فصل ۴

فضاهای سوبولف

۴–۱ تعریف

فرض کنید $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ یک ناحیه باز باشد، در این صورت برای هر عدد صحیح $m > 0$ و عدد حقیقی $1 \leq p \leq \infty$، فضای سوبولف $W^{m,p}(\Omega)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in \mathcal{L}^p(\Omega) : \ D^\alpha u \in \mathcal{L}^p(\Omega) \ \text{برای هر}\ |\alpha| \leq m\}$$

منظور از $D^\alpha u$ همان مشتق ضعیف u است. بنابراین $W^{m,p}$ زیرفضای $\mathcal{L}^p$، شامل همه توابعی است که مشتقات ضعیف آن تا مرتبه m نماینده‌ای در فضای $\mathcal{L}^p$ داشته باشد. به وضوح تمام اعضای $C_\circ^\infty(\Omega)$ این خاصیت را دارند، بنابراین رابطه تداخل زیرفضاها را به صورت زیر می‌توان بیان کرد:

$$C_\circ^\infty(\Omega) \subseteq W^{m,p}(\Omega) \subseteq \mathcal{L}^p(\Omega)$$

نرم فضای $W^{m,p}(\Omega)$ را برای $1 \leq p < \infty$ به صورت

$$||u||_{m,p,\Omega} = \Big(\sum_{\circ \leq |\alpha| \leq m} ||D^\alpha u||^p_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{p}}$$

تعریف می‌کنیم و برای $p = \infty$

$$||u||_{m,\infty,\Omega} = \max_{\circ \leq |\alpha| \leq m} ||D^\alpha u||_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)}$$

به راحتی می‌توان دید که توابع بالا خواص نرم را دارا هستند. در قضیه زیر نشان می‌دهیم فضای $W^{m,p}(\Omega)$ با این نرم تام است.

قضیه ۴ ـ ۱. *برای هر $1 \leq p \leq \infty$، فضای $W^{m,p}(\Omega)$ باناخ است.*

برهان. اگر دنباله $\{u_n\}$ در $W^{m,p}(\Omega)$ کوشی باشد، $\{D^\alpha u_n\}$ نیز برای هر $|\alpha| \leq m$ در $\mathcal{L}^p(\Omega)$ کوشی است. بنابراین توابع $u, u_\alpha \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ وجود دارند که

$$u_n \longrightarrow u, \qquad D^\alpha u_n \longrightarrow u_\alpha \qquad \text{در } \mathcal{L}^p(\Omega)$$

نشان می‌دهیم $D^\alpha u = u_\alpha$. به همین منظور توجه کنید که $u_n \longrightarrow u$ در $\mathcal{D}'(\Omega)$، زیرا برای هر $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\left|\langle u_n - u, \phi\rangle\right| \leq \int_\Omega |u_n(x) - u(x)|\,|\phi(x)|\,dx \leq ||u_n - u||_p ||\phi||_q$$

که q مزدوج p است، یعنی $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. به طور مشابه $D^\alpha u_n \longrightarrow u_\alpha$ در $\mathcal{D}'(\Omega)$، بنابراین

$$\langle u_\alpha, \phi\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle D^\alpha u_n, \phi\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle u_n, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \phi\rangle$$

$$= \langle u, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \phi\rangle = \langle D^\alpha u, \phi\rangle$$

در نتیجه $D^\alpha u = u_\alpha \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ و بنابراین $u \in W^{m,p}(\Omega)$ و به راحتی دیده می‌شود که

$$\lim_{n\to\infty} ||u_n - u||_{m,p} = 0$$

■

اکنون فضای حاصلضرب $(\mathcal{L}^p(\Omega))^N = \mathcal{L}^p(\Omega) \times \cdots \times \mathcal{L}^p(\Omega)$ را با نرم زیر در نظر بگیرید

$$||u||_{(\mathcal{L}^p)^N} = \Big(\sum_{i=1}^N ||u_i||_p^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \qquad u = (u_1, \cdots, u_N)$$

برای $N = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} 1$، نگاشت $P : W^{m,p}(\Omega) \longrightarrow (\mathcal{L}^p(\Omega))^N$ با ضابطه

$$P(u) = \big(D^\alpha u\big)_{0 \leq |\alpha| \leq m}$$

یک ایزومتری است. چون $W^{m,p}(\Omega)$ یک فضای تام است، باید ImP زیرفضای بسته باشد. بنابراین نتیجه زیر برای فضاهای سوبولف برقرار است:

نتیجه ۴ ـ ۲. $W^{m,p}(\Omega)$ برای $1 \leq p < \infty$ جدایی‌پذیر است و برای $1 < p < \infty$ بازتابی است.

برهان. برای $1 \leq p < \infty$ فضای $\mathcal{L}^p(\Omega)$ جدایی‌پذیر و برای $1 < p < \infty$ بازتابی است. بنابراین فضای $(\mathcal{L}^p(\Omega))^N$ نیز این خاصیت را دارد. بنابر قضایایی که به کتاب برزیس ارجاع می‌دهیم، هر زیرمجموعه یک فضای جدایی‌پذیر، جدایی‌پذیر است و هر زیرفضای بسته فضای بازتابی، بازتابی است. در نتیجه ImP جدایی‌پذیر و بازتابی است و چون نگاشت P یک یکریختی ایزومتری بین $W^{m,p}(\Omega)$ و ImP برقرار می‌کند، نتیجه مورد نظر اثبات می‌شود. ■

تذکر۴ ـ ۳. فضای $W^{m,2}(\Omega)$ با ضرب داخلی زیر یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر است.

$$(u,v)_m = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \int_\Omega \overline{D^\alpha u(x)} D^\alpha v(x) dx$$

اکنون دوگان فضای سوبولف $W^{m,p}(\Omega)$ را به دست می آوریم. برای این منظور از نگاشت ایزومتری P که در بالا تعریف شد، استفاده می‌کنیم.

لم۴ ـ ۴. اگر $1 \leq p < \infty$، برای هر تابعک خطی $L \in ((\mathcal{L}^p(\Omega))^N)'$ عنصر $v \in (\mathcal{L}^q(\Omega))^N$ به طور یکتا وجود دارد که برای هر $u \in (\mathcal{L}^p(\Omega))^N$

$$L(u) = \sum_{i=1}^{N} \langle v_i, u_i \rangle$$

که $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. به علاوه داریم $\|v\|_{(\mathcal{L}^q)^N} = \|L\|_{((\mathcal{L}^p)^N)'}$ و یکریختی $((\mathcal{L}^p(\Omega))^N)' \cong (\mathcal{L}^q(\Omega))^N$ برقرار است.

قضیه۴ ـ ۵. *فرض کنید* $1 \leq p < \infty$، *برای هر* $L \in (W^{m,p}(\Omega))'$ *تابع* $v \in (\mathcal{L}^q(\Omega))^N$ *وجود دارد که*

$$L(u) = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \langle v_\alpha, D^\alpha u \rangle \qquad (۴ ـ ۱)$$

برای هر $u \in W^{m,p}(\Omega)$. *به علاوه* $\|L\|_{(W^{m,p})'} = \min \|v\|_{(\mathcal{L}^q)^N}$ *که مینیمم روی همه* $v \in (\mathcal{L}^q(\Omega))^N$ *گرفته می‌شود که رابطه* (۴ ـ ۱) برای هر $u \in W^{m,p}(\Omega)$ برقرار است.

برهان. تابعک L^* را روی فضای $W = ImP$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$L^*(Pu) = Lu$$

چون P ایزومتری است، پس $L^* \in W'$ و به وسیله قضیه هان ـ باناخ می‌توان آن را به $\widetilde{L}$ روی $(\mathcal{L}^p(\Omega))^N$ توسعه داد که $\|\widetilde{L}\|_{((\mathcal{L}^p)^N)'} = \|L^*\|_{W'} = \|L\|_{(W^{m,p})'}$. بنابر لم قبل اثبات قضیه کامل می‌شود. ■

تذکر۴ ـ ۶. به کمک قضیه فوق می‌توان نتیجه گرفت که هر عضو $L \in \left(W^{m,p}(\Omega)\right)'$ توسعه یک توزیع $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ به فضای $W^{m,p}(\Omega)$ است، زیرا بنابر رابطه (۴ ـ ۱) توابع $v_\alpha \in \mathcal{L}^q(\Omega)$ وجود دارند که $L|_{\mathcal{D}(\Omega)} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha v_\alpha = T$. دقت کنید توپولوژی $\mathcal{D}(\Omega)$ قوی‌تر از توپولوژی القایی از نرم $\|\cdot\|_{m,p}$ است و در نتیجه $L|_{\mathcal{D}(\Omega)}$ یک توزیع روی Ω است. از طرف دیگر هر توزیع به صورت $T = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha v_\alpha$ که $v_\alpha \in \mathcal{L}^q(\Omega)$ قابل توسعه به $W^{m,p}(\Omega)$ است، زیرا این توزیع نسبت به توپولوژی القایی از نرم $\|\cdot\|_{m,p}$ نیز پیوسته است و به کمک قضیه هان ـ باناخ می‌توان توسعه داد. اما این توسعه لزوماً یکتا نیست و تابعک T تنها به روی بستار $\mathcal{D}(\Omega)$ نسبت به نرم $\|\cdot\|_{m,p}$ به طور یکتا تعیین می‌شود.

تعریف۴ ـ ۷. بستار زیرفضای $C_0^\infty(\Omega)$ در $W^{m,p}(\Omega)$ را با $W_0^{m,p}(\Omega)$ نشان می‌دهیم.

همه مطالب بالا برای هر تابعک $L \in \left(W_0^{m,p}(\Omega)\right)'$ نیز صحیح است و نمایشی به صورت زیر دارد

$$L = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha v_\alpha \qquad (۴ ـ ۲)$$

که $v_\alpha \in \mathcal{L}^q(\Omega)$. هرچند ممکن است این نمایش یکتا نباشد، اما تمام توزیعهای به صورت فوق اعضای فضای دوگان $\left(W_0^{m,p}(\Omega)\right)'$ را مشخص می‌کنند.

تعریف۴ ـ ۸. $W^{-m,q}(\Omega) := \left(W_0^{m,p}(\Omega)\right)'$.

با توجه به نمایش (۴ ـ ۲) برای اعضای $W^{-m,q}(\Omega)$ این گونه می‌توان تعبیر کرد که مشتق مرتبه m اعضای $\mathcal{L}^q$ در فضای $W^{-m,q}$ قرار می‌گیرند. (مشتق اعضای $W^{1,p}$ در $\mathcal{L}^p$ قرار دارد و مشتق اعضای $\mathcal{L}^p$ در $W^{-1,p}$.)

مثال۴ ـ ۱. تابع $H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ که در مثال ۲ ـ ۸ معرفی شد، برای هر $1 < q \leq \infty$، متعلق به $\mathcal{L}^q(-1,1)$ است. بنابراین $\delta = H' \in W^{-1,q}(-1,1)$.

نتیجه۴ ـ ۹. $W^{-m,q}(\Omega)$ برای $1 < q < \infty$ یک فضای جداپذیر و بازتابی است.

برهان. از آنجا که $W_0^{m,p}(\Omega)$ زیرفضای بسته $W^{m,p}(\Omega)$ است و با توجه به نتیجه ۴ ـ ۲، فضای $W_0^{m,p}(\Omega)$ نیز بازتابی و جداپذیر است. بنابراین دوگان آن نیز این ویژگی‌ها را دارد. ■

نتیجه۴ ـ ۱۰. نشاندن $\mathcal{L}^q(\Omega) \hookrightarrow W^{-m,q}(\Omega)$ پیوسته و تصویر آن چگال است.

برهان. هر عضو $v \in \mathcal{L}^q(\Omega)$، عضوی از $W^{-m,q}(\Omega) = \left(W_\circ^{m,p}(\Omega)\right)'$ است که آن را با $L_v(u) = \langle v, u\rangle$ نشان می‌دهیم. در این صورت بنابر نامساوی هولدر خواهیم داشت

$$|L_v(u)| = |\langle v, u\rangle| \leq ||v||_q ||u||_p \leq ||v||_q ||u||_{m,p}$$

در نتیجه

$$||v||_{-m,q} = \sup_{\substack{u \in W_\circ^{m,p} \\ ||u||_{m,p} = ۱}} |\langle v, u\rangle| \leq ||v||_q$$

و نشاندن $\mathcal{L}^q \hookrightarrow W^{-m,q}$ پیوسته است. هم‌چنین تصویر این نشاندن چگال است، زیرا اگر $F \in (W_\circ^{m,p})''$ و $F(L_v) = ۰$ برای هر $v \in \mathcal{L}^q$. چون $W_\circ^{m,p}(\Omega)$ بازتابی است، پس $f \in W_\circ^{m,p}$ وجود دارد که برای هر $v \in \mathcal{L}^q(\Omega)$

$$۰ = F(L_v) = L_v(f) = \langle v, f\rangle$$

پس $f(x) = ۰$ تقریباً همه جا در Ω و بنابراین $f = ۰$ در $W_\circ^{m,p}(\Omega)$ و $F = ۰$ در $(W_\circ^{m,p})''$. ■

۴ـ۲ تقریب به وسیله توابع هموار

در این بخش ابتدا نشان می‌دهیم مجموعه $\{\phi \in C^\infty(\Omega) : ||\phi||_{m,p} < \infty\}$ در فضای $W^{m,p}(\Omega)$ چگال است. برای این منظور به قضیه افراز واحد به وسیله توابع هموار احتیاج است که صورت آن را بدون اثبات ذکر می‌کنیم.

قضیه۴ ـ ۱۱. (افراز واحد) *فرض کنید A زیرمجموعه دلخواه $\mathbb{R}^n$ باشد که به وسیله خانواده $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ از زیرمجموعه‌های باز $\mathbb{R}^n$ پوشیده می‌شود. در این صورت خانواده توابع هموار $\psi_i \in C_\circ^\infty(\mathbb{R}^n)$ وجود دارند، به طوری که*

(i) *$۰ \leq \psi_i(x) \leq ۱$ برای هر ψ_i و هر $x \in \mathbb{R}^n$.*

(ii) *برای هر تابع ψ_i، باز U_α وجود دارد که $\operatorname{Supp}\psi_i \subseteq U_\alpha$.*

(iii) *برای هر $x \in A$ یک همسایگی $B_r(x)$ وجود دارد که به غیر از تعداد متناهی تابع ψ_i، بقیه روی $B_r(x)$ برابر صفر باشند.*

(iv) *برای هر* $x \in A$، $\sum_i \psi_i(x) = ۱$.

اگر تابع J_ε، همان منظم‌سازی باشد که در قضیه ۱ ـ ۲۹ استفاده کردیم، به کمک آن می‌توان توابع سوبولف را در یک زیرمجموعه فشرده ناحیه Ω به وسیله توابع هموار تقریب زد. این مطلب در لم زیر نشان داده شده است.

لم ۴ ـ ۱۲. اگر $۱ \leq p < \infty$، $u \in W^{m,p}(\Omega)$ و $\Omega' \Subset \Omega$، آنگاه

$$\lim_{\varepsilon \to ۰^+} J_\varepsilon * u = u \qquad \text{در } W^{m,p}(\Omega')$$

برهان. $\widetilde{u}$ را توسعه u به صورت صفر در خارج Ω در نظر بگیرید. $\widetilde{u} \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ و بنابر قضیه ۲ ـ ۱۳، تساوی $D^\alpha(J_\varepsilon * \widetilde{u}) = J_\varepsilon * D^\alpha \widetilde{u}$ در $\mathbb{R}^n$ برقرار است. هرچند $u \in W^{m,p}(\Omega)$ و در نتیجه $D^\alpha u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$، اما ممکن است $D^\alpha \widetilde{u}$ متعلق به $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ نباشد. اگر $\varepsilon < dist(\Omega', \partial\Omega)$ باشد، در این صورت تساوی $J_\varepsilon * D^\alpha \widetilde{u} = J_\varepsilon * D^\alpha u$ در Ω' برقرار است و از رابطه $D^\alpha u \in \mathcal{L}^p(\Omega')$ در قضیه ۱ ـ ۲۹ می‌توان استفاده کرد

$$\lim_{\varepsilon \to ۰^+} ||D^\alpha(J_\varepsilon * u) - D^\alpha u||_{p,\Omega'} = \lim_{\varepsilon \to ۰^+} ||J_\varepsilon * D^\alpha u - D^\alpha u||_{p,\Omega'} = ۰$$

■

اکنون به کمک لم فوق نشان می‌دهیم، اعضای $W^{m,p}(\Omega)$ را می‌توان به کمک توابع هموار $C^\infty(\Omega)$ تقریب زد.

قضیه ۴ ـ ۱۳. **(مِیِر—سِرین[۱])** *اگر* $۱ \leq p < \infty$، *زیرفضای* $C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega) = \{\phi \in C^\infty(\Omega) : ||\phi||_{m,p} < \infty\}$ در $W^{m,p}(\Omega)$ *چگال است.*

برهان. برای $k = ۱, ۲, \cdots$ قرار دهید

$$\Omega_k = \{x \in \Omega : |x| < k,\, dist(x, \partial\Omega) > \frac{۱}{k}\}$$

با در نظرگرفتن $\Omega_۰ = \varnothing$، خانواده $\{U_k = \Omega_{k+۱} \setminus \overline{\Omega}_{k-۱}\}$ یک پوشش باز Ω خواهد بود. افراز هموار آن را درنظر گرفته و ψ_k را مجموع تعداد متناهی تابعی بگیرید که تکیه‌گاه آنها در U_k قرار دارد.(تمرین ۲) بنابراین $\psi_k \in C_۰^\infty(U_k)$ و $\sum_{k=۱}^{\infty} \psi_k = ۱$ روی Ω. اکنون برای $۰ < \varepsilon < \frac{۱}{(k+۱)(k+۲)}$، نتیجه می‌شود که $\text{Supp}\, J_\varepsilon * (\psi_k u) \subseteq \Omega_{k+۲} \setminus \Omega_{k-۲} \Subset \Omega$ و چون $\psi_k u \in W^{m,p}(\Omega)$ است، بنابر لم قبل مقدار $۰ < \varepsilon_k < \frac{۱}{(k+۱)(k+۲)}$ را می‌توان

---

[۱] Meyers-Serrin

انتخاب کرد به طوری که

$$||J_{\varepsilon_k} * (\psi_k u) - \psi_k u||_{m,p} < \frac{\varepsilon}{۲^k}$$

اگر قرار دهیم $\phi = \sum_{k=۱}^{\infty} J_{\varepsilon_k} * (\psi_k u)$ روی هر زیرمجموعه $\Omega' \Subset \Omega$ تنها تعداد متناهی جمله این سری ناصفر است، بنابراین $\phi \in C^\infty(\Omega)$. توجه کنید روی زیرمجموعه Ω_k جملات بعد از $k + ۲$ صفر هستند، درنتیجه

$$||u - \phi||_{m,p,\Omega_k} \leq \sum_{j=۱}^{k+۲} ||J_{\varepsilon_j} * (\psi_j u) - \psi_j u||_{m,p,\Omega_k} < \varepsilon$$

و بنابر قضیه همگرایی یکنوا نتیجه خواهد شد که $||u - \phi||_{m,p,\Omega} < \varepsilon$. ■

مثال ۴ ـ ۲. برای $p = \infty$، قضیه فوق برقرار نیست. به عنوان مثال اگر $\Omega = (-۱, ۱)$ و $u(x) = |x|$، آنگاه $u \in W^{۱,\infty}(\Omega)$ اما برای $\varepsilon < \frac{۱}{۲}$ نمی‌توان تابع هموار $\phi \in C^۱(\Omega)$ را پیدا کرد که $||u' - \phi'||_\infty < \varepsilon$.

تاکنون نشان دادیم که اعضای $W^{m,p}(\Omega)$ را به وسیله توابع هموار روی Ω می‌توان تقریب زد. ولی این سؤال همچنان باقی است که آیا می‌توان به وسیله توابعی که روی مرز Ω نیز هموار هستند، این تقریب را به دست آورد؟ یا به عبارتی آیا فضای $C^k(\overline{\Omega})$ برای $k \geq m$ در $W^{m,p}(\Omega)$ چگال است. مثال زیر نشان می‌دهد که جواب این سؤال در حالت کلی منفی است.

مثال ۴ ـ ۳. قرار دهید $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^۲ : ۰ < |x| < ۱, ۰ < y < ۱\}$، آنگاه تابع

$$u(x,y) = \begin{cases} ۱ & x > ۰ \\ ۰ & x < ۰ \end{cases}$$

متعلق به فضای $W^{۱,p}(\Omega)$ است، اما برای $\varepsilon > ۰$ به اندازه کافی کوچک هیچ تابع $\phi \in C^۱(\overline{\Omega})$ وجود ندارد که $||u - \phi||_{۱,p} < \varepsilon$.

در مثال بالا مرز ناحیه Ω شامل پاره‌خطی است که هر دو طرف آن نقاطی از Ω قرار دارد. به همین دلیل تقریب زدن روی $\overline{\Omega}$ دچار مشکل می‌شود. نواحی که در تعریف زیر صدق کنند، چنین مشکلی را نخواهند داشت و روی آنها امکان تقریب به وسیله توابع هموار وجود دارد.

تعریف ۴ ـ ۱۴. ناحیه Ω را دارای خاصیت برشی [۲] گوییم، اگر برای هر $x \in \partial\Omega$، باز U_x و بردار ناصفر y_x وجود دارد که

---

[۲] segment property

— $x \in U_x$

— اگر $z \in \overline{\Omega} \cap U_x$ آنگاه $z + ty_x \in \Omega$ برای هر $\circ < t < ۱$.

قضیه۴ ـ ۱۵. *اگر ناحیه Ω دارای خاصیت برشی باشد، آنگاه مجموعه تحدیدهای توابع $C_\circ^\infty(\mathbb{R}^n)$ به Ω برای $۱ \leq p < \infty$ در $W^{m,p}(\Omega)$ چگال است.*

برهان. فرض کنید $u \in W^{m,p}(\Omega)$، نشان می‌دهیم تابع هموار $\phi \in C_\circ^\infty(\mathbb{R}^n)$ وجود دارد که $||u-\phi||_{m,p,\Omega}$ به اندازه دلخواه کوچک باشد.

گام نخست ـ می‌توان فرض کرد که تکیه‌گاه u فشرده است. اگر $f \in C_\circ^\infty(\mathbb{R}^n)$ تابعی باشد که

$$f(x) = \begin{cases} ۱ & |x| \leq ۱ \\ \circ & |x| \geq ۲ \end{cases}$$

و به علاوه $|D^\alpha f(x)| \leq M$ برای هر x و $\circ \leq |\alpha| \leq m$. اکنون قرار دهید $f_\varepsilon(x) = f(\varepsilon x)$ در این صورت

$$f_\varepsilon(x) = ۱ \qquad |x| \leq \frac{۱}{\varepsilon} \text{ برای}$$
$$|D^\alpha f_\varepsilon(x)| \leq M\varepsilon^{|\alpha|} \leq M$$

در این صورت $u_\varepsilon = f_\varepsilon u \in W^{m,p}(\Omega)$ و تکیه‌گاه آن فشرده است، زیرا

$$|D^\alpha u_\varepsilon(x)| = \big|\sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} D^\beta u(x) D^{\alpha-\beta} f_\varepsilon(x)\big| \leq M \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} |D^\beta u(x)|$$

از طرفی اگر $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : |x| > \frac{۱}{\varepsilon}\}$،

$$||u-u_\varepsilon||_{m,p,\Omega} = ||u-u_\varepsilon||_{m,p,\Omega_\varepsilon} \leq ||u||_{m,p,\Omega_\varepsilon} + ||u_\varepsilon||_{m,p,\Omega_\varepsilon} \leq Const||u||_{m,p,\Omega_\varepsilon}$$

وقتی $\varepsilon \to \circ$، سمت راست به صفر میل خواهد کرد. بنابراین می‌توان $u \in W^{m,p}(\Omega)$ را با یک تابعی در همین فضا تقریب زد که دارای تکیه‌گاه فشرده است.

گام دوم ـ با فرض فشردگی $K = \operatorname{Supp} u$، آن را با تعداد متناهی باز $U_\circ, U_۱, \cdots, U_k$ می‌پوشانیم که $U_\circ \Subset \Omega$ و برای $۱ \leq i \leq k$، U_iها بازهایی هستند که در تعریف خاصیت برشی Ω بیان شدند و $\partial\Omega$ را می‌پوشانند. هم‌چنین می‌توانیم پوشش باز $K \subset \widetilde{U}_\circ \cup \cdots \cup \widetilde{U}_k$ را به دست آورد که $\widetilde{U}_i \Subset U_i$. اگر $\{\psi_i\}$ افراز واحد هموار این پوشش باشد که $\operatorname{Supp} \psi_i \subset U_i$، قرار دهید $u_i = \psi_i u$. برای هر u_i تابع هموار $\phi_i \in C_\circ^\infty(\mathbb{R}^n)$ را ارایه می‌کنیم که $||u_i - \phi_i||_{m,p,\Omega} < \frac{\varepsilon}{k+۱}$. در این صورت $\phi = \sum_{i=\circ}^{k} \phi$ تقریب هموار تابع u خواهد بود. بنابر لم قبل تابع $\phi_\circ \in C_\circ^\infty(\mathbb{R}^n)$ وجود دارد. بقیه توابع ϕ_i را در گام بعد

مشخص می‌کنیم.

گام سوم ــ برای یک i ثابت قرار دهید $\Gamma = \widetilde{U}_i \cap \partial\Omega$ و y را بردار ناصفری بگیرید که از تعریف خاصیت برشی برای باز U_i وجود دارد. خاصیت برشی تضمین می‌کند که $\Gamma_t = \Gamma - ty \subset U_i$ و $\Gamma_t \cap \overline{\Omega} = \varnothing$ برای مقادیر t به اندازه کافی کوچک. اکنون اگر u_i را خارج باز Ω با صفر توسعه دهیم، در آن صورت $u_i \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n - \Gamma)$ و اگر قراردهیم $u_{i,t}(x) = u_i(x + ty)$، آنگاه $u_{i,t} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n - \Gamma_t)$ بنابر قضیه پیوستگی نرم در فضای $\mathcal{L}^p(\Omega)$ (قضیه ۱ ـ ۲۸) داریم $\lim_{t\to\circ^+} D^\alpha u_{i,t} = D^\alpha u_i$ در $\mathcal{L}^p(\Omega)$ و درنتیجه $u_{i,t} \to u_i$ در $W^{m,p}(\Omega)$. از طرفی به کمک لم ۴ ـ ۱۲ می‌توان $u_{i,t}$ را در $\Omega \cap U_i \Subset \mathbb{R}^n - \Gamma_t$ با توابع هموار $\phi_i \in C_\circ^\infty(\mathbb{R}^n)$ تقریب زد. ■

نتیجه۴ ـ ۱۶. $W_\circ^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$

سؤالی که از نتیجه فوق به ذهن می‌رسد، این است که برای چه نواحی دیگری تساوی $W_\circ^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$ برقرار است. یعنی چه موقع $C_\circ^\infty(\Omega)$ در $W^{m,p}(\Omega)$ چگال است. در ادامه نشان می‌دهیم در چنین حالتی ناحیه Ω تقریباً برابر $\mathbb{R}^n$ است، در واقع اثبات می‌کنیم Ω^c اندازه صفر است. هم‌چنین قضیه ۴ ـ ۱۹ نشان می‌دهد که تساوی برای $p \geq ۲$ و $mp > n$ تنها برای $\Omega = \mathbb{R}^n$ برقرار است.

قبل از هر چیز به این نکته دقت کنید که اگر $u \in W_\circ^{m,p}(\Omega)$ را در خارج Ω با صفر توسعه دهیم، یعنی

$$\widetilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & x \in \Omega \\ \circ & x \in \Omega^c \end{cases}$$

لم زیر نشان می‌دهد که $\widetilde{u} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

لم۴ ـ ۱۷. فرض کنید $u \in W_\circ^{m,p}(\Omega)$ و اگر $|\alpha| \leq m$، آنگاه $D^\alpha \widetilde{u} = (D^\alpha u)^\sim$ که تساوی در فضای توزیعهای $\mathbb{R}^n$ است. درنتیجه $\widetilde{u} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

برهان. فرض کنید $\{\phi_n\}$ دنباله‌ای در $C_\circ^\infty(\Omega)$ است که در فضای $W_\circ^{m,p}(\Omega)$ به u همگرا است. اگر $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ برای $|\alpha| \leq m$ خواهیم داشت.

$$\begin{aligned} \langle D^\alpha \widetilde{u}, \psi \rangle = (-۱)^{|\alpha|} \langle \widetilde{u}, D^\alpha \psi \rangle &= (-۱)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{u}(x) D^\alpha \psi(x)\, dx \\ &= (-۱)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \widetilde{u}(x) D^\alpha \psi(x)\, dx \\ &= \lim_{n\to\infty} (-۱)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \phi_n(x) D^\alpha \psi(x)\, dx \end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega D^\alpha\phi_n(x)\psi(x)\,dx$$
$$= \int_\Omega D^\alpha u(x)\psi(x)\,dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha u)\tilde{}(x)\psi(x)\,dx$$

پس به معنای توزیعی $D^\alpha\widetilde{u} = (D^\alpha u)\tilde{}$، و درنتیجه $D^\alpha\widetilde{u} \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ و بنابراین $\widetilde{u} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ و $||\widetilde{u}||_{m,p,\mathbb{R}^n} = ||u||_{m,p,\Omega}$. ■

قضیه۴ ـ ۱۸. *اگر $W_\circ^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$، آنگاه Ω^c اندازه صفر است.*

برهان. اگر Ω^c اندازه صفر نباشد، مکعب مستطیل $B \subset \mathbb{R}^n$ وجود دارد که اشتراکش با Ω و Ω^c، مجموعه‌هایی با اندازه مثبت است. $\phi \in C_\circ^\infty(\mathbb{R}^n)$ تابعی می‌گیریم که $\phi\big|_{B\cap\Omega} = ۱$. اگر $u = \phi\big|_\Omega$، آنگاه

$$u \in W^{m,p}(\Omega) = W_\circ^{m,p}(\Omega)$$

بنابر لم قبل $\widetilde{u} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ و $D_j\widetilde{u} = (D_j u)\tilde{}$، بنابراین $D_j\widetilde{u}\big|_B = ۰$. بنابر قضیه ۲ ـ ۴، توزیع $\widetilde{u}$ روی B یک تابع ثابت است. اما $\widetilde{u}(x) = ۱$ روی $B\cap\Omega$ و $\widetilde{u}(x) = ۰$ روی $B\cap\Omega^c$ که تناقض است و باید Ω^c اندازه صفر باشد. ■

در قضیه زیر که اثبات آن را به کتاب [Adams] ارجاع می‌دهیم، بیان می‌کند که در بسیاری از حالات تساوی $W^{m,p}(\Omega) = W_\circ^{m,p}(\Omega)$ تنها برای ناحیه $\Omega = \mathbb{R}^n$ برقرار است.

قضیه۴ ـ ۱۹. *برای $p \geq ۲$ و $mp > n$ تساوی $W^{m,p}(\Omega) = W_\circ^{m,p}(\Omega)$ تنها برای $\Omega = \mathbb{R}^n$ برقرار است.*

۴ـ۳ تغییر مختصات

فرض کنید $\Omega_۱, \Omega_۲ \subseteq \mathbb{R}^n$ دو ناحیه باز باشند و $\Phi : \Omega_۱ \longrightarrow \Omega_۲$ نگاشت یک به یک و پوشا باشد که $\Psi = \Phi^{-۱}$ وارون آن است. Φ را mـ هموار گوییم هرگاه برای

$$y = \Phi(x) = \big(\phi_۱(x_۱,\cdots,x_n),\cdots,\phi_n(x_۱,\cdots,x_n)\big)$$
$$x = \Psi(y) = \big(\psi_۱(y_۱,\cdots,y_n),\cdots,\psi_n(y_۱,\cdots,y_n)\big)$$

توابع $\phi_1, \cdots, \phi_n$ متعلق به $C^m(\overline{\Omega}_1)$ و $\psi_1, \cdots, \psi_n$ متعلق به $C^m(\overline{\Omega}_2)$ باشند. برای هر تابع اندازه‌پذیر u، تعریف شده روی Ω_1، می‌توانیم تابع اندازه پذیر زیر را روی Ω_2 تعریف کرد

$$Au(y) = u\big(\Psi(y)\big)$$

اگر Φ نگاشت ۱ ـ هموار باشد به طوری که ثابتهای $0 < c \leq C$ وجود دارند که برای هر $x \in \Omega_1$،

$$c \leq |\det \Phi'(x)| \leq C$$

می‌توان نشان داد که عملگر A برای $1 \leq p < \infty$ فضای $\mathcal{L}^p(\Omega_1)$ را به طور پیوسته به $\mathcal{L}^p(\Omega_2)$ تصویر می‌کند و وارون پیوسته دارد، در حقیقت

$$c^{\frac{1}{p}}||u||_{p,\Omega_1} \leq ||Au||_{p,\Omega_2} \leq C^{\frac{1}{p}}||u||_{p,\Omega_1} \qquad (۴ ـ ۳)$$

نتیجه مشابهی برای فضاهای سوبولف برقرار است. این مطلب در قضیه زیر بیان می‌شود:

قضیه۴ ـ ۲۰. *فرض کنید Φ نگاشت تغییر مختصات mـهموار باشد که $m \geq 1$. در این صورت A فضای $W^{m,p}(\Omega_1)$ را به طور پیوسته به $W^{m,p}(\Omega_2)$ تصویر می‌کند و وارون پیوسته دارد.*

برهان. فرض کنید $u \in W^{m,p}(\Omega_1)$، بنابر قضیه ۴ ـ ۱۳، دنباله $u_n \in C^\infty(\Omega_1)$ وجود دارد که $u_n \to u$ در $W^{m,p}(\Omega_1)$. در این صورت

$$D^\alpha\big(Au_n\big)(y) = \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} P_{\alpha\beta}(y)\big[A(D^\beta u_n)\big](y) \qquad (۴ ـ ۴)$$

که $P_{\alpha\beta}$ یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر β از مشتقات حداکثر مرتبه $|\alpha|$ از مؤلفه‌های مختلف Ψ است. اگر $\phi \in \mathcal{D}(\Omega_2)$ با انتگرالگیری جزء به جزء خواهیم داشت

$$(-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega_2}\big(Au_n\big)(y)D^\alpha\phi(y)\,dy = \sum_{|\beta| \leq |\alpha|}\int_{\Omega_2} P_{\alpha\beta}(y)\big[A(D^\beta u_n)\big](y)\phi(y)\,dy$$

اکنون با تغییر متغیر $y = \Phi(x)$ به دست می آوریم

$$(-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega_1} u_n(x)D^\alpha\phi\big(\Phi(x)\big)|\det\Phi'(x)|\,dx =$$

$$\sum_{|\beta| \leq |\alpha|}\int_{\Omega_1} P_{\alpha\beta}(\Phi(x))D^\beta u_n(x)\phi\big(\Phi(x)\big)|\det\Phi'(x)|\,dx$$

چون $D^\beta u_n \to D^\beta u$ در $\mathcal{L}^p(\Omega_1)$ برای $|\beta| \leq m$، بنابراین رابطه بالا با جایگزینی u به جای u_n همچنان برقرار است. در نتیجه رابطه (۴ ـ ۴) به معنای توزیع برای

$u \in W^{m,p}(\Omega_۱)$ نیز صحیح است. اکنون با توجه به رابطه (۴ ـ ۳) خواهیم داشت

$$\int_{\Omega_۲} \left|D^\alpha(Au)(y)\right|^p dy \leq (\sum_{|\beta|\leq|\alpha|} ۱)^p \max_{|\beta|\leq|\alpha|} \Big(\sup_{y\in\Omega_۲} \left|P_{\alpha\beta}(y)\right|^p \int_{\Omega_۲} \left|D^\beta u(\Psi(y))\right|^p dy \Big)$$

$$\leq C \max_{|\beta|\leq|\alpha|} \int_{\Omega_۱} \left|D^\beta u(x)\right|^p dx$$

ثابت C تنها به Φ و ψ وابسته است، بنابراین

$$||Au||_{m,p,\Omega_۲} \leq C||u||_{m,p,\Omega_۱}$$

■

۴ـ۴ عملگرهای توسعه

اگر Ω دامنه‌ای در $\mathbb{R}^n$ باشد، برای هر عدد صحیح m و عدد حقیقی مثبت p، عملگر خطی $E : W^{m,p}(\Omega) \longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$، یک عملگر (m,p) ـ توسعه ساده گفته می‌شود، هرگاه ثابت $K = K(m,p)$ وجود داشته باشد که برای هر $u \in W^{m,p}(\Omega)$

(i) $Eu(x) = u(x)$ تقریباً همه جا در Ω

(ii) $||Eu||_{m,p,\mathbb{R}^n} \leq K||u||_{m,p,\Omega}$

E عملگر m ـ توسعه قوی است، هرگاه E یک عملگر خطی از توابعی که تقریباً همه جا روی Ω تعریف شده‌اند به فضای توابع روی $\mathbb{R}^n$ باشد، به شرط آنکه برای هر $۱ \leq p < \infty$ و هر $۰ \leq k \leq m$، تحدید E به فضای $W^{k,p}(\Omega)$ یک عملگر (k,p) ـ توسعه ساده برای Ω باشد.

عملگرهای توسعه این امکان را فراهم می‌کنند که بسیاری از گزاره‌هایی که برای $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ درست هستند را برای فضاهای $W^{m,p}(\Omega)$ اثبات کنیم. کاربردهایی از آن را در بخشهای بعد خواهیم دید. تنها برای آشنایی با نحوه استفاده فرض کنید نشاندن پیوسته $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)$ برقرار باشد، آنگاه به کمک عملگر توسعه نشاندن پیوسته $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\Omega)$ نیز برقرار است. دقت کنید که $Eu|_\Omega = u$ و

$$W^{m,p}(\Omega) \xrightarrow{E} W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\text{تحدید به } \Omega} \mathcal{L}^q(\Omega)$$

قضیه۴ ـ ۲۱. *عملگر m ـ توسعه قوی برای $\mathbb{R}^n_+ = \{x : x_n > 0\}$ وجود دارد.*

برهان. برای تابع u که تقریباً همه جا روی R^n_+ تعریف شده است، توسعه Eu را به صورت زیر روی $\mathbb{R}^n$ تعریف می‌کنیم

$$Eu(x) = \begin{cases} u(x) & x_n > 0 \\ \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j u(x_1, \dots, x_{n-1}, -jx_n) & x_n \leq 0 \end{cases} \tag{۴ ـ ۵}$$

در ادامه ضرایب λ_j را به گونه‌ای تعیین می‌کنیم که E یک عملگر m ـ توسعه قوی باشد. اگر $u \in C^m(\overline{\mathbb{R}^n_+})$، آنگاه

$$D^\alpha Eu(x) = E_\alpha D^\alpha u(x)$$

که برای $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$$E_\alpha v(x) = \begin{cases} v(x) & x_n > 0 \\ \sum_{j=1}^{m+1} (-j)^{\alpha_n} \lambda_j v(x_1, \dots, x_{n-1}, -jx_n) & x_n \leq 0 \end{cases} \tag{۴ ـ ۶}$$

برای اینکه $Eu \in C^m(\mathbb{R}^n)$ باشد، کافی است که ضرایب λ_j جواب دستگاه زیر باشد

$$\sum_{j=1}^{m+1} (-j)^k \lambda_j = 1, \qquad 0 \leq k \leq m$$

در این صورت

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha Eu(x)|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^n_+} |D^\alpha u(x)|^p dx + \int_{\mathbb{R}^n_-} |\sum_{j=1}^{m+1} (-j)^{\alpha_n} \lambda_j u(x_1, \dots, x_{n-1}, -jx_n)|^p dx \\ &\leq K(m,p,\alpha) \int_{\mathbb{R}^n_+} |D^\alpha u(x)|^p dx \end{aligned}$$

به کمک قضیه ۴ ـ ۱۵ توابع $C^m(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ در $W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+)$ چگال است و نامساوی بالا را می‌توان برای توابع $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+)$ تعمیم داد. بنابراین E یک m ـ توسعه قوی برای $\mathbb{R}^n_+$ است. ■

برای اینکه قضیه فوق را به نواحی باز Ω تعمیم دهیم، ابتدا تعاریف زیر را بیان می‌کنیم.

تعریف۴ ـ ۲۲. پوشش باز $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ برای مجموعه $S \subseteq \mathbb{R}^n$ موضعاً متناهی گفته می‌شود، اگر هر مجموعه فشرده در $\mathbb{R}^n$ تنها تعداد متناهی عضو $\mathcal{U}$ را قطع کند. (بنابراین هر پوشش موضعاً متناهی، شمارش‌پذیر است)

تعریف ۴ ـ ۲۳. دامنه $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ را به طور یکنواخت C^m ـ منظم می‌گوییم، هرگاه پوشش باز موضعاً متناهی $\{U_j\}$ از مرز $\partial\Omega$ همراه با توابع C^m ـ وابرریختی $\{\Phi_j\}$ بین U_j و گوی واحد $B = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < 1\}$ در $\mathbb{R}^n$ وجود داشته باشد که

(i) برای $\delta > 0$، $\Omega_\delta \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \Psi_j(B(0, \frac{1}{2}))$ که $\Psi_j = \Phi_j^{-1}$، $B(0, \frac{1}{2})$ گوی به شعاع $\frac{1}{2}$ است و $\Omega_\delta = \{x \in \Omega : dist(x, \partial\Omega) < \delta\}$.

(ii) $\Phi_j(U_j \cap \Omega) = \{y \in B : y_n > 0\}$

(iii) اگر (ϕ_{ji}) و (ψ_{ji}) مؤلفه‌های Φ_j و Ψ_j باشند، مقدار M وجود دارد به طوری که برای هر اندیس α که $|\alpha| \leq m$ و هر $1 \leq i \leq n$ و هر j

$$|D^\alpha \phi_{ji}(x)| \leq M, \quad |D^\alpha \psi_{ji}(y)| \leq M \qquad x \in U_j, \, y \in B$$

قضیه ۴ ـ ۲۴. *اگر Ω به طور یکنواخت C^m ـ منظم باشد و $\partial\Omega$ کران‌دار، آنگاه یک عملگر m ـ توسعه قوی برای Ω وجود دارد. به علاوه برای اندیسهای α و γ که $|\gamma| \leq |\alpha| \leq m$ و $1 \leq j \leq m - |\alpha|$، نگاشتهای خطی پیوسته $E_{\alpha\gamma} : W^{j,p}(\Omega) \longrightarrow W^{j,p}(\mathbb{R}^n)$ وجود دارند که برای هر $u \in W^{|\alpha|,p}(\Omega)$*

$$D^\alpha Eu(x) = \sum_{|\gamma| \leq |\alpha|} E_{\alpha\gamma} D^\gamma u(x) \qquad \text{تقریباً همه جا در } \mathbb{R}^n$$

برهان. $\partial\Omega$ فشرده است و پوشش باز موضعاً متناهی $\{U_j\}$ مطابق تعریف، متناهی است و تعداد آنها را N قرار می‌دهیم. مکعب مستطیل زیر را در نظر بگیرید

$$Q = \{y \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n-1} y_j^2 < \frac{1}{4}, \; y_n^2 < \frac{3}{4}\}$$

خواهیم داشت: $B(0, \frac{1}{2}) \subset Q \subset B$. مجموعه بازهای $\{V_j = \Psi_j(Q)\}_{j=1}^N$ پوشش بازی برای Ω_δ است. (شرط (i) تعریف ۴ ـ ۲۳) باز V_0 دور از مرز $\partial\Omega$ وجود دارد که $\Omega \subseteq \bigcup_{j=0}^{N} V_j$. افراز واحد هموار این پوشش را $\{w_j\}_{j=0}^N$ بنامید که $\operatorname{Supp} w_j \subseteq V_j$ و $\sum_{j=0}^{N} w_j(x) = 1$. (دقت کنید در حالتی که Ω بیکران است، تکیه‌گاه w_0 لزوماً فشرده نیست.)

اگر $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$، آنگاه $\phi = \sum_{j=0}^{N} \phi_j$ که $\phi_j = w_j \phi \in C_0^\infty(V_j)$. همچنین اگر برای

$j \geq ۱$ و $y \in B$ قرار دهیم $\psi_j(y) = \phi_j(\Psi_j(y))$، آنگاه $\psi_j \in C_\circ^\infty(Q)$. اکنون ψ_j را در خارج Q به صورت صفر توسعه دهید و از عملگرهای توسعه E و E_α که در (۴ ـ ۵) و (۴ ـ ٦) تعریف شده‌اند، استفاده کنید. اگر $Q_+ = \{y \in Q : y_n > ۰\}$، آنگاه خواهیم داشت

$$E(\psi_j|_{Q_+}) \in C_\circ^\infty(Q)$$
$$||E\psi_j||_{k,p,Q} \leq C_۱||\psi_j||_{k,p,Q_+} \qquad ۰ \leq k \leq m$$

اگر $\theta_j(x) = E\psi_j(\Phi_j(x))$، آنگاه $\theta_j \in C_\circ^\infty(V_j)$ و $\theta_j(x) = \phi_j(x)$ برای $x \in \Omega$. (شرط (iii) تعریف ۴ ـ ۲۳) به علاوه می‌توان نشان داد که

$$D^\alpha\theta_j(x) = \sum_{|\beta|\leq|\alpha|}\sum_{|\gamma|\leq|\alpha|} a_{j,\alpha\beta}(x)\big[E_\beta\big(b_{j,\beta\gamma}(D^\gamma\phi_j \circ \Psi_j)\big)\big]\big(\Phi_j(x)\big)$$

که $a_{j,\alpha\beta} \in C^{m-|\alpha|}(\overline{U_j})$ و $b_{j,\beta\gamma} \in C^{m-|\beta|}(\overline{B})$ وابسته به Φ_j و Ψ_j تعیین می‌شوند و

$$\sum_{|\beta|\leq|\alpha|} a_{j,\alpha\beta}(x)b_{j,\beta\gamma}\big(\Phi_j(x)\big) = \begin{cases} ۱ & \gamma = \alpha \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

به کمک قضیه تغییر متغیر ۴ ـ ۲۰، برای $k \leq m$

$$||\theta_j||_{k,p,\mathbb{R}^n} \leq C_۲||E\psi_j||_{k,p,Q} \leq C_۱C_۲||\psi_j||_{k,p,Q_+} \leq C_۳||\phi_j||_{k,p,\Omega}$$

تا اینجا توابع θ_j مؤلفه‌های $\phi = \sum_{j=۰}^N \phi_j$ را برای $۱ \leq j \leq N$ از روی مرز $\partial\Omega$ به $\mathbb{R}^n$ توسعه دادند. برای اینکه توسعه ϕ را داشته باشیم، تعریف کنید

$$E\phi(x) = \phi_\circ + \sum_{j=۱}^N \theta_j(x)$$

برای $x \in \Omega$، $E\phi(x) = \phi(x)$ و

$$||E\phi||_{k,p,\mathbb{R}^n} \leq ||\phi_\circ||_{k,p,\Omega} + C_۳\sum_{j=۱}^N||\phi_j||_{k,p,\Omega} \leq C||\phi||_{k,p,\Omega}$$

به علاوه

$$D^\alpha E\phi(x) = \sum_{|\gamma|\leq|\alpha|}\big(E_{\alpha\gamma}D^\gamma\phi\big)(x)$$

که

$$E_{\alpha\gamma}u(x) = \sum_{j=۱}^N\sum_{|\beta|\leq|\alpha|} a_{j,\alpha\beta}(x)\big[E_\beta\big(b_{j,\beta\gamma}(uw_j) \circ \Psi_j\big)\big]\big(\Phi_j(x)\big)$$

به راحتی می‌توان دید که برای $x \in \Omega$، $E_{\alpha\gamma}u(x) = ۰$ اگر $\gamma \neq \alpha$ و $E_{\alpha\alpha}u(x) = u(x)$.

چون Ω به طور یکنواخت C^m ـ منظم است، دارای خاصیت برشی نیز است و تحدید توابع

$C_\circ^\infty(\mathbb{R}^n)$ به Ω در $W^{k,p}(\Omega)$ چگال هستند. لذا نتایج بالا برای هر تابع $u \in W^{k,p}(\Omega)$ به جای ϕ درست است و در نتیجه گسترش E به $W^{m,p}(\Omega)$ همان عملگر m ـ توسعه قوی است. ■

تذکر۴ ـ ۲۵. همان طور که در فرآیند اثبات دیده می‌شود می‌توان عملگر توسعه E را به گونه‌ای ساخت که برای هر تابع $u \in W^{m,p}(\Omega)$ توسعه یافته آن Eu، تکیه‌گاه فشرده داشته باشد.

تذکر۴ ـ ۲۶. اگر Ω یک ناحیه لیپشیتز[۱] و $\partial\Omega$ کران‌دار باشد، همچنان یک عملگر توسعه قوی روی Ω وجود دارد. عملگر توسعه $E : W^{m,p}(\Omega) \longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ برای هر $\circ \le p \le \infty$ و هر $m \ge \circ$ پیوسته خواهد بود. [Stein, p.181]

۴ـ۵ قضایای نشاندن و نامساویهای سوبولف

برای $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ فضاهای سوبولف $W^{m,p}(\Omega)$ وابسته به مقادیر مختلف p, m و n می‌توانند در فضاهای $\mathcal{L}^q(\Omega)$ بنشینند و یا در بعضی مواقع اعضای $W^{m,p}(\Omega)$ نماینده‌هایی پیوسته و یا مشتق‌پذیر داشته باشد. قضایای نشاندن فضاهای سوبولف را در سه قسمت مختلف $p < n$، $p = n$ و $p > n$ بررسی می‌کنیم. ابتدا هر حالت را برای $\Omega = \mathbb{R}^n$ بررسی می‌کنیم، سپس به کمک عملگر توسعه نتایج را به نواحی دلخواه $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ تعمیم می‌دهیم.

حالت اول: $۱ \le p < n$

مزدوج سوبولف p را برابر p^* تعریف می‌کنیم که

$$p^* = \frac{pn}{n-p} \qquad \text{یا} \qquad \frac{۱}{p^*} = \frac{۱}{p} - \frac{۱}{n}$$

دقت کنید که $p < p^*$.

لم۴ ـ ۲۷. فرض کنید $n \ge ۲$ و $f_۱, \cdots, f_n \in \mathcal{L}^{n-۱}(\mathbb{R}^{n-۱})$. برای $x \in \mathbb{R}^n$، قرار دهید $\hat{x}_i = (x_۱, \ldots, x_{i-۱}, x_{i+۱}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-۱}$. اگر $f(x) = f_۱(\hat{x}_۱) \cdots f_n(\hat{x}_n)$، آنگاه

---

[۱] ناحیه لیپشیتز ناحیه‌ای است که یک همسایگی از هر نقطه مرزی آن با یک حرکت صلب به قسمت پایین نمودار یک تابع لیپشیتز تبدیل شود. لذا هر ناحیه لیپشیتز خاصیت برشی نیز دارد.

$f \in \mathcal{L}^{1}(\mathbb{R}^n)$ و $\|f\|_1 \leq \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{n-1}$.

برهان. به کمک تعمیم قضیه هولدر ۱ ـ ۱۹،

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx_1 = |f_1(\hat{x}_1)|\int_{-\infty}^{\infty}|f_2(\hat{x}_2)\cdots f_n(\hat{x}_n)|dx_1$$
$$\leq |f_1(\hat{x}_1)|\prod_{i=2}^{n}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}|f_i(\hat{x}_i)|^{n-1}dx_1\Big)^{\frac{1}{n-1}}$$

تابع $\Big(\int_{-\infty}^{\infty}|f_i(\hat{x}_i)|^{n-1}dx_1\Big)^{\frac{1}{n-1}}$ نسبت به متغیر x_2 در فضای $\mathcal{L}^{n-1}(\mathbb{R})$ قرار دارد، بنابراین

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx_1dx_2 \leq \Big(\int_{-\infty}^{\infty}|f_2(\hat{x}_2)|^{n-1}dx_1\Big)^{\frac{1}{n-1}}$$
$$\Big(\int_{-\infty}^{\infty}|f_1(\hat{x}_1)|\prod_{i=3}^{n}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}|f_i(\hat{x}_i)|^{n-1}dx_1\Big)^{\frac{1}{n-1}}dx_2\Big)$$
$$\leq \Big(\int_{-\infty}^{\infty}|f_2(\hat{x}_2)|^{n-1}dx_1\Big)^{\frac{1}{n-1}}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}|f_1(\hat{x}_1)|^{n-1}dx_2\Big)^{\frac{1}{n-1}}$$
$$\prod_{i=3}^{n}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f_i(\hat{x}_i)|^{n-1}dx_1dx_2\Big)^{\frac{1}{n-1}}$$

به همین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت که

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|dx \leq \prod_{i=1}^{n}\Big(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|f_i(\hat{x}_i)|^{n-1}d\hat{x}_i\Big)^{\frac{1}{n-1}} = \prod_{i=1}^{n}\|f_i\|_{n-1}$$

■

قضیه۴ ـ ۲۸. **(نامساوی گاگلیاردو ـ نیرنبرگ ـ سوبولف)**[1] *برای* $1 \leq p < n$، *مقدار ثابت* $0 < C = C(p,n)$ *وجود دارد که برای هر* $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

$$\|u\|_{p^*} \leq C\sum_{i=1}^{n}\|\partial_i u\|_p \leq C\|u\|_{1,p,\mathbb{R}^n}$$

در نتیجه نشاندن $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ *پیوسته است.*

برهان. گام اول: فرض کنید $p = 1$ و $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$، در این صورت

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i}\partial_i u(x_1,\ldots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\ldots,x_n)dy_i$$

بنابراین

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty}|\partial_i u|dy_i = f_i(\hat{x}_i)$$

---

[1] Gagliardo-Nirenberg-Sobolev

چون $\partial_i u$ انتگرالپذیر است، بنابراین $|f_i|^{\frac{1}{n-1}} \in \mathcal{L}^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$ و بنابر لم قبل

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\prod_{i=1}^n |f_i(\hat{x}_i)|^{\frac{1}{n-1}}\Big) dx \leq \prod_{i=1}^n \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\partial_i u(x)|\Big)^{\frac{1}{n-1}}$$

در نتیجه

$$\|u\|_{\frac{n}{n-1}} \leq \Big(\prod_{i=1}^n \|\partial_i u\|_1\Big)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \|\partial_i u\|_1$$

توجه کنید که $\frac{n}{n-1} = 1^*$.

گام دوم: $1 < p < n$، تابع $v = u|u|^{t-1}$ برای $t \geq 1$ متعلق به $C_\circ^\infty(\mathbb{R}^n)$ است. آن را در نتیجه مرحله قبل جایگذاری می‌کنیم: (توجه کنید $\partial_i v = t\partial_i u|u|^{t-1}$)

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{tn}{n-1}} dx\Big)^{\frac{n-1}{n}} \leq \frac{t}{n}\sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_i u|\,|u|^{t-1} dx$$

$$\leq \frac{t}{n}\sum_{i=1}^n \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\partial_i u|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{(t-1)\frac{p}{p-1}} dx\Big)^{\frac{p-1}{p}} \quad (۴ ـ ۷)$$

اگر مقدار t در رابطه $\frac{tn}{n-1} = \frac{(t-1)p}{p-1}$ صدق کند، یعنی $t = \frac{p(n-1)}{n-p} > 1$، آنگاه $\frac{tn}{n-1} = \frac{np}{n-p} = p^*$ و $\frac{n-1}{n} - \frac{p-1}{p} = \frac{n-p}{np} = \frac{1}{p^*}$ و

$$\|u\|_{p^*} \leq \frac{p(n-1)}{n(n-p)} \sum_{i=1}^n \|\partial_i u\|_p \quad (۴ ـ ۸)$$

گام سوم: اگر $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$، دنباله $u_m \in C_\circ^\infty(\mathbb{R}^n)$ وجود دارد که $u_m \longrightarrow u$ در $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. بنابر (۴ ـ ۸) $\{u_m\}$ در $\mathcal{L}^{p^*}$ کوشی است و در نتیجه زیر دنباله‌ای دارد که تقریباً همه جا همگرا است. چون $\{u_m\}$ در $\mathcal{L}^p$ به u همگرا است، بنابراین حد آن در $\mathcal{L}^{p^*}$ نیز همان u خواهد بود. بنابراین رابطه (۴ ـ ۸) در $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ نیز برقرار است. ■

نتیجه۴ ـ ۲۹. اگر $1 \leq p < n$، نشاندن پیوسته $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)$ برای هر $q \in [p, p^*]$ برقرار است.

برهان. $\alpha \in [0, 1]$ را انتخاب کنید به طوری که $\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{p^*}$، بنابر نامساوی درون‌یابی قضیه ۱ ـ ۲۰،

$$\|u\|_q \leq \|u\|_p^\alpha \|u\|_{p^*}^{1-\alpha} \leq C\|u\|_{1,p,\mathbb{R}^n}$$

■

نتیجه۴ ـ ۳۰. اگر $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ یک ناحیه باز باشد و $u \in W_\circ^{1,p}(\Omega)$، آنگاه $u \in \mathcal{L}^q(\Omega)$ برای $q \in [p, p^*]$ و ثابت $C = C(n,p)$ وجود دارد که

$$||u||_{p^*} \leq C \sum_{i=۱}^{n} ||\partial_i u||_p$$

$$||u||_q \leq C||u||_{۱,p,\Omega}$$

برهان. هر $u \in W_\circ^{۱,p}(\Omega)$ حد دنباله‌ای از توابع $C_\circ^\infty(\Omega)$ است، که برای آنها روابط بالا درست است. مشابه گام سوم اثبات قضیه ۴ ـ ۲۸ نتیجه مورد نظر اثبات می‌شود. ■

تذکر۴ ـ ۳۱. اگر برای $u \in W_\circ^{۱,p}(\Omega)$ قرار دهیم $||\nabla u||_p = \sum_{i=۱}^{n} ||\partial_i u||_p$، آنگاه برای نواحی کران‌دار Ω خواهیم داشت

$$||u||_q \leq C_۱||u||_{p^*} \leq C||\nabla u||_p, \qquad p \leq q \leq p^*$$

این نامساوی برای $q = p$ به نامساوی پوانکاره معروف است و از آن نتیجه می‌شود که نرمهای $||u||_{۱,p}$ و $||\nabla u||_p$ در $W_\circ^{۱,p}(\Omega)$ هم ارز هستند. این مطلب برای $W^{۱,p}(\Omega)$ اشتباه است، مثلاً اگر u تابع ثابت باشد، در این صورت $\nabla u = ۰$. هم‌چنین برای نواحی بیکران درست نیست. $\psi \in C_\circ^\infty(\mathbb{R}^n)$ را درنظر بگیرید که $۰ \leq \psi(x) \leq ۱$ و

$$\psi(x) = \begin{cases} ۱ & |x| \leq ۱ \\ ۰ & |x| \geq ۲ \end{cases}$$

اگر $\psi_k(x) = \psi(\frac{x}{k})$، آنگاه $||\psi_k||_p = k^{\frac{n}{p}}||\psi||_p$ و $||\partial_i \psi_k||_p = k^{\frac{n}{p}-۱}||\partial_i \psi||_p$ که با جایگزینی در نامساوی پوانکاره باید $||\psi||_p \leq k^{-۱}||\partial_i \psi||_p$ برای هر k برقرار باشد که تناقض است.

قضیه۴ ـ ۳۲. *اگر $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ یک ناحیه لیپشیتز با مرز کران‌دار باشد و $۱ \leq p < n$، آنگاه نشاندن پیوسته $W^{۱,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\Omega)$ برای $q \in [p, p^*]$ برقرار است و ثابت $C = C(n, p, \Omega)$ وجود دارد که*

$$||u||_q \leq C||u||_{۱,p,\Omega}$$

برهان. اگر $E : W^{۱,p}(\Omega) \longrightarrow W^{۱,p}(\mathbb{R}^n)$ عملگر توسعه باشد، آنگاه بنابر نتیجه ۴ ـ ۲۹

$$||u||_{q,\Omega} \leq ||Eu||_{q,\mathbb{R}^n} \leq C_۱||Eu||_{۱,p,\mathbb{R}^n} \leq C||u||_{۱,p,\Omega}$$

■

تذکر۴ ـ ۳۳. شرط لیپشیتز بودن Ω، تنها برای وجود عملگر توسعه است.

حالت دوم: $p = n$

در حالت $1 \leq p < n$ وقتی $p \to n$، $p^* = \dfrac{np}{n-p} \to \infty$. به همین دلیل شاید بتوان انتظار داشت که $W^{1,n} \hookrightarrow \mathcal{L}^\infty$. ولی این مطلب اشتباه است. به عنوان مثال $u(x) = \log\log(1 + \dfrac{1}{|x|})$، متعلق به $W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$ است، ولی در $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ قرار ندارد.

قضیه۴ ـ ۳۴. *اگر* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *یک زیرمجموعه باز باشد، آنگاه* $W_\circ^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\Omega)$ *به طور پیوسته برای* $n \leq q < \infty$.

برهان. مشابه اثبات نتیجه ۴ ـ ۳۰، کافی است برای $\Omega = \mathbb{R}^n$ و توابع هموار $u \in C_\circ^\infty(\mathbb{R}^n)$ اثبات شود. بنابر رابطه (۴ ـ ۷)

$$\begin{aligned}
\|u\|_{\frac{tn}{n-1}}^t &= \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{tn}{n-1}} dx\Big)^{\frac{n-1}{n}} \leq \frac{t}{n}\sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_i u|\,|u|^{t-1} dx \\
&\leq \frac{t}{n}\sum_{i=1}^n \|\partial_i u\|_n \,\|\,|u|^{t-1}\|_{\frac{n}{n-1}} = \frac{t}{n}\|\nabla u\|_n \|u\|_{\frac{(t-1)n}{n-1}}^{t-1} \\
&\leq \frac{1}{n}(\|\nabla u\|_n + \|u\|_{\frac{(t-1)n}{n-1}})^t
\end{aligned}$$

در رابطه آخر از نامساوی $tab^{t-1} \leq (a+b)^t$ برای $a, b \geq 0$ استفاده شده است. اگر قرار دهیم $t = n$

$$\|u\|_{\frac{n^2}{n-1}} \leq \|u\|_{1,n}$$

برای $t = n + 1$،

$$\|u\|_{\frac{n(n+1)}{n-1}} \leq \|\nabla u\|_n + \|u\|_{\frac{n^2}{n-1}} \leq C\|u\|_{1,n}$$

برای $t = m \geq n$ به طور استقرایی خواهیم داشت

$$\|u\|_{\frac{nm}{n-1}} \leq C\|u\|_{1,n}$$

اگر $n \leq q \leq \dfrac{mn}{n-1}$، بنابر نامساوی درون‌یابی،

$$\|u\|_q \leq \|u\|_n + \|u\|_{\frac{nm}{n-1}} \leq C\|u\|_{1,n}$$

■

تذکر۴ ـ ۳۵. به کمک عملگر توسعه، قضیه فوق را می‌توان برای نواحی لیپشیتز Ω با مرز کران‌دار به صورت $W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\Omega)$ اثبات کرد. همچنین با جایگزینی $t = 1, 2, 3, \cdots$ در فرآیند اثبات، نامساوی پوانکاره به صورت $\|u\|_n \leq C\|\nabla u\|_n$ برای $u \in W_\circ^{1,n}(\Omega)$ نتیجه خواهد شد.

حالت سوم: $p > n$

تعریف ۴ ـ ۳۶. مجموعه توابع زیر، پیوسته هولدر از مرتبه μ نامیده می‌شود

$$C^{\circ,\mu}(\Omega) = \{u \in C(\Omega) : |u(x)-u(y)| \leq K|x-y|^{\mu} \text{ وجود دارد که } K > \circ \text{ ثابت}\}$$

مقدار زیر یک شبه نرم روی این فضا است

$$[u]_{\circ,\mu,\Omega} = \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\mu}}$$

هم‌چنین نرم این فضا به صورت زیر تعریف می‌شود

$$||u||_{C^{\circ,\mu}(\Omega)} = ||u||_{C(\Omega)} + [u]_{\circ,\mu,\Omega}$$

فضای هولدر $C^{m,\mu}(\Omega)$ توابعی است که مشتق mـ ام آن در $C^{\circ,\mu}(\Omega)$ قرار دارد و نرم آن بدین صورت است

$$||u||_{C^{m,\mu}(\Omega)} = ||u||_{C^{m}(\Omega)} + \max_{|\alpha|=m} [D^{\alpha}u]_{\circ,\mu,\Omega}$$

برای $۱ \leq \lambda < \mu < \circ$ تداخل فضاهای $C^{m,۱} \subseteq C^{m,\lambda} \subseteq C^{m,\mu}$ در یک ناحیه کران‌دار به طور پیوسته برقرار است. فضای $C^{\circ,۱}(\Omega)$ مجموعه توابع لیپشیتز روی Ω است.

قضیه ۴ ـ ۳۷. (نامساوی موری[۲]) *برای* $n < p < \infty$*، نشاندن* $W^{۱,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ *به طور پیوسته برقرار است. هم‌چنین نشاندن پیوسته* $W^{۱,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{\circ,\mu}(\mathbb{R}^n)$ *برای* $\mu = ۱ - \frac{n}{p}$ *برقرار است.*

برهان قضیه. برای اثبات پیوستگی $W^{۱,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{\circ,\mu}(\mathbb{R}^n)$ کافی است ثابت $C > \circ$ وجود داشته باشد که برای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$|u(x)-u(y)| \leq C|x-y|^{\mu}||u||_{۱,p,\mathbb{R}^n}$$

فرض کنید $u \in C_{\circ}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$،

$$|u(x)-u(y)| = |\int_{\circ}^{۱} \frac{d}{dt}u(tx+(۱-t)y)dt|$$

$$\leq \int_{\circ}^{۱} \sum_{i=۱}^{n} |x_i - y_i|\,|\partial_i u(tx+(۱-t)y)|dt$$

B را گوی به شعاع r می‌گیریم که شامل نقاط x و y باشد. اگر $\hat{u} = \frac{۱}{|B|}\int_B u(x)dx$، که $|B| = \alpha r^n$ حجم گوی است، آنگاه

---

[۲] Morrey

$$
\begin{aligned}
|\hat{u}-u(y)| &\leq \frac{1}{|B|}\Big|\int_B u(x)-u(y)dx\Big| \\
&\leq \frac{2r}{|B|}\int_B\int_0^1\sum_{i=1}^{n}|\partial_i u(tx+(1-t)y)|dtdx \\
&= \frac{2}{\alpha r^{n-1}}\int_0^1\int_{B_t}\sum_{i=1}^{n}|\partial_i u(z)|t^{-n}dzdt
\end{aligned}
$$

که $z=tx+(1-t)y$ و B_t گوی به شعاع t است. دقت کنید که $|B_t|=\alpha(rt)^n$ و در نتیجه اگر $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$$
\int_{B_t}|\partial_i u(z)|dz \leq \Big(\int_{B_t}|\partial_i u(z)|^p dz\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_{B_t}dz\Big)^{\frac{1}{q}} \leq \alpha^{\frac{1}{q}}(rt)^{\frac{n}{q}}\|\partial_i u\|_{p,B}
$$

و بالاخره

$$
\begin{aligned}
|\hat{u}-u(y)| &\leq 2\alpha^{-\frac{1}{p}}r^{1-\frac{n}{p}}\Big(\int_0^1 t^{-\frac{n}{p}}dt\Big)\sum_{i=1}^{n}\|\partial_i u\|_{p,B} \\
&= \frac{2r^{1-\frac{n}{p}}}{\alpha^{\frac{1}{p}}(1-\frac{n}{p})}\|\nabla u\|_{p,B} \qquad (۴-۹)
\end{aligned}
$$

دقت کنید شرط همگرایی انتگرال بالا $n<p$ است. بدین ترتیب برای هر $x,y\in B$ داریم

$$
|u(x)-u(y)| \leq \frac{4r^{1-\frac{n}{p}}}{\alpha^{\frac{1}{p}}(1-\frac{n}{p})}\|\nabla u\|_{p,B} \qquad (۴-۱۰)
$$

برای هر $x,y\in\mathbb{R}^n$ گوی به شعاع $r=2|x-y|$ وجود دارد که شامل نقاط x و y باشد، پس

$$
|u(x)-u(y)| \leq C|x-y|^{\mu}\|\nabla u\|_{p,\mathbb{R}^n}
$$

از طرفی اگر B را گوی به شعاع یک به مرکز نقطه دلخواه y بگیریم، به کمک رابطه (۴ ـ ۹) نتیجه می‌شود

$$
|u(y)| \leq |\hat{u}|+C\|\nabla u\|_{p,B} \leq C(\|u\|_{p,B}+\|\nabla u\|_{p,B}) \leq C\|u\|_{1,p,\mathbb{R}^n}
$$

که ثابت C تنها به n و p وابسته است. بنابراین $u\in\mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ و $\|u\|_{\infty}\leq C\|u\|_{1,p,\mathbb{R}^n}$. ■

تذکر۴ ـ ۳۸. مشابه حالتهای قبل می‌توان نتایجی مانند قضیه فوق برای فضای $W_0^{1,p}(\Omega)$ و هر باز دلخواه Ω و یا $W^{1,p}(\Omega)$ برای نواحی لیپشیتز با مرز کران‌دار به دست آورد.

تذکر۴ ـ ۳۹. از نامساوی موری نتیجه می‌شود که در حالت $n<p$، برای هر عضو $u\in W^{1,p}(\Omega)$ تابع پیوسته‌ای وجود دارد که تقریباً همه جا برابر با u است. بنابراین

مقدار نقطه‌ای اعضای $W^{1,p}(\Omega)$ در این حالت معنا دارد. به عنوان مثال توزیع دیریکله $\delta_{x_\circ}$ روی $W^{1,p}(\Omega)$ تعریف می‌شود. اگر $x_\circ \in \Omega$ و $\delta_{x_\circ}(\phi) = \phi(x_\circ)$، آنگاه برای هر $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$|\delta_{x_\circ}(\phi)| = |\phi(x_\circ)| \leq \|\phi\|_\infty \leq C\|\phi\|_{1,p,\Omega}$$

پس $\delta_{x_\circ}$ روی $\mathcal{D}(\Omega)$ نسبت به نرم $\|\cdot\|_{1,p,\Omega}$ پیوسته است و قابل توسعه به $W_\circ^{1,p}(\Omega)$. البته برای $\Omega = \mathbb{R}^n$ تابعک $\delta_{x_\circ}$ روی $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ پیوسته است و برای نواحی لیپشیتز با مرز کران‌دار به کمک عملگر توسعه روی $W^{1,p}(\Omega)$ نیز پیوسته خواهد بود. درنتیجه برای $n < p$، $\delta_{x_\circ} \in \left(W^{1,p}(\Omega)\right)'$، به خصوص $\delta_{x_\circ} \in W^{-1,q}(\Omega)$ برای $1 \leq q < \dfrac{n}{n-1}$.

جمع‌بندی: اگر $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ناحیه‌ای باشد که عملگر توسعه روی آن وجود داشته باشد، مثلاً لیپشیتز با مرز کران‌دار، آنگاه نشاندنهای زیر پیوسته هستند

(i) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\Omega)$ برای $1 \leq p < n$ و $p \leq q \leq p^*$.

(ii) $W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\Omega)$ برای $n \leq q < \infty$.

(iii) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ و $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{\circ,\mu}(\overline{\Omega})$ برای $n < p \leq \infty$ و $\mu = 1 - \dfrac{n}{p}$.

هم‌چنین نتایج فوق برای هر باز دلخواه $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ و فضاهای $W_\circ^{1,p}(\Omega)$ برقرار است.

قضیه ۴ ـ ۴۰. *فرض کنید $m \geq 1$، $1 \leq p < \infty$ و Ω ناحیه‌ای لیپشیتز با مرز کران‌دار باشد. در این صورت نشاندنهای زیر پیوسته هستند:*

(i) *اگر $mp < n$، آنگاه $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\Omega)$ برای $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n}$.*

(ii) *اگر $mp = n$، آنگاه $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\Omega)$ برای $p \leq q < \infty$.*

(iii) *اگر $mp > n$، آنگاه $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ و $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\mu}(\overline{\Omega})$ برای $k = m - [\frac{n}{p}] - 1$ و*

$$\mu = \begin{cases} m - k - \dfrac{n}{p} & \text{اگر } \dfrac{n}{p} \notin \mathbb{Z} \\ (\circ, 1) \text{ هر عدد دلخواه در } & \text{اگر } \dfrac{n}{p} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

به علاوه نتایج فوق برای هر باز دلخواه Ω و فضای $W_\circ^{m,p}(\Omega)$ نیز صحیح است.

برهان. (i) اگر $u \in W^{m,p}$ و $mp < n$، آنگاه $D^\alpha u \in W^{1,p} \subseteq \mathcal{L}^{p^*}$ برای $|\alpha| \leq m - 1$

که $\frac{۱}{p^*} = \frac{۱}{p} - \frac{۱}{n}$. بنابراین $u \in W^{m-۱,p^*}$ و به صورت استقرایی نشاندن پیوسته $W^{m-۱,p^*} \hookrightarrow \mathcal{L}^q$ را خواهیم داشت که $\frac{۱}{q} = \frac{۱}{p^*} - \frac{m-۱}{n} = \frac{۱}{p} - \frac{m}{n}$. درنتیجه $W^{m,p} \hookrightarrow \mathcal{L}^q$.

(ii) اگر $mp = n$، ابتدا توجه کنید که $W^{۱,p} \hookrightarrow \mathcal{L}^q$ برای $p \leq q \leq p^* = \frac{n}{m-۱}$ و بنابراین $W^{m,p} \subseteq W^{۱,p} \hookrightarrow \mathcal{L}^q$. حال اگر $u \in W^{m,p}$، آنگاه $D^\alpha u \in W^{۱,p} \subseteq \mathcal{L}^{p^*}$، برای $|\alpha| \leq m-۱$ و درنتیجه $u \in W^{m-۱,p^*}$ و به صورت استقرایی نتیجه می‌شود که $W^{m-۱,p^*} \hookrightarrow \mathcal{L}^q$، برای $q \geq p^*$.

(iii) اگر $\ell < \frac{n}{p} < \ell + ۱$ که ℓ عددی صحیح است و $u \in W^{m,p}$، آنگاه $D^\alpha u \in W^{\ell,p}$، برای $|\alpha| \leq m - \ell$ و بنابر قسمت اول قضیه $D^\alpha u \in \mathcal{L}^q$، که $\frac{۱}{q} = \frac{۱}{p} - \frac{\ell}{n}$. در نتیجه $u \in W^{m-\ell,q}$ و $W^{m,p} \hookrightarrow W^{m-\ell,q}$. از طرفی $q = \frac{pn}{n-\ell p} > n$، بنابراین $W^{۱,q} \hookrightarrow C^{۰,\mu}$ که $\mu = ۱ - \frac{n}{q} = ۱ + \ell - \frac{n}{p}$. پس $D^\alpha u \in C^{۰,\mu}$، برای $|\alpha| \leq m - \ell - ۱$، یعنی $u \in C^{m-\ell-۱,\mu}$.

اگر $\ell = \frac{n}{p}$ عدد صحیح باشد، آنگاه به طور مشابه به کمک قسمت دوم قضیه $W^{m,p} \hookrightarrow W^{m-\ell,q}$ برای هر $p \leq q$. از طرفی برای هر $n < q$، $W^{۱,q} \hookrightarrow C^{۰,\mu}$ که $\mu = ۱ - \frac{n}{q}$. بنابراین $W^{m-\ell,q} \hookrightarrow C^{m-\ell-۱,\mu}$ که برای مقادیر مختلف $n < q$، μ می‌تواند هر عدد بین صفر و یک باشد. ■

اثبات قضایای نشاندن در حالت $p = \infty$ درست نیست. زیرا از چگال بودن توابع هموار $C_۰^\infty(\mathbb{R}^n)$ در فضای سوبولف $W^{۱,p}(\mathbb{R}^n)$ استفاده کردیم. ولی با این حال نتیجه حالت $n < p$، همچنان برای $p = \infty$ نیز برقرار است. در قضیه زیر نشان می‌دهیم فضای $W^{۱,\infty}$ همان فضای توابع پیوسته لیپشیتز $C^{۰,۱}$ است.

قضیه ۴ ـ ۴۱. *$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ باز لیپشیتز و کران‌دار است. در این صورت $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ لیپشیتز است اگر و تنها اگر $u \in W^{۱,\infty}(\Omega)$.*

برهان. قضیه را برای $\Omega = \mathbb{R}^n$ وقتی که $u \in W^{۱,\infty}(\Omega)$ تکیه‌گاه فشرده دارد، اثبات می‌کنیم. قرار دهید $u^\varepsilon := J_\varepsilon * u$ که J_ε یک منظم‌ساز همانند آنچه در قضیه ۱ ـ ۲۹ آمده است. در این صورت $u^\varepsilon \to u$ به طور یکنواخت وقتی $\varepsilon \to ۰$ و $||\nabla u^\varepsilon||_\infty \leq ||\nabla u||_\infty$. برای هر دو نقطه $x, y \in \mathbb{R}^n$ خواهیم داشت

$$|u^\varepsilon(x) - u^\varepsilon(y)| = \Big| \int_۰^۱ \frac{d}{dt} u^\varepsilon(tx + (۱-t)y) dt \Big|$$

$$\leq ||\nabla u^\varepsilon||_\infty |x-y| \leq ||\nabla u||_\infty |x-y|$$

وقتی $\varepsilon \to \circ$ نتیجه می‌شود که u یک تابع لیپشیتز است

$$|u(x)-u(y)| \leq ||\nabla u||_\infty |x-y|$$

برعکس اگر u یک تابع لیپشیتز با ضریب L باشد که تکیه‌گاه آن فشرده است، قرار دهید

$$\partial_i^h u(x) = \frac{u(x+he_i)-u(x)}{h}$$

در این صورت $\partial_i^h u \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ و $||\partial_i^h u||_\infty \leq L$، هم‌چنین برای همه مقادیر h یک خانواده کران‌دار در $\mathcal{L}^۲(\mathbb{R}^n)$ است (تکیه‌گاه u فشرده است). بنابراین زیر دنباله $h_k \to \circ$ وجود دارد که $\partial_i^{h_k} u \rightharpoonup v_i$ به طور ضعیف در $\mathcal{L}^۲(\mathbb{R}^n)$. به راحتی می‌توان دید که $v_i \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ (چرا؟). نشان می‌دهیم v_i همان مشتق ضعیف u است و در نتیجه $u \in W^{۱,\infty}(\mathbb{R}^n)$. برای هر $\phi \in C_\circ^\infty(\mathbb{R}^n)$ داریم:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} v_i(x)\phi(x)dx &= \lim_{h_k\to\circ}\int_{\mathbb{R}^n} \partial_i^{h_k} u(x)\phi(x)dx \\
&= \lim_{h_k\to\circ}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+h_ke_i)-u(x)}{h_k}\phi(x)dx \\
&= \lim_{h_k\to\circ}\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\frac{\phi(x-h_ke_i)-\phi(x)}{h_k}dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\partial_i\phi(x)dx
\end{aligned}$$

در حالت کلی وقتی Ω لیپشیتز و کران‌دار باشد، $u \in W^{۱,\infty}(\Omega)$ را با عملگر توسعه به $\mathbb{R}^n$ توسعه می‌دهیم، Eu تکیه‌گاه فشرده دارد (تذکرهای ۴ ـ ۲۵ و ۴ ـ ۲۶) و در نتیجه Eu لیپشیتز است. ■

تذکر ۴ ـ ۴۲. قضیه فوق برای هر باز دلخواه Ω بدین صورت تغییر می‌کند که تابع $u \in W_{loc}^{۱,\infty}(\Omega)$ اگر و تنها اگر به طور موضعی در Ω لیپشیتز باشد.

تعریف ۴ ـ ۴۳.

$$W_{loc}^{m,p}(\Omega) = \left\{u :\ K \Subset \Omega \text{ برای هر زیرمجموعه فشرده } u \in W^{m,p}(K)\right\}$$

و $u_n \to u$ در $W_{loc}^{m,p}(\Omega)$، هرگاه برای هر $K \Subset \Omega$ داشته باشیم $u_n \to u$ در $W^{m,p}(K)$.

قضیه ۴ ـ ۴۴. *فرض کنید $u \in W_{loc}^{۱,p}(\Omega)$ برای $n < p \leq \infty$. در این صورت u تقریباً همه جا در Ω مشتق‌پذیر است و مشتق آن تقریباً همه جا با مشتق ضعیف آن برابر است.*

برهان. ابتدا حالت $n < p < \infty$ را در نظر بگیرید. بنابر رابطه (۴ ـ ۱۰)، برای هر تابع

$C^{۱}$ داریم

$$|v(x)-v(y)| \leq Cr^{۱-\frac{n}{p}}||\nabla v||_{p,B} \qquad (۴\text{ ـ }۱۱)$$

که B گوی به شعاع r شامل نقاط y,x است. این رابطه برای هر تابع $v \in W^{۱,p}$ نیز برای تقریباً همه مقادیر $x,y \in B$ نیز برقرار است. اکنون اگر $u \in W^{۱,p}_{loc}(\Omega)$، آنگاه $\nabla u \in \mathcal{L}^p_{loc}(\Omega)$ که مشتق ضعیف u است. بنابر قضیه مشتق لبگ برای تقریباً همه نقاط $x \in \Omega$

$$\frac{۱}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |\nabla u(x)-\nabla u(z)|^p dz \longrightarrow ۰$$

وقتی $r \to ۰$. برای نقطه ثابت x قرار می‌دهیم

$$v(y) = u(y)-u(x)-\nabla u(x)(y-x)$$

در این صورت $v \in W^{۱,p}_{loc}(\Omega)$ و با جایگذاری در (۴ ـ ۱۱) برای $B = B(x,۲r)$ که $r = |x-y|$

$$|u(y)-u(x)-\nabla u(x)(y-x)| \leq C(۲r)^{۱-\frac{n}{p}}\Big(\int_{B(x,۲r)}|\nabla u(y)-\nabla u(x)|^p dy\Big)^{\frac{۱}{p}}$$

$$\leq \frac{Cr}{|B(x,۲r)|^{\frac{۱}{p}}}\Big(\int_{B(x,۲r)}|\nabla u(y)-\nabla u(x)|^p dy\Big)^{\frac{۱}{p}}$$

پس برای تقریباً هر $x \in \Omega$

$$\lim_{y\to x}\frac{u(y)-u(x)-\nabla u(x)(y-x)}{|y-x|} = ۰$$

یعنی u تقریباً همه جا مشتق‌پذیر است و مشتق آن برابر همان مشتق ضعیف آن $\nabla u(x)$ است.

در حالت $p=\infty$، $W^{۱,\infty}_{loc}(\Omega) \subseteq W^{۱,p}_{loc}(\Omega)$ برای هر $۱ \leq p < \infty$، که به کمک آن اثبات کامل می‌شود. ■

نتیجه۴ ـ ۴۵. (قضیه رادماچر[۳]) اگر تابع $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ به طور موضعی لیپشیتز باشد، تقریباً همه جا مشتق‌پذیر است.

---

[۳] Rademacher

۴–۶ نشاندن‌های فشرده

تعریف ۴ ـ ۴۶. عملگر $T : X \longrightarrow Y$ را فشرده گوییم، هرگاه بستار تصویر گوی واحد X در فضای برداری Y فشرده باشد. این خاصیت معادل است با اینکه هر دنباله کران‌دار $\{x_n\}$ در X، دنباله $\{Tx_n\}$ در Y زیردنباله‌ای همگرا دارد. لذا نشاندن $X \hookrightarrow Y$ فشرده است هرگاه بستار گوی واحد X در فضای Y فشرده باشد.

در این بخش سعی می‌کنیم در ادامه نتایج بخش قبل به این سؤال پاسخ دهیم که آیا آن نشاندنهای فضاهای سوبولف در فضاهای $\mathcal{L}^p$ فشرده هستند؟ در ادامه نشان خواهیم داشت که برای نواحی لیپشیتز و کران‌دار جواب این سؤال مثبت است. مثال زیر نشان می‌دهد که شرط کران‌داری الزامی است.

مثال ۴ ـ ۴. تابع دلخواه $f \in C^1_\circ(\circ, 1)$ را در نظر بگیرید که $\|f\|_{1,p} = 1$. اگر $f_n(x) = f(x-n)$، آنگاه دنباله $\{f_n\}$ در $W^{1,p}(\mathbb{R})$ کران‌دار است ولی هیچ زیردنباله‌ای از $\{f_n\}$ نمی‌تواند در $\mathcal{L}^q$ همگرا باشد، زیرا $\|f_n - f_m\|_q = 2\|f\|_q$.

قضیه ۴ ـ ۴۷. **(رلیش ـ کندراچف[1])** *ناحیه باز $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ لیپشیتز و کران‌دار است. در این صورت نشاندنهای زیر فشرده هستند:*

(i) *برای* $1 \le p < n$، $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\Omega)$ که $1 \le q < p^*$.

(ii) *برای* $p = n$، $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\Omega)$ که $1 \le q < \infty$.

(iii) *برای* $p > n$، $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$.

برهان. (i) <u>حالت $1 \le p < n$:</u>

گام نخست ـ اگر B گوی واحد در $W^{1,p}(\Omega)$ باشد، قرار دهید $B' = \{Eu : u \in B\}$ که E عملگر توسعه برای Ω است. با توجه به نکته ۴ ـ ۲۵، ناحیه کران‌دار Ω' وجود دارد که $\text{Supp}\, Eu \Subset \Omega'$ برای هر $u \in B$. لذا با توجه به پیوستگی E، نتیجه می‌شود که B' در $W^{1,p}(\Omega')$ کران‌دار است. برای سادگی اعضای B' را با همان u نشان می‌دهیم.

گام دوم ـ اکنون برای $u \in B'$، قرار دهید $u^\varepsilon = J_\varepsilon * u$، که J_ε همان منظم‌سازی قضیه ۱ ـ ۲۹ است. می‌توان با بزرگ کردن ناحیه Ω' فرض کرد که برای همه مقادیر ε به اندازه

---

[1] Rellich-Kondrachov

کافی کوچک تکیه‌گاه همه u^εها در Ω' قرار دارد. ابتدا نشان می‌دهیم برای هر ε ثابت خانواده $\{u^\varepsilon\}$ زیردنباله‌ای همگرا دارد. اعضای این خانواده توابع هموار هستند و می‌توان برای این منظور از قضیه آرزلا ــ اسکولی استفاده کرد. برای هر ε ثابت، $\{u^\varepsilon\}$ به طور یکنواخت کران‌دار و هم‌پیوسته است.

$$|u^\varepsilon(x)| \leq \int_{|y-x|\leq\varepsilon} J_\varepsilon(x-y)|u(y)|dy \leq ||J_\varepsilon||_\infty ||u||_{1,\mathbb{R}^n} \leq C\varepsilon^{-n} < \infty$$

توجه کنید که بنابر قضیه ۴ ــ ۳۲، B' در $\mathcal{L}^q(\Omega')$ برای $1 \leq q \leq p^*$ کران‌دار است. (دقت کنید ناحیه Ω' کران‌دار است.)

$$|\nabla u^\varepsilon(x)| \leq \int_{|y-x|\leq\varepsilon} |\nabla J_\varepsilon(x-y)|\,|u(y)|dy \leq ||\nabla J_\varepsilon||_\infty ||u||_{1,\mathbb{R}^n} \leq C\varepsilon^{-n-1}$$

گام سوم ــ نشان می‌دهیم $\lim_{\varepsilon\to 0} ||u^\varepsilon - u||_{q,\Omega'} = 0$ به طور یکنواخت در B'. ابتدا فرض کنید u هموار باشد

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x) - u(x) &= \int_{|y|\leq 1} J(y)\big(u(x-\varepsilon y) - u(x)\big)dy \\ &= \int_{|y|\leq 1} J(y)\int_0^1 \frac{d}{dt}u(x-\varepsilon t y)dtdy \\ &= -\varepsilon\int_{|y|\leq 1} J(y)\int_0^1 \nabla u(x-\varepsilon t y)ydtdy \end{aligned}$$

بنابراین

$$\int_{\Omega'} |u^\varepsilon(x) - u(x)|dx \leq \varepsilon\int_{|y|\leq 1} J(y)\int_0^1\int_{\Omega'} |\nabla u(x-\varepsilon t y)|dxdtdy \leq \varepsilon||\nabla u||_{1,\Omega'}$$

اکنون با تقریب اعضای $W^{1,p}(\Omega')$ به وسیله توابع هموار نتیجه می‌شود که برای هر $u \in W^{1,p}(\Omega')$

$$||u^\varepsilon - u||_{1,\Omega'} \leq \varepsilon||\nabla u||_{1,\Omega'} \leq C\varepsilon||\nabla u||_{p,\Omega'}$$

به وسیله نامساوی درون‌یابی همگرایی را به $\mathcal{L}^q(\Omega')$ تعمیم می‌دهیم. چون $1 \leq q < p^*$،

$$||u^\varepsilon - u||_q \leq ||u^\varepsilon - u||_1^\theta ||u^\varepsilon - u||_{p^*}^{1-\theta}$$

که $\frac{1}{q} = \frac{\theta}{1} + \frac{1-\theta}{p^*}$. از طرفی $||u^\varepsilon||_{p^*} \leq ||J_\varepsilon||_1\,||u||_{p^*} = ||u||_{p^*}$ بنابراین با استفاده از نامساوی گاگلیاردو ــ نیرنبرگ ــ سوبولف، قضیه ۴ ــ ۲۸، نتیجه می‌شود

$$||u^\varepsilon - u||_q \leq C||u^\varepsilon - u||_1^\theta ||u||_{p^*}^{1-\theta} \leq C||u^\varepsilon - u||_1^\theta ||u||_{1,p}^{1-\theta} \leq C\varepsilon^\theta ||\nabla u||_p^\theta\, ||u||_{1,p}^{1-\theta}$$

کران‌داری B' در $W^{1,p}$ نتیجه می‌دهد که $u^\varepsilon \xrightarrow{\mathcal{L}^q} u$ به طور یکنواخت در B'.

گام چهارم ــ اگر $\{u_m\}$ دنباله‌ای در B' باشد، برای هر $\delta > 0$، زیردنباله‌ای وجود دارد که

$$\limsup_{j,k\to\infty} ||u_{m_j} - u_{m_k}||_{q,\Omega'} \le \delta \qquad (۴ـ۱۲)$$

زیرا با توجه به نتیجه گام قبل، ε به اندازه کافی کوچک وجود دارد که برای هر m،

$$||u_m - u_m^\varepsilon||_{q,\Omega'} \le \frac{\delta}{۲}$$

به علاوه از گام دوم نتیجه می‌شود که برای هر ε ثابت، زیردنباله‌ای از $\{u_m^\varepsilon\}$ وجود دارد که

$$\limsup_{j,k\to\infty} ||u_{m_j}^\varepsilon - u_{m_k}^\varepsilon||_{q,\Omega'} = ۰$$

بنابراین (۴ ـ ۱۲) برقرار است.

گام پنجم ـ اگر برای هر دنباله $\{u_m\}$ در B'، برای مقادیر $\delta = ۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \cdots$ نتیجه گام قبل را به کار ببریم، به کمک فرآیند قطری‌سازی زیردنباله‌ای همگرا پیدا خواهد شد، چرا که

$$\limsup_{j,k\to\infty} ||u_{m_j} - u_{m_k}||_{q,\Omega'} = ۰$$

(ii) <u>**حالت** $p = n$:</u>

Ω کران‌دار است، بنابراین $W^{۱,n}(\Omega) \subseteq W^{۱,n-\varepsilon}(\Omega)$ برای هر $\varepsilon > ۰$. برای هر q، اگر ε را کوچک انتخاب کنیم که $q < (n-\varepsilon)^*$، از حالت $p < n$ نتیجه مطلوب به دست می آید.

(iii) <u>**حالت** $p > n$:</u>

بنابر نامساوی موری، گوی واحد $W^{۱,p}(\Omega')$، به طور یکنواخت کران‌دار و هم‌پیوسته است. بنابراین از قضیه آرزلا ـ اسکولی بستار آن در $C(\overline{\Omega})$ فشرده است. ■

نتیجه ۴ ـ ۴۸. اگر ناحیه باز Ω لیپشیتز و کران‌دار باشد، نشاندن $W^{۱,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^p(\Omega)$ برای هر $۱ \le p < \infty$ فشرده است.

نتیجه ۴ ـ ۴۹. برای ناحیه باز لیپشیتز و کران‌دار $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ نشاندنهای زیر فشرده هستند:

(i) برای $mp < n$، $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\Omega)$ که $۱ \le q < \dfrac{np}{n-mp}$.

(ii) برای $mp = n$، $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\Omega)$ که $۱ \le q < \infty$.

(iii) برای $mp > n$، $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$ که $k = [m - \dfrac{n}{p}]$.

تذکر ۴ ـ ۵۰. اگر $W_{\circ}^{m,p}(\Omega)$ جایگزین $W^{m,p}(\Omega)$ شود، نتیجه فوق صحیح است و برای آن شرط لیپشیتز لازم نیست.

برای ذکر اهمیت نشاندنهای فشرده، به عنوان نمونه یکی از کاربردهای آن را در قضیه زیر می آوریم.

قضیه۴ ـ ۵۱. **(نامساوی پوانکاره)** *اگر Ω باز کران‌دار، همبند و لیپشیتز باشد، آنگاه ثابت C وجود دارد که برای هر* $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$||u - \hat{u}||_{p,\Omega} \leq C||\nabla u||_{p,\Omega}$$

که $\hat{u} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x)dx$.

برهان. فرض کنید توابع $u_k \in W^{1,p}(\Omega)$ وجود داشته باشد که

$$||u_k - \hat{u}_k||_p > k||\nabla u_k||_p$$

قرار دهید $v_k = \frac{u_k - \hat{u}_k}{||u_k - \hat{u}_k||_p}$. در این صورت $||v_k||_p = 1$ و $\hat{v}_k = 0$ و $||\nabla v_k||_p < \frac{1}{k}$. پس دنباله $\{v_k\}$ در $W^{1,p}(\Omega)$ کران‌دار است و در نتیجه زیردنباله‌ای همگرا در $\mathcal{L}^p(\Omega)$ دارد. (نتیجه ۴ ـ ۴۸) اگر $v_{k_n} \to v$ در $\mathcal{L}^p(\Omega)$ پس $||v||_p = 1$ و $\hat{v} = 0$، از طرفی $\nabla v_k \xrightarrow{\mathcal{L}^p} 0$ و برای هر $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$0 = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \partial_i v_{k_n}\phi dx = -\lim_{n\to\infty}\int_\Omega v_{k_n}\partial_i\phi dx = -\int_\Omega v\partial_i\phi dx = \int_\Omega \partial_i v\phi dx$$

در نتیجه $\nabla v = 0$ به معنای مشتق ضعیف و بنابراین u یک تابع ثابت است (قضیه ۲ ـ ۴) و چون $\hat{v} = 0$ و Ω همبند است، باید $v = 0$ در Ω که با $||v||_p = 1$ تناقض دارد.

■

تمرین

۱. نشان دهید متمم‌ساز فضای $\mathcal{L}^q(\Omega)$ نسبت به نرم $||\cdot||_{-m,q}$ فضای $W^{-m,q}(\Omega)$ است.

۲. اگر $\{\psi_i\}$ افراز واحد برای یک پوشش باز زیرمجموعه A باشد و اگر $F \subset A$ فشرده باشد، آنگاه تنها تعداد متناهی ψ_i روی F ناصفرند.

۳. **نامساوی پوانکاره:** برای ناحیه کران‌دار $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ و هر $1 \leq p < \infty$، ثابت $C = C(\Omega, p)$ وجود دارد که برای هر $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$||u||_p \leq C||\nabla u||_p$$

فصل ۵

فضاهای سوبولف از مرتبه کسری

۵—۱ فضاهای $H^s(\Omega)$

در این بخش به کمک تبدیل فوریه، تعریف دیگری برای فضاهای $H^m = W^{m,2}$ ارایه می‌کنیم. این تعریف به راحتی قابل تعمیم به فضاهای H^s برای هر مقدار حقیقی دلخواه s است. برای استفاده از تبدیل فوریه با فضای توزیعهای ملایم $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ کار خواهیم کرد. تداخل پیوسته $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ برای درک بهتر مطالب مفید است.

قضیه۵ ـ ۱. *توزیع $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ متعلق به $W^{m,2}(\mathbb{R}^n)$ است اگر و تنها اگر $(1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}}\hat{u} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$. به علاوه مقادیر ثابت c و C وجود دارند که برای هر $u \in W^{m,2}(\mathbb{R}^n)$*

$$c\|u\|_{m,2} \leq \|(1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}}\hat{u}\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{m,2}$$

برهان. اگر $u \in W^{m,2}(\mathbb{R}^n)$، آنگاه $D^\alpha u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ برای هر $|\alpha| \leq m$ و بنابراین $(D^\alpha u)\hat{} = (i\xi)^\alpha \hat{u} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$. اکنون با قرار دادن nـ تایی‌های $(m, 0, \cdots, 0)$، $(0, m, 0, \cdots, 0)$، $\cdots$، $(0, \cdots, 0, m)$ به جای α می‌توان نتیجه گرفت که

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\xi_i|^{2m}|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \big|(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m})\hat{}(\xi)\big|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \big|\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m}(x)\big|^2 dx < \infty$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2m} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} (|\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_n|^2)^m |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \leq C \sum_{i=1}^{n} \|\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m}\|_2^2$$

مقدار ثابت C وجود دارد که $(1 + |\xi|^2)^m \leq C(1 + |\xi|^{2m})$ و به کمک آن نامساوی

$$\begin{aligned} \|(1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}} \hat{u}\|_2^2 &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^{2m}) |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq C(\|u\|_2^2 + \sum_{i=1}^{n} \|\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m}\|_2^2) \leq C \|u\|_{m,2}^2 \end{aligned}$$

برعکس اگر $(1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}} \hat{u} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$، آنگاه

$$\|(i\xi)^\alpha \hat{u}\|_2^2 \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2|\alpha|} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty$$

بنابراین $(D^\alpha u)\hat{} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ به معنای توزیعی و چون تبدیل فوریه یک یکریختی ایزومتری روی $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ است، درنتیجه $D^\alpha u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$. ■

تعریف ۵ ـ ۲. برای هر مقدار حقیقی s، فضای سوبولف مرتبه s را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u}(\xi) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)\}$$

این فضا با ضرب داخلی زیر یک فضای هیلبرت است

$$(u, v)_{H^s} = \left((1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u}, (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{v}\right)_{\mathcal{L}^2}$$

قضیه قبل نشان می‌دهد که برای هر عدد صحیح مثبت $0 \leq s = m$، فضای $H^s(\mathbb{R}^n)$ با تعریف قبلی آن یعنی $W^{m,2}(\mathbb{R}^n)$ یکسان است و نرم القایی از ضرب داخلی فوق که به صورت زیر است با نرم $\|\cdot\|_{m,2}$ هم‌ارز است.

$$\|u\|_{H^s} = \sqrt{(u, u)_{H^s}} = \|(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u}\|_2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

مثال ۵ ـ ۱. اگر δ توزیع دلتای دیراک باشد، $\hat{\delta} = 1$ و بنابراین $\delta \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ اگر و تنها اگر $(1 + |\xi|^2)^{-\frac{s}{2}} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$. و این مطلب برای $s > \frac{n}{2}$ درست است، زیرا انتگرال $\int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(1 + r^2)^s} dr$ تنها برای $s > \frac{n}{2}$ کران‌دار است. در حالت خاص $\delta \in H^{-s}(\mathbb{R})$ برای $s > \frac{1}{2}$.

صحت گزاره‌های زیر را برای فضاهای سوبولف $H^s(\mathbb{R}^n)$ به راحتی می‌توانید بررسی کنید.

✓ $H^\circ(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}^۲(\mathbb{R}^n)$ و $\|u\|_۲ = \|u\|_{H^\circ}$.

✓ تداخل فضاهای $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq H^s(\mathbb{R}^n)$ برای هر $s \in \mathbb{R}$ به طور پیوسته برقرار است. (تبدیل فوریه هر عضو $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$، عضوی از $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ خواهد بود.) هم‌چنین تصویر این نشاندنها چگال است. (زیرا برای $s > \circ$، $H^s(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{L}^۲(\mathbb{R}^n)$ و $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ در $\mathcal{L}^۲(\mathbb{R}^n)$ چگال است. برای $s < \circ$، از گزاره ۵ ـ ۳ استفاده کنید.)

✓ اگر $s \leq t$، آنگاه $H^t(\mathbb{R}^n) \subseteq H^s(\mathbb{R}^n)$ و این نشاندن پیوسته است، یعنی $\|u\|_{H^s} \leq \|u\|_{H^t}$.

✓ $H^s(\mathbb{R}^n)$ برای هر s، فضای هیلبرت جدایی‌پذیر است. (زیرا نگاشت $u \mapsto (۱ + |\xi|^۲)^{\frac{s}{۲}} \hat{u}$ یک یکریختی بین $H^s(\mathbb{R}^n)$ و زیرفضایی از $\mathcal{L}^۲(\mathbb{R}^n)$ ارایه می‌کند.)

گزاره۵ ـ ۳. $\left(H^s(\mathbb{R}^n)\right)' = H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ *برای هر* $s \in \mathbb{R}$.

برهان. اگر $u \in (H^s)'$ یک تابعک خطی پیوسته باشد، با توجه به گزاره‌های بالا یک تابعک خطی پیوسته روی $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ خواهد بود و درنتیجه $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. از طرفی با استفاده از قضیه نمایش ریس تابع $v \in H^s$ به طور منحصر به فرد وجود دارد که برای هر $\phi \in H^s$،

$$\langle u, \phi \rangle = (v, \phi)_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^n} (۱ + |\xi|^۲)^s \overline{\hat{v}(\xi)} \hat{\phi}(\xi)\, d\xi$$

اکنون برای هر تابع آزمون $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ خواهیم داشت:

$$\left\langle (۱ + |\xi|^۲)^{-\frac{s}{۲}} \hat{u}, \phi \right\rangle = \left\langle \hat{u}, (۱ + |\xi|^۲)^{-\frac{s}{۲}} \phi \right\rangle = \left\langle u, \left((۱ + |\xi|^۲)^{-\frac{s}{۲}} \phi\right)\check{} \right\rangle$$

$\left((۱ + |\xi|^۲)^{-\frac{s}{۲}} \phi\right)\check{} \in H^s$، پس

$$= \left(v, \left((۱ + |\xi|^۲)^{-\frac{s}{۲}} \phi\right)\check{}\right)_{H^s}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} (۱ + |\xi|^۲)^s \overline{\hat{v}(\xi)}\, (۱ + |\xi|^۲)^{-\frac{s}{۲}} \phi(\xi)\, d\xi$$

$$= \left((۱ + |\xi|^۲)^{\frac{s}{۲}} \hat{v}(\xi), \phi\right)_{\mathcal{L}^۲} = \left\langle (۱ + |\xi|^۲)^{\frac{s}{۲}} \hat{v}, \phi \right\rangle$$

چون $v \in H^s$، بنابراین $(۱ + |\xi|^۲)^{\frac{s}{۲}} \hat{v}(\xi) \in \mathcal{L}^۲$ و درنتیجه تساوی

$$(۱ + |\xi|^۲)^{-\frac{s}{۲}} \hat{u}(\xi) = (۱ + |\xi|^۲)^{\frac{s}{۲}} \hat{v}(\xi)$$

به معنای توزیعی برقرار است. بنابراین $u \in H^{-s}$، هم‌چنین

$$\|u\|_{H^{-s}} = \|(۱ + |\xi|^۲)^{-\frac{s}{۲}} \hat{u}\|_۲ = \|(۱ + |\xi|^۲)^{\frac{s}{۲}} \hat{v}\|_۲ = \|v\|_{H^s}$$

$$= \sup_{\circ \neq \phi \in H^s} \frac{|(v,\phi)_{H^s}|}{||\phi||_{H^s}} = \sup_{\circ \neq \phi \in H^s} \frac{|\langle u,\phi \rangle|}{||\phi||_{H^s}} = ||u||_{(H^s)'}$$

بنابراین ایزومتری $H^{-s} \longrightarrow (H^s)'$ برقرار است. برای اینکه نشان دهیم این ایزومتری پوشا نیز است، برای هر $u \in H^{-s}$ تنها باید نشان دهیم

$$v = \big((۱ + |\xi|^۲)^{-s}\hat{u}\big)\check{} \in H^s$$

و این رابطه نیز به وضوح برقرار است، زیرا

$$(۱ + |\xi|^۲)^{\frac{s}{۲}}\hat{v} = (۱ + |\xi|^۲)^{-\frac{s}{۲}}\hat{u} \in \mathcal{L}^۲$$

■

نتیجه۵ ـ ۴. $H^{-m}(\mathbb{R}^n) = W^{-m,۲}(\mathbb{R}^n)$

تعمیم تعریف $H^s(\mathbb{R}^n)$ به فضای $H^s(\Omega)$ برای ناحیه‌های باز دلخواه $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$، به صورت فوق امکان‌پذیر نیست، چرا که تبدیل فوریه روی توابع با دامنه $\mathbb{R}^n$ تعریف می‌شود. برای رفع این مشکل فضای $H^s(\Omega)$ را شامل همه توزیعهایی می‌گیریم که یک توسعه در $H^s(\mathbb{R}^n)$ داشته باشد.

$$H^s(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) :\ u = U|_\Omega \text{ برای یک } U \in H^s(\mathbb{R}^n)\}$$

برای تعریف ضرب داخلی روی فضای $H^s(\Omega)$ که مستقل از توسعه‌های اعضای آن به $H^s(\mathbb{R}^n)$ باشد، به طریق زیر عمل می‌کنیم. ابتدا برای زیرمجموعه بسته $F \subseteq \mathbb{R}^n$ فضای

$$H^s_F = \{u \in H^s(\mathbb{R}^n) : \operatorname{Supp} u \subseteq F\}$$

را در نظر بگیرید. H^s_F زیرفضای بسته $H^s(\mathbb{R}^n)$ است و در نتیجه برای ناحیه باز Ω، عملگر تصویر متعامد

$$P : H^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^s_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega}$$

تعریف می‌شود که همچنین دارای خواص زیر است:

$$PU|_\Omega = \circ, \quad (I-P)U|_\Omega = U|_\Omega \qquad U \in H^s(\mathbb{R}^n) \text{ برای هر }$$

توجه کنید که اگر $U|_\Omega = \circ$، آنگاه $U \in H^s_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega}$ و $PU = U$. اکنون به راحتی می‌توان دید که ضرب داخلی زیر روی فضای $H^s(\Omega)$ خوش‌تعریف است.

$$(u,v)_{H^s(\Omega)} = \big((I-P)U, (I-P)V\big)_{H^s(\mathbb{R}^n)}$$

که $u = U|_\Omega$ و $v = V|_\Omega$ برای $U, V \in H^s(\mathbb{R}^n)$. نرم القایی از این ضرب داخلی بدین صورت است

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = \sqrt{(u,u)_{H^s(\Omega)}} = \|(I-P)U\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$$

که $u = U|_\Omega$. در این صورت خواهیم داشت

$$\|U\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \|PU\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} + \|(I-P)U\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)}$$

$$\geq \|(I-P)U\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \|u\|^2_{H^s(\Omega)}$$

و چون $(I-P)U|_\Omega = U|_\Omega = u$، می‌توان نوشت

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = \min_{\substack{U|_\Omega = u \\ U\in H^s(\mathbb{R}^n)}} \|U\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \tag{۵ ـ ۱}$$

هم‌چنین نگاشت $U \longmapsto (I-P)U|_\Omega$ یک ایزومتری از مکمل عمودی $H^s_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega}$ به $H^s(\Omega)$ ارایه می‌کند. بنابراین $H^s(\Omega)$ یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر است.

تذکر۵ ـ ۵. عملگر $U \longmapsto (I-P)U|_\Omega$ یک نگاشت پیوسته از $H^s(\mathbb{R}^n)$ به $H^s(\Omega)$ تعریف می‌کند و بنابراین فضای

$$C^\infty(\overline{\Omega}) = \{u:\ U \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \text{ برای یک } u = U|_\Omega\}$$

در $H^s(\Omega)$ چگال است، زیرا $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ در $H^s(\mathbb{R}^n)$ چگال است.

تعریف۵ ـ ۶. $\widetilde{H}^s(\Omega) =$ بستار $\mathcal{D}(\Omega)$ در $H^s(\mathbb{R}^n)$

$H^s_\circ(\Omega) =$ بستار $\mathcal{D}(\Omega)$ در $H^s(\Omega)$

از این تعریف واضح است که

$$\widetilde{H}^s(\Omega) \subseteq H^s_{\overline{\Omega}} \qquad \widetilde{H}^s(\Omega) \subseteq H^s_\circ(\Omega)$$

اثبات قضیه ۴ ـ ۱۵ را می‌توان برای $u \in H^s_{\overline{\Omega}}$ تکرار کرد و گزاره زیر را نتیجه گرفت. در این راستا تمرین ۱ مفید است.

گزاره۵ ـ ۷. *اگر ناحیه Ω دارای خاصیت برشی باشد، آنگاه $\mathcal{D}(\Omega)$ برای هر $s \in \mathbb{R}$ در $H^s_{\overline{\Omega}}$ چگال است و در نتیجه $\widetilde{H}^s(\Omega) = H^s_{\overline{\Omega}}$.*

قضیه۵ ـ ۸. *اگر ناحیه Ω دارای خاصیت برشی بوده و زوج $\langle\cdot,\cdot\rangle$ اثر دوگانی $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ روی فضای $H^s(\mathbb{R}^n)$ باشد، آنگاه برای هر $s \in \mathbb{R}$*

(i) نگاشت طبیعی $\iota: \widetilde{H}^{-s}(\Omega) \longrightarrow (H^s(\Omega))'$ با ضابطه زیر یک ایزومتری تعریف می‌کند.

$$\iota u(v) := \langle u, V\rangle, \qquad \text{برای هر } u \in \widetilde{H}^{-s}(\Omega) \text{ و } v = V|_\Omega \text{ که } V \in H^s(\mathbb{R}^n)$$

(ii) *نگاشت طبیعی* $\iota^* : H^{-s}(\Omega) \longrightarrow \left(\widetilde{H}^s(\Omega)\right)'$ *با ضابطه زیر یک ایزومتری تعریف می‌کند.*

$$\iota^* u(v) := \langle U, v\rangle, \qquad \text{برای هر } u = U|_\Omega \text{ که } U \in H^{-s}(\mathbb{R}^n) \text{ و } v \in \widetilde{H}^s(\Omega)$$

برهان. ابتدا توجه کنید که اگر $V|_\Omega = 0$، آنگاه برای هر $u \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle u, V\rangle = 0$$

بنابراین برای $u \in \widetilde{H}^{-s}(\Omega)$، تابعک $\iota u \in \left(H^s(\Omega)\right)'$ خوش‌تعریف است. به علاوه

$$|\iota u(v)| = |\langle u, V\rangle| \le ||u||_{H^{-s}(\mathbb{R}^n)} ||V||_{H^s(\mathbb{R}^n)}$$

V را می‌توان به گونه‌ای انتخاب کرد که $||v||_{H^s(\Omega)} = ||V||_{H^s(\mathbb{R}^n)}$، پس

$$|\iota u(v)| \le ||u||_{\widetilde{H}^{-s}(\Omega)} ||v||_{H^s(\Omega)}$$

و در نتیجه $||\iota u||_{(H^s(\Omega))'} \le ||u||_{\widetilde{H}^{-s}(\Omega)}$. اکنون $\ell \in \left(H^s(\Omega)\right)'$ را در نظر بگیرید. نگاشت $V \mapsto \ell(V|_\Omega)$ کران‌دار است، زیرا

$$|\ell(V|_\Omega)| \le ||\ell||_{(H^s(\Omega))'} ||V|_\Omega||_{H^s(\Omega)} \le ||\ell||_{(H^s(\Omega))'} ||V||_{H^s(\mathbb{R}^n)}$$

بنابراین $V \mapsto \ell(V|_\Omega)$ متعلق به $\left(H^s(\mathbb{R}^n)\right)' = H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ است و باید $u \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ وجود داشته باشد که

$$\ell(V|_\Omega) = \langle u, V\rangle \qquad \text{برای هر } V \in H^s(\mathbb{R}^n)$$

و

$$||u||_{H^{-s}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{0 \ne V \in H^s(\mathbb{R}^n)} \frac{|\ell(V|_\Omega)|}{||V||_{H^s(\mathbb{R}^n)}}$$

اگر $V \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$، آنگاه $V|_\Omega = 0$ و بنابراین $\langle u, V\rangle = \ell(V|_\Omega) = 0$. این مطلب نشان می‌دهد که $\operatorname{Supp} u \subseteq \overline{\Omega}$ و در نتیجه $u \in H^{-s}_{\overline{\Omega}}$. بنابر گزاره قبل $u \in \widetilde{H}^{-s}(\Omega)$ و

$$\ell(v) = \ell(V|_\Omega) = \langle u, V\rangle = \iota u(v)$$

یعنی $\ell = \iota u$ و ι پوشا است. از طرف دیگر

$$|\ell(V|_\Omega)| \le ||\ell||_{(H^s(\Omega))'} ||V|_\Omega||_{H^s(\Omega)} \le ||\iota u||_{(H^s(\Omega))'} ||V||_{H^s(\mathbb{R}^n)}$$

که نتیجه می‌دهد $||u||_{\widetilde{H}^{-s}(\Omega)} = ||u||_{H^{-s}(\mathbb{R}^n)} \le ||\iota u||_{(H^s(\Omega))'}$ و بنابراین ι ایزومتری است.

قسمت (ii) به علت خاصیت بازتابی فضاهای هیلبرت از قسمت (i) نتیجه می‌شود. ∎

گزاره۵ ـ ۹. *اگر ناحیه Ω لیپشیتز با مرز کران‌دار باشد، برای هر عدد صحیح و مثبت $0 \leq m$، $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ و $H^m_0(\Omega) = W^{m,2}_0(\Omega)$ و نرمهای آنها هم‌ارز هستند.*

برهان. اگر $u \in H^m(\Omega)$، آنگاه $U \in H^m(\mathbb{R}^n)$ وجود دارد که $U|_\Omega = u$ و $= ||u||_{H^m(\Omega)}$ $||U||_{H^m(\mathbb{R}^n)}$. با توجه به قضیه ۵ ـ ۱، $U \in W^{m,2}(\mathbb{R}^n)$ و $\leq ||U||_{W^{m,2}(\mathbb{R}^n)}$ $C||U||_{H^m(\mathbb{R}^n)}$، بنابراین $u = U|_\Omega \in W^{m,2}(\Omega)$ و

$$||u||_{m,2,\Omega} = ||U|_\Omega||_{m,2,\Omega} \leq ||U||_{m,2,\mathbb{R}^n} \leq C||U||_{H^m(\mathbb{R}^n)} = C||u||_{H^m(\Omega)}$$

رابطه دوم از اثبات بالا و تعریف فضاها نتیجه خواهد شد.

برعکس اگر $u \in W^{m,2}(\Omega)$، به کمک عملگر توسعه $Eu \in W^{m,2}(\mathbb{R}^n) = H^m(\mathbb{R}^n)$ را در نظر بگیرید. بنابراین $u = Eu|_\Omega \in H^m(\Omega)$ و با توجه به (۵ ـ ۱) و پیوستگی عملگر توسعه خواهیم داشت

$$||u||_{H^m(\Omega)} \leq ||Eu||_{H^m(\mathbb{R}^n)} \leq C||Eu||_{m,2,\mathbb{R}^n} \leq C||u||_{m,2,\Omega}$$ ■

گزاره۵ ـ ۱۰. *برای عدد صحیح و مثبت $0 \leq m$، $H^{-m}(\Omega) = W^{-m,2}(\Omega)$ و نرمهای آنها هم‌ارز هستند.*

برهان. برای $\Omega = \mathbb{R}^n$، همان نتیجه ۵ ـ ۴ است. برای باز دلخواه Ω، اگر $u \in H^{-m}(\Omega)$ آنگاه $U \in H^{-m}(\mathbb{R}^n) = W^{-m,2}(\mathbb{R}^n)$ وجود دارد که $u = U|_\Omega$ و $||u||_{H^{-m}(\Omega)} = ||U||_{H^{-m}(\mathbb{R}^n)}$. در این صورت با توجه به خاصیت اعضای $W^{-m,2}(\mathbb{R}^n)$ که در قضیه ۴ ـ ۵ بیان شد، توابع $F_\alpha \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ وجود دارند که

$$U = \sum_{|\alpha|\leq m} D^\alpha F_\alpha, \qquad ||U||^2_{-m,2,\mathbb{R}^n} = \sum_{|\alpha|\leq m} ||F_\alpha||^2_2$$

قرار دهید $f_\alpha = F_\alpha|_\Omega$، در این صورت بنابر همان قضیه ۴ ـ ۵، $u = \sum_{|\alpha|\leq m} D^\alpha f_\alpha \in W^{-m,2}(\Omega)$ و

$$||u||^2_{-m,2,\Omega} \leq \sum_{|\alpha|\leq m} ||f_\alpha||^2_2 \leq \sum_{|\alpha|\leq m} ||F_\alpha||^2_2 = ||U||^2_{-m,2,\mathbb{R}^n}$$
$$\leq C||U||^2_{H^{-m}(\mathbb{R}^n)} = C||u||^2_{H^{-m}(\Omega)}$$

برعکس اگر $u \in W^{-m,2}(\Omega)$، در این صورت $u = \sum_{|\alpha|\leq m} D^\alpha f_\alpha$ که $f_\alpha \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ و $||u||^2_{-m,2,\Omega} = \sum_{|\alpha|\leq m} ||f_\alpha||^2_2$. توسعه f_α با صفر در خارج Ω را در نظر بگیرید و آن را با $F_\alpha \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ نشان دهید. اکنون قرار دهید $U = \sum_{|\alpha|\leq m} D^\alpha F_\alpha$، در فضای توزیعهای $\mathcal{D}'(\Omega)$ تساوی $(D^\alpha F_\alpha)|_\Omega = D^\alpha f_\alpha$ برقرار است. پس $U|_\Omega = u$ و در نتیجه

$U \in W^{-m,2}(\mathbb{R}^n) = H^{-m}(\mathbb{R}^n)$ به علاوه $u \in H^{-m}(\Omega)$،

$$\begin{aligned}||u||^2_{H^{-m}(\Omega)} \leq ||U||^2_{H^{-m}(\mathbb{R}^n)} \leq C||U||^2_{-m,2,\mathbb{R}^n}\\ \leq C\sum_{|\alpha|\leq m}||F_\alpha||^2_2 = C\sum_{|\alpha|\leq m}||f_\alpha||^2_2 = ||u||^2_{-m,2,\Omega}\end{aligned}$$

■

۲–۵ فضاهای $W^{s,p}(\Omega)$

برای تعریف این فضا از شبه نرم زیر استفاده می‌کنیم. اگر $0 < \mu < 1$، برای $1 \leq p < \infty$

$$|u|_{\mu,p,\Omega} = \Big(\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+p\mu}}dxdy\Big)^{\frac{1}{p}} = \Big\|\frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{\frac{n}{p}+\mu}}\Big\|_{\mathcal{L}^p(\Omega\times\Omega)}$$

و برای $p=\infty$، همان شبه نرم فضای هولدر را در نظر می‌گیریم، یعنی

$$|u|_{\mu,\infty,\Omega} = [u]_{C^{0,\mu}(\Omega)}$$

برای $s = m+\mu$ که $0 < \mu < 1$، فضای سوبولف کسری مرتبه s را بدین ترتیب تعریف می‌کنیم:

$$W^{s,p}(\Omega) = \Big\{u \in W^{m,p}(\Omega) :\ |\alpha| = m \text{ برای } |D^\alpha u|_{\mu,p,\Omega} < \infty\Big\}$$

و نرم این فضا عبارت است از

$$||u||_{s,p,\Omega} = \Big(||u||^p_{m,p,\Omega} + \sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u|^p_{\mu,p,\Omega}\Big)^{\frac{1}{p}}$$

با این نرم $W^{s,p}(\Omega)$ یک فضای باناخ است. (تمرین ۳) برای $p=2$ این فضا با ضرب داخلی زیر یک فضای هیلبرت است.

$$(u,v)_s = (u,v)_m + \sum_{|\alpha|=m}\int_\Omega\int_\Omega \frac{\overline{[D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)]}[D^\alpha v(x) - D^\alpha v(y)]}{|x-y|^{n+2\mu}}dxdy$$

به طور مشابه فضای $W^{s,p}_0(\Omega)$ بستار $C^\infty_0(\Omega)$ در $W^{s,p}(\Omega)$ تعریف می‌شود و هم‌چنین فضاهای از مرتبه منفی به شکل $W^{-s,q}(\Omega) = \big(W^{s,p}_0(\Omega)\big)'$ تعریف می‌شود. تساوی $W^{s,p}(\mathbb{R}^n) = W^{s,p}_0(\mathbb{R}^n)$ به عنوان نتیجه قضایای تقریب برای هر $s \geq 0$ برقرار است.

قضایای تقریب به وسیله توابع هموار مانند قضیه مِیِر ـ سِرین ۴ ـ ۱۳ و قضیه ۴ ـ ۱۵ به طور مشابه برای فضاهای سوبولف کسری $W^{s,p}(\Omega)$ برقرار است. هم‌چنین عملگر توسعه $E : W^{s,p}(\Omega) \longrightarrow W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ وقتی Ω یک ناحیه لیپشیتز با مرز کران‌دار باشد، وجود دارد و پیوسته است. قضیه تغییر متغیر با کمی اختلاف به صورت زیر برقرار است.

قضیه۵ ـ ۱۱. *اگر نگاشت $\Phi : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$، m ـ هموار باشد که $D^\alpha \Phi$ و $D^\alpha \Phi^{-1}$ برای $|\alpha| = m$ لیپشیتز باشند، آنگاه $A : W^{s,p}(\Omega_1) \longrightarrow W^{s,p}(\Omega_2)$ با ضابطه $(Au)(y) = u(\Phi^{-1}(y))$ برای $-m \leq s \leq m+1$ پیوسته و دارای وارون پیوسته است.*

فضاهای کسری $H^s(\Omega)$ و $W^{s,2}(\Omega)$ در اکثر حالات با هم برابر هستند. در ادامه این بخش این مطلب را بررسی می‌کنیم.

قضیه۵ ـ ۱۲. *برای $s \geq 0$، تساوی $W^{s,2}(\mathbb{R}^n) = H^s(\mathbb{R}^n)$ برقرار است و نرمهای هر دو فضا هم‌ارز هستند.*

برهان. برای اعداد صحیح $s = m$ این مطلب در قضیه ۵ ـ ۱ نشان داده شد. برای $s = m + \mu$ که $0 < \mu < 1$، تابع دلخواه u را در نظر بگیرید و قرار دهید

$$\delta_h u(x) = u(x+h) - u(x)$$

اگر از دو طرف تساوی تبدیل فوریه بگیریم:

$$\mathcal{F}(\delta_h u) = (e^{2\pi i h\cdot\xi} - 1)\hat{u}(\xi)$$

با جایگزینی $h = y - x$ در تعریف شبه نرم $|\cdot|_{\mu,2}$ و با توجه به اینکه تبدیل فوریه نرم $\mathcal{L}^2$ را حفظ می‌کند،

$$\begin{aligned}
|u|^2_{\mu,2,\mathbb{R}^n} &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x+h)-u(x)|^2}{|h|^{n+2\mu}} dx dh \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{||\delta_h u||_2^2}{|h|^{n+2\mu}} dh = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{||\mathcal{F}(\delta_h u)||_2^2}{|h|^{n+2\mu}} dh \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|e^{2\pi i h\cdot\xi} - 1|^2 |\hat{u}(\xi)|^2}{|h|^{n+2\mu}} dh d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} a_\mu(\xi) |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi
\end{aligned}$$

اکنون $a_\mu(\xi)$ را محاسبه می‌کنیم. برای این منظور انتگرال نسبت به h را در مختصات قطبی می‌نویسیم، $h = \rho w$ که $\rho = |h|$ و $w = \dfrac{h}{|h|}$. با توجه به رابطه $dh = \rho^{n-1} d\rho dw$

$$a_\mu(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|e^{2\pi i h\cdot\xi} - 1|^2}{|h|^{n+2\mu}} dh = \int_{\rho>0}\int_{|w|=1} |e^{2\pi i \rho w\cdot\xi} - 1|^2 \rho^{-1-2\mu} dw d\rho$$

اگر تغییر متغیر $\rho = |\xi|^{-1}t$ نیز اعمال شود، خواهیم داشت

$$a_\mu(\xi) = |\xi|^{2\mu} \int_{t>0} \int_{|w|=1} |e^{2\pi i t w \cdot \frac{\xi}{|\xi|}} - 1|^2 t^{-1-2\mu} dw dt$$

به کمک تغییر متغیرهای به دست‌آمده از تبدیلات متعامد روی w می‌توان دید که مقدار انتگرال فوق مستقل از ξ است، و می‌توان به جای آن بردار e_1 را قرار داد.

$$a_\mu(\xi) = |\xi|^{2\mu} \int_{t>0} \int_{|w|=1} |e^{2\pi i t w_1} - 1|^2 t^{-1-2\mu} dw dt$$

$$= |\xi|^{2\mu} \int_{t>0} \int_{|w|=1} 4 t^{-1-2\mu} \sin^2(\pi t w_1) dw dt$$

w_1 مؤلفه اول بردار w است. مقدار انتگرال $\int_{|w|=1} \sin^2(\pi t w_1) dw$ وقتی $t \to 0$ از مرتبه $O(t^2)$ است و وقتی $t \to \infty$ از مرتبه $O(1)$، یعنی کران‌دار است. بنابراین برای $1 > \mu > 0$ مقدار انتگرال فوق کران‌دار است و می‌توان $a_\mu(\xi) = a_\mu |\xi|^{2\mu}$ در نظر گرفت که $a_\mu > 0$ عددی ثابت است.

حال اگر $u \in W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$،

$$||u||^2_{s,2,\mathbb{R}^n} = ||u||^2_{m,2,\mathbb{R}^n} + \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2_{\mu,2,\mathbb{R}^n}$$

$$= ||u||^2_{m,2,\mathbb{R}^n} + \sum_{|\alpha|=m} \int_{\mathbb{R}^n} a_\mu |\xi|^{2\mu} |(i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

با توجه به هم ارزی نرمها برای حالت $s = m$، قضیه ۵ ـ ۱،

$$\leq C||u||^2_{H^m(\mathbb{R}^n)} + \sum_{|\alpha|=m} \int_{\mathbb{R}^n} a_\mu |\xi|^{2m+2\mu} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

$$\leq C \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{m+\mu} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi = C||u||^2_{H^s(\mathbb{R}^n)}$$

برعکس رابطه $||u||_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq C||u||_{s,2,\mathbb{R}^n}$ برای هر $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ برقرار است. اگر مقدار ثابت $C = C(n, m, \mu)$ وجود داشته باشد که برای هر $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$(1 + |\xi|^2)^{m+\mu} \leq C\big[(1 + |\xi|^2)^m + \sum_{|\alpha|=m} |\xi|^{2\mu} |\xi^\alpha|^2\big]$$

و این نامساوی برقرار است:

$$\begin{aligned}
(1 + |\xi|^2)^{m+\mu} &\leq C\big[(1 + |\xi|^2)^m + |\xi|^{2(m+\mu)}\big] \\
&\leq C\big[(1 + |\xi|^2)^m + |\xi|^{2\mu} (\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2)^m\big] \\
&\leq C\big[(1 + |\xi|^2)^m + |\xi|^{2\mu} \sum_{|\alpha|=m} |\xi^\alpha|^2\big]
\end{aligned}$$

■

نتیجه۵ ـ ۱۳. $W^{-s,2}(\mathbb{R}^n) = H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.

قضیه۵ ـ ۱۴. *برای هر ناحیه لیپشیتز Ω با مرز کران‌دار و هر عدد حقیقی $s \leq 0$، $H^s(\Omega) = W^{s,2}(\Omega)$ و نرمهای هر دو فضا هم‌ارز هستند.*

برهان. اگر $u \in H^s(\Omega)$، می‌توان $U \in H^s(\mathbb{R}^n)$ را پیدا کرد به طوری که $u = U|_\Omega$ و $\|u\|_{H^s(\Omega)} = \|U\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$. بنابر قضیه قبل $U \in W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$، بنابراین $u = U|_\Omega \in W^{s,2}(\Omega)$ و

$$\|u\|_{W^{s,2}(\Omega)} \leq \|U\|_{W^{s,2}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|U\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = C\|u\|_{H^s(\Omega)}$$

برعکس اگر $u \in W^{s,2}(\Omega)$، به کمک عملگر توسعه $Eu \in W^{s,2}(\mathbb{R}^n) = H^s(\mathbb{R}^n)$ و در نتیجه $u = Eu|_\Omega \in H^s(\Omega)$. با توجه به (۵ ـ ۱) و پیوستگی عملگر توسعه خواهیم داشت:

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} \leq \|Eu\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq C\|Eu\|_{W^{s,2}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{s,2}(\Omega)}$$

■

نتیجه۵ ـ ۱۵. برای هر ناحیه لیپشیتز Ω با مرز کران‌دار و هر عدد حقیقی $s \leq 0$، $H^s_0(\Omega) = W^{s,2}_0(\Omega)$.

برای بررسی تساوی دو فضای کسری $W^{-s,2}(\Omega) = H^{-s}(\Omega)$ از مرتبه‌های منفی، این مطلب را در فضاهای دوگان تحقیق می‌کنیم. با توجه به قضیه ۵ ـ ۸ و نتیجه ۵ ـ ۱۵ تنها باید تساوی $\widetilde{H}^s(\Omega) = H^s_0(\Omega)$ را جستجو کرد. این مطلب در قضیه زیر نشان داده می‌شود.

قضیه۵ ـ ۱۶. *برای نواحی لیپشیتز Ω با مرز کران‌دار تساوی فضاهای $\widetilde{H}^s(\Omega) = H^s_0(\Omega)$ برای هر $s \notin \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \cdots\}$ برقرار است.*

برهان. قبلاً اشاره شد که $\widetilde{H}^s(\Omega) \subseteq H^s_0(\Omega)$، با توجه به تعریف فضاها تنها کافی است برای هر $u \in C^\infty_0(\Omega)$ ثابت کنیم $\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{H^s(\Omega)}$. اگر $s = m + \mu$ که $\mu \neq \frac{1}{2}$ با استفاده از هم‌ارزی نرمها در قضیه ۵ ـ ۱۲، خواهیم داشت:

$$\|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} \sim \|u\|^2_{s,2,\mathbb{R}^n} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^2_{2,\mathbb{R}^n} + \sum_{|\alpha|=m} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\mu}} dxdy$$

$$= \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^2_{2,\Omega} + \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega\int_\Omega \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\mu}} dxdy$$

$$+\sum_{|\alpha|=m}\int_{\Omega}\int_{\mathbb{R}^n-\Omega}\frac{|D^\alpha u(x)|^۲}{|x-y|^{n+۲\mu}}dxdy+\sum_{|\alpha|=m}\int_{\mathbb{R}^n-\Omega}\int_{\Omega}\frac{|D^\alpha u(y)|^۲}{|x-y|^{n+۲\mu}}dxdy$$

$$=||u||^۲_{s,۲,\Omega}+۲\sum_{|\alpha|=m}\int_{\Omega}|D^\alpha u(x)|^۲ w_\mu(x)dx$$

که $w_\mu(x)=\int_{\mathbb{R}^n-\Omega}\frac{dy}{|x-y|^{n+۲\mu}}$. با استفاده از مختصات قطبی می‌توان به نامساوی زیر برای هر $x\in\Omega$ رسید.

$$w_\mu(x)\leq C\,dist(x,\Gamma)^{-۲\mu}$$

اکنون به کمک لم بعد اثبات کامل می‌شود.

$$\sum_{|\alpha|=m}\int_{\Omega}|D^\alpha u(x)|^۲ w_\mu(x)dx\leq\sum_{|\alpha|=m}||D^\alpha u||^۲_{H^\mu(\Omega)}\leq C\sum_{|\alpha|=m}||D^\alpha u||^۲_{\mu,۲,\Omega}$$

$$\leq C||u||^۲_{s,۲,\Omega}\leq C||u||^۲_{H^s(\Omega)}$$

■

لم ۵ ـ ۱۷. اگر Ω لیپشیتز با مرز کران‌دار باشد و $u\in C^\infty(\overline{\Omega})$ آنگاه برای $۰<s<\frac{۱}{۲}$

$$\int_{\Omega}dist(x,\Gamma)^{-۲s}|u(x)|^۲dx\leq C||u||^۲_{H^s(\Omega)}$$

به‌علاوه اگر $u=۰$ روی $\partial\Omega$، آنگاه این نامساوی برای $\frac{۱}{۲}<s<۱$ نیز برقرار است.

تمرین

۱. فرض کنید که برای عدد صحیح $m\geq ۱$، $\phi\in C^m_۰(\mathbb{R}^n)$ و $u\in H^s(\Omega)$ که $|s|\leq m$، نشان دهید $\phi u\in H^s(\Omega)$ و $||\phi u||_{H^s(\Omega)}\leq C||\phi||_{m,\infty,\mathbb{R}^n}||u||_{H^s(\Omega)}$.
هم‌چنین گزاره مشابهی برای $H^s_{\overline{\Omega}}$ و $\widetilde{H}^s(\Omega)$ به جای $H^s(\Omega)$ ثابت کنید.

۲. گزاره ۵ ـ ۷ را اثبات کنید.

۳. نشان دهید فضای $W^{s,p}(\Omega)$ با نرم تعریف شده، فضای باناخ است.

فصل ۶

فضاهای سوبولف روی رویه‌ها

در این بخش ابتدا به توسعه تعریف فضای سوبولف روی رویه‌ها پرداخته، سپس به تعریف عملگر اثر که تحدید یک توزیع به مرز یک ناحیه است، خواهیم پرداخت.

تعریف۶ ـ ۱. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ناحیه باز $C^{k,\mu}$ گفته می‌شود، هرگاه خانواده بازهای $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ در $\mathbb{R}^n$ وجود داشته باشند که $\partial\Omega \subset \bigcup U_\alpha$ و برای هر باز U_α نگاشت $C^{k,\mu}$ و وارون‌پذیر $\phi_\alpha : B(\circ,\textup{۱}) \longrightarrow U_\alpha$ پیدا شود که $\phi_\alpha^{-\textup{۱}}(U_\alpha \cap \Omega) \subset \mathbb{R}^n_+$. منظور از $B(\circ,\textup{۱})$ گوی واحد در $\mathbb{R}^n$ است. اگر Γ مرز یک ناحیه باز $C^{k,\mu}$ باشد، آن را یک رویه ۱ $- n$ بعدی $C^{k,\mu}$ می‌گویند و خانواده $\{(U_\alpha,\phi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ یک نقشه برای آن نامیده می‌شود. نواحی $C^{\circ,\textup{۱}}$ به نواحی لیپشیتز معروف هستند.

اگر $\{\theta_i\}_i$ افراز واحد نقشه $\{(U_\alpha,\phi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ باشد، تابع $u \in L^p(\Gamma)$ عضو فضای سوبولف $W^{s,p}_{loc}(\Gamma)$ است اگر و تنها اگر برای هر i، $w_i(x) = (\theta_i u)(\phi_i(x)) \in W^{s,p}(\mathbb{R}^{n-\textup{۱}})$. برای هر زیر مجموعه فشرده $K \subseteq \Gamma$ تنها تعداد متناهی تابع θ_i از افراز واحد وجود دارند که روی K ناصفر هستند، درنتیجه مجموع زیر متناهی است و می‌توان آن را به عنوان نرم u روی K در نظر گرفت:

$$||u||_{W^{s,p}(K)} := (\sum_i ||w_i||^p_{s,p,\mathbb{R}^{n-\textup{۱}}})^{\textup{۱}/p}$$

علت استفاده از فضای $W^{s,p}_{loc}(\Gamma)$ به جای $W^{s,p}(\Gamma)$ همین مطلب است که ممکن است سری بالا همگرا نباشد. در حالتی که مرز ناحیه Ω، کران‌دار باشد، می‌توان تنها با تعداد متناهی نقشه آن را پوشاند، لذا تعریف فضای $W^{s,p}(\Gamma)$ بدون ابهام است و نرم این فضا با عبارت بالا تعریف می‌شود. نکته قابل توجه عدم وابستگی تعریف فضای $W^{s,p}_{loc}(\Gamma)$ و

نرم آن به نقشه $\{(U_\alpha,\phi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ و افراز واحد $\{\theta_i\}_i$ است. با استفاده از قضیه تغییر متغیر می‌توان دید که فضای سوبولف $W^{s,p}_{loc}(\Gamma)$ برای هر $|s| < k+1$ با تغییر نقشه عوض نمی‌شود و نرم جدید هم‌ارز نرم قبلی است.

در بسیاری از مسایل که با مقادیر مرزی سر و کار داریم، احتیاج است که تحدید یک تابع $u \in H^s(\Omega)$ را روی مرز Γ بدانیم. وقتی u یک تابع هموار در $\overline{\Omega}$ باشد، این امر به راحتی امکان‌پذیر است. ولی زمانی که تنها بدانیم $u \in H^s(\Omega)$، تحدید آن را چگونه می‌توان تعریف کرد؟ و تحدید به دست آمده در کدام یک از فضاهای سوبولف روی Γ قرار می‌گیرد.

لم۶ ـ ۲. عملگر $\gamma_j : C^\infty_\circ(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C^\infty_\circ(\mathbb{R}^{n-1})$ با ضابطه

$$\gamma_j u(x') = \partial_n^j u(x',\circ), \qquad x' \in \mathbb{R}^{n-1}$$

برای $s > j + \frac{1}{2}$ به صورت منحصر به فرد به عملگر خطی پیوسته $\gamma_j : H^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{s-j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ توسعه می‌یابد.

برهان.

■

عملگری که در لم بالا تعریف می‌شود، اثر[1] نامیده می‌شود. در گزاره زیر نشان داده می‌شود که این عملگر دارای وارون راست است. در حقیقت وجود این وارون تضمین می‌کند که برای هر تابع $u \in H^{s-j-1/2}(\Gamma)$ توسعه‌ای (نه لزوماً یکتا) از آن در داخل ناحیه Ω مانند $\eta_j u \in H^s(\Omega)$ وجود دارد که $\gamma_j\eta_j u = u$.

گزاره۶ ـ ۳. *برای هر $j \geq \circ$، عملگر خطی $\eta_j : \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ وجود دارد که*

$$D^\alpha(\eta_j u)(x',\circ) = \begin{cases} D^{\alpha'}u(x') & \alpha_n = j \\ \circ & \alpha_n \neq j \end{cases}$$

برای $x' \in \mathbb{R}^n$ و $\alpha = (\alpha',\alpha_n)$. این عملگر دارای یک توسعه یکتا به عملگر خطی و پیوسته $\eta_j : H^{s-j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}) \longrightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$ است.

قضیه۶ ـ ۴. *عملگر خطی $\gamma_j : C^\infty(\overline{\Omega}) \longrightarrow C^\infty(\Gamma)$ با ضابطه زیر را در نظر بگیرید:*

$$\gamma_\circ u = u\,|_\Gamma$$

---

[1] trace

$$\gamma_j u = \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}|_\Gamma, \qquad j > 0$$

که $\frac{\partial}{\partial \nu} = \sum_l \nu_l \frac{\partial}{\partial x_l}$ و $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_n)$ *بردار عمودی برون‌گرای مرز* Γ *است. اگر* Ω *کران‌دار و* $C^{k-1,1}$ *باشد و* $\frac{1}{2} < s \leq k$*، آنگاه* γ_j *توسعه یکتا به عملگر خطی کران‌دار*

$$\gamma_j : H^s(\Omega) \longrightarrow H^{s-j-1/2}(\Gamma)$$

دارد و این عملگر دارای وارون راست پیوسته است.

قضیه فوق پیوستگی عملگر اثر را در نواحی لیپشیتز برای $\frac{1}{2} < s \leq 1$ ثابت می‌کند. به دلایلی که بعداً در کاربردها خواهیم دید به نتیجه قوی‌تری نیاز داریم که در ادامه اثبات می‌شود.

قضیه۶ ـ ۵. *اگر* Ω *ناحیه لیپشیتز باشد، عملگر اثر* γ_0 *برای* $\frac{1}{2} < s < \frac{3}{2}$ *کران‌دار است.*

برهان. ■

قضیه۶ ـ ۶. **(فرمول گرین)** *اگر* Ω *ناحیه لیپشیتز باشد، رابطه زیر برای هر* $u, v \in H^1(\Omega)$ *برقرار است:*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx + \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)\,(\gamma_0 v) \nu_i d\sigma$$

که $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_n)$ *بردار عمودی برون‌گرای مرز است.*

برهان. کافی است رابطه بالا را برای $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ و $u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ ثابت کنیم. دقت کنید در این حالت بردار عمود برون‌گرا بردار ثابت $\nu = (0, \cdots, 0, -1)$ است و فرمول گرین به شکل زیر برقرار است:

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\partial u}{\partial x_n} v \, dx = -\int_{\mathbb{R}^n_+} u \frac{\partial v}{\partial x_n} \, dx - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} u(x', 0) v(x', 0) \, dx'$$

■