = |\theta| \quad -\pi < \theta \leq \pi$$

مقدار u را در نقطه $r = 0$ به دست آورید.