بنام او

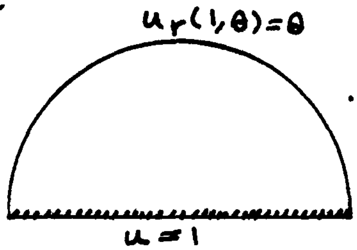
میان‌ترم درس معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی - اردیبهشت ۸۵   وقت ۲ ساعت.

۱- اصل ماکزیمم معادله حرارت: اگر $u(x,t)$ جواب معادله حرارت $u_t - c^2 u_{xx} = 0$ در ناحیه $0<x<1$ و $0<t$ باشد. ثابت کنید

$$\max_{\substack{0<x<1 \\ 0<t}} u(x,t) = \max_{A} u(x,t)$$

که $A = \{(x,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}^+ \mid t=0 \text{ یا } x=0 \text{ یا } x=1\}$. (راهنمایی: ابتدا اصل ماکزیمم را برای تابع $u_\varepsilon = u - \varepsilon t$ ثابت کنید.) (۲۰ نمره)

۲- جواب معادله لاپلاس در ناحیه زیر با شرط مرزی مشخص شده را پیدا کنید.



(۲۰ نمره)

۳- جواب معادله زیر را به دست آورید.

$$u_{xx} = u_{tt} + 2u_t \qquad t>0,\ 0<x<1$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = x$$

$$u(0,t) = t, \quad u_x(1,t) = 0$$

(۳۰ نمره)

۴- تابع $G(x,y,\xi,\eta)$ را جواب معادله زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 G}{\partial y^2} = \delta(x-\xi, y-\eta) & \text{in } \Omega \\[2ex] \dfrac{\partial G}{\partial n} + \lambda G = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

(۳۰ نمره)

λ مقدار ثابت است و $\dfrac{\partial G}{\partial n}$ مشتق نسبت به متغیرهای (x,y) است.

الف- ثابت کنید G متقارن است، یعنی $G(x,y,\xi,\eta) = G(\xi,\eta,x,y)$

ب- جواب معادله زیر را برحسب توابع f، g و G به‌دست آورید:

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + \lambda u = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

ج- مقدار انتگرال $\int_{\partial\Omega} G\, dx dy$ را محاسبه کنید.

موفق باشید.