فصل ۳

تبدیل فوریه

در این فصل ابتدا یک مرور اجمالی بر نظریه تبدیل فوریه خواهیم داشت. سپس تلاش خواهیم کرد که تبدیل فوریه یک تابع تعمیم یافته یا توزیع را تعریف کنیم.

تعریف ۳ ـ ۱. اگر $f \in \mathcal{L}^{1}(\mathbb{R}^n)$، تبدیل فوریه آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathcal{F}(f) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx.$$

در بعضی از کتاب‌ها عامل 2π در توان حذف می‌شود و به جای آن $(2\pi)^{-\frac{n}{2}}$ در انتگرال ضرب می‌شود. تمام نتایج که در اینجا مطرح می‌شود به‌طور مشابه برای شکل دیگر تبدیل فوریه برقرار است. از مهمترین خواص تبدیل فوریه می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱ــ اگر $f \in \mathcal{L}^{1}(\mathbb{R}^n)$، آنگاه $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

۲ــ اگر $f \in \mathcal{L}^{1}(\mathbb{R}^n)$، آنگاه $\hat{f}$ تابعی پیوسته است. زیرا اگر $\xi_k \to \xi$ آنگاه دنباله توابع $f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi_k}$ به $f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}$ میل می‌کند و بنابر قضیه همگرایی تسلطی لبگ نتیجه می‌شود که $\hat{f}(\xi_k) \to \hat{f}(\xi)$.

۳ــ اگر $f, g \in \mathcal{L}^{1}(\mathbb{R}^n)$ آنگاه $(f*g)\hat{} = \hat{f}\hat{g}$. زیرا

$$\begin{aligned}
(f*g)\hat{}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} (f*g)(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dy dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) e^{-2\pi i (x-y)\cdot\xi} dx\Big) g(y) e^{-2\pi i y\cdot\xi} dy \\
&= \hat{f}(\xi)\int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-2\pi i y\cdot\xi} dy = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)
\end{aligned}$$

۴ــ اگر $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ و $f_a(x) = f(x+a)$، آنگاه $(f_a)\hat{}(\xi) = e^{2\pi i a\cdot\xi}\hat{f}(\xi)$ و هم‌چنین $\mathcal{F}\big(f(\lambda x)\big) = \lambda^{-n}\hat{f}\Big(\frac{\xi}{\lambda}\Big)$. (به‌راحتی با تغییر متغیر انتگرال، روابط نتیجه خواهند شد.)

۵ــ اگر $f, D^\beta f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ برای هر $|\beta| \leq |\alpha|$، آنگاه $(D^\alpha f)\hat{}(\xi) = (2\pi i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$. (از فرمول انتگرال جزء به جزء به دست می‌آید.)

۶ــ اگر $f, (-2\pi i x)^\alpha f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ آنگاه مشتق $D^\alpha \hat{f}$ وجود دارد و $D^\alpha \hat{f}(\xi) = \big((-2\pi i x)^\alpha f\big)\hat{}(\xi)$. (با بررسی شرایط جابه‌جایی مشتق و انتگرال ثابت می‌شود.)

مثال۳ ــ ۱. اگر $f(x) = e^{-\pi a|x|^2}$ که $a > 0$، آنگاه $\hat{f}(\xi) = a^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{a}}$.

قضیه (فرمول تبدیل وارون) ۳ ــ ۲. *اگر $f, \hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$، آنگاه برای تقریباً هر x*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi\cdot x}d\xi \qquad (۳ ــ ۱)$$

به علاوه در هر نقطه پیوستگی تابع f تساوی برقرار است.

برهان. قرار دهید، $\phi(x) = e^{-\pi|x|^2}$ و $\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\phi\Big(\dfrac{x}{\varepsilon}\Big)$. با توجه به خاصیت ۴ و مثال ۱، نتیجه می‌شود

$$\hat{\phi}_\varepsilon(\xi) = \hat{\phi}(\varepsilon\xi) = e^{-\pi\varepsilon^2|\xi|^2} = \phi(\varepsilon\xi)$$

اکنون اگر فرمول تبدیل وارون (۳ ــ ۱) را برای ϕ_ε بنویسیم، دیده می‌شود که قضیه برای توابع ϕ_ε برقرار است.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}_\varepsilon(\xi)e^{2\pi i\xi\cdot x}d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\varepsilon\xi)e^{2\pi i\xi\cdot x}d\xi \\
&= \varepsilon^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \phi(\eta)e^{2\pi i\varepsilon^{-1}\eta\cdot x}d\eta \\
&= \varepsilon^{-n}\hat{\phi}\Big(-\frac{x}{\varepsilon}\Big) \\
&= \varepsilon^{-n}\phi\Big(-\frac{x}{\varepsilon}\Big) = \phi_\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

اکنون نشان می‌دهیم برای هر تابع دلخواه $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$، فرمول تبدیل وارون برای $\phi_\varepsilon * f$ برقرار است.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}_\varepsilon(\xi)\hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi\cdot x}d\xi = \int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-2\pi i y\cdot\xi}dy\Big)\hat{\phi}_\varepsilon(\xi)e^{2\pi i\xi\cdot x}d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}_\varepsilon(\xi) e^{2\pi i (x-y)\cdot\xi} d\xi dy$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi_\varepsilon(x-y)dy = (\phi_\varepsilon * f)(x)$$

از آنجا که $\hat{\phi}_\varepsilon(\xi) = \phi(\varepsilon\xi) \to 1$ وقتی $\varepsilon \to 0$ و با توجه به اینکه $\hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$، به کمک قضیه همگرایی تسلطی لبگ نتیجه می‌شود که

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi\cdot x} d\xi = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}_\varepsilon(\xi)\hat{f}(\xi) e^{2\pi i\xi\cdot x} d\xi = \lim_{\varepsilon\to 0} (\phi_\varepsilon * f)(x)$$

به کمک قضیه ۱ ــ ۲۹ اثبات کامل می‌شود. ■

تذکر۳ ــ ۳. این قضیه یک به یک بودن تبدیل فوریه را روی فضای $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ اثبات می‌کند. زیرا اگر $\hat{f} = 0$، آنگاه $f(x) = 0$ تقریباً همه‌جا در $\mathbb{R}^n$. لذا سمت راست رابطه (۳ ــ ۱) را عملگر تبدیل وارون فوریه می‌نامند که با نماد $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})$ نشان داده می‌شود.

قضیه زیر نشان می‌دهد که تعریف تبدیل فوریه را می‌توان به فضای $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ به صورت یک تبدیل ایزومتری توسعه داد.

قضیه۳ ــ ۴. *اگر $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ باشد، آنگاه $\hat{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ و $||f||_2 = ||\hat{f}||_2$. به‌علاوه نگاشت تبدیل فوریه $\mathcal{F} : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ به‌طور یکتا به یک ایزومتری پوشا $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ توسعه می‌یابد.*

برهان. قرار دهید $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$ در این‌صورت

$$\hat{\tilde{f}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(-x)} e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx = \overline{\hat{f}(\xi)}$$

با فرض $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ قرار دهید $g = f * \tilde{f}$، آنگاه $g(0) = ||f||_2^2$ و $\hat{g}(\xi) = |\hat{f}(\xi)|^2$. اکنون اگر فرمول تبدیل وارون را برای تابع پیوسته g در نقطه $x = 0$ بنویسیم، نتیجه می‌شود: $g(0) = ||\hat{f}||_2^2$. با توجه به چگال بودن $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ در فضای $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ می‌توان تبدیل فوریه را به یک ایزومتری $\mathcal{F} : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ توسعه داد. برای دیدن اینکه $\mathcal{F}$ پوشا است، تابع $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ را درنظر بگیرید، آنگاه به وسیله فرمول تبدیل وارون نتیجه می‌شود $\mathcal{F}(\hat{h}(-x)) = h$. درنتیجه تصویر $\mathcal{F}$ در $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ چگال است و با توجه به ایزومتری بودن، نتیجه می‌شود که پوشا نیز است. ■

نتیجه۳ ــ ۵. تبدیل وارون فوریه $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$، یک ایزومتری پوشا است.

تبدیل فوریه روی فضای $\mathcal{L}^{۲}(\mathbb{R}^n)$ نه تنها حافظ نرم است، بلکه ضرب داخلی را نیز حفظ می‌کند. این مطلب در قضیه زیر نشان داده شده است.

قضیه۳ ـ ۶. *اگر $u, v \in \mathcal{L}^{۲}(\mathbb{R}^n)$، آنگاه*

$$(u,v) = (\hat{u},\hat{v}) = \big(\mathcal{F}^{-۱}(u), \mathcal{F}^{-۱}(v)\big).$$

برهان. کافی است این رابطه برای توابع هموار $u, v \in C_\circ^\infty(\mathbb{R}^n)$ اثبات شود.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \overline{\hat{u}(\xi)}\hat{v}(\xi)d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\overline{\int_{\mathbb{R}^n} u(x)e^{-۲\pi ix\cdot\xi}dx}\Big)\hat{v}(\xi)d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \overline{u(x)}\hat{v}(\xi)e^{۲\pi ix\cdot\xi}dxd\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{u(x)}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\hat{v}(\xi)e^{۲\pi ix\cdot\xi}d\xi\Big)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{u(x)}v(x)dx\end{aligned}$$

■

در ادامه این بخش سعی می‌کنیم، تبدیل فوریه را به فضای توابع تعمیم یافته یا توزیع‌ها گسترش دهیم. اگر روش بخش گذشته را برای توسعه عملگرهایی نظیر مشتق به فضای توزیع‌ها را به یاد آورید، همه آنها دوگان عملگری به صورت $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ بودند. اما تبدیل فوریه یک تابع آزمون $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ لزوماً یک تابع آزمون نیست، هرچند با توجه به خاصیت ۶ تبدیل فوریه که در ابتدای بخش بیان شد، $\hat{f}$ تابعی هموار است اما حتی نمی‌توان ادعا کرد که $\hat{f}$ روی یک مجموعه با اندازه مثبت، صفر است. با این تفاسیر نمی‌توان تبدیل فوریه یک توزیع دلخواه را تعریف کرد ولی روی یک زیرمجموعه از توزیع‌ها به نام توزیع‌های ملایم قابل تعریف است. اکنون این خانواده از توزیع‌ها را معرفی می‌کنیم.

تعریف۳ ـ ۷. مجموعه توابع هموار

$$\mathcal{S} = \Big\{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\ \Big|\ \forall\alpha,\beta\ :\ \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\alpha D^\beta\phi(x)| < \infty\Big\}$$

که همگرایی در آن به صورت زیر است:

$$(\phi_n \to \phi) \quad \Longrightarrow \quad \Big(\forall\alpha,\beta\ :\ \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\alpha D^\beta(\phi_n-\phi)(x)| \to \circ\Big)$$

فضای شوارتز نامیده می‌شود.

تذکر۳ ـ ۸. تعریف فوق معادل این است که $\phi \in \mathcal{S}$ اگر و تنها اگر $\lim\limits_{|x|\to\infty} x^\alpha D^\beta\phi(x) = \circ$. به‌علاوه فضای شوارتز تحت جمع، ضرب، پیچش و عملگر مشتق بسته است.

مثال۳ ـ ۲. توابع آزمون $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ زیرفضای توپولوژیک $\mathcal{S}$ هستند. به‌علاوه تابع $\phi(x) = e^{-\alpha|x|^{۲}}$ برای $\alpha > ۰$ یک تابع شوارتز است که متعلق به فضای توابع آزمون نیست.

گزاره۳ ـ ۹. *برای هر* $۱ \leq p \leq \infty$، $\mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ *به‌طور پیوسته و برای* $۱ \leq p < \infty$، $\mathcal{S}$ *در* $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ *چگال است.*

برهان. تمرین ۲. ■

قضیه۳ ـ ۱۰. *نگاشت* $\phi \to \hat{\phi}$ *یک همریختی فضای برداری* $\mathcal{S}$ *است.*

برهان. با توجه به گزاره ۳ ـ ۹، تبدیل فوریه هر $\phi \in \mathcal{S}$ تعریف شده است. نشان می‌دهیم $\hat{\phi} \in \mathcal{S}$. با توجه به خاصیت ٦ تبدیل فوریه واضح است که $\hat{\phi} \in C^\infty$. هم‌چنین

$$\begin{aligned}\xi^\alpha D^\beta \hat{\phi}(\xi) &= \xi^\alpha \big((-۲\pi i x)^\beta \phi\big)\hat{\ }(\xi) \\ &= (-۲\pi i)^{-|\alpha|} \Big(D^\alpha \big((-۲\pi i x)^\beta \phi\big)\Big)\hat{\ }(\xi)\end{aligned}$$

بنابراین تابع $\xi^\alpha D^\beta \hat{\phi}(\xi)$ کراندار است و از $(۲\pi)^{|\beta|-|\alpha|} ||D^\alpha(x^\beta \phi)||_۱$ کمتر است. پوشا بودن نگاشت $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ مشابه قضیه ۳ ـ ۴ اثبات می‌شود. اگر $f \in \mathcal{S}$ آنگاه $\hat{f} \in \mathcal{S}$ و هم‌چنین $\hat{f}(-\xi) \in \mathcal{S}$ به‌علاوه $\mathcal{F}(\hat{f}(-\xi)) = f$. ■

تعریف۳ ـ ۱۱. اعضای فضای دوگان توپولوژیک $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ را توزیع ملایم[۳] می‌نامند.

به آسانی می‌توان نشان داد که نشاندن $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ پیوسته همراه با تصویر چگال است. هم‌چنین گزاره ۳ ـ ۹، همین خاصیت را برای نشاندن $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ برای $۱ \leq p < \infty$ بیان می‌کند. درنتیجه برای فضاهای دوگان روابط زیر به طور پیوسته برقرار است:

$$\mathcal{L}^q = (\mathcal{L}^p)' \subseteq \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{D}'$$

این رابطه بیانگر این است که اعضای $\mathcal{S}'$ خانواده‌ای از توزیع‌ها هستند.

مثال۳ ـ ۳. برای هر تابع $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$، $۱ \leq p \leq \infty$، توزیع متناظر با آن ملایم است، یعنی

$$\langle f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)} \phi(x) dx$$

یک تابعک خطی پیوسته روی $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ است. در واقع $\big|\langle f, \phi \rangle\big| \leq ||f||_p ||\phi||_q$.

---

[۳] tempered distribution

مثال۳ ـ ۴. اگر $(1+|x|^2)^{-k}f(x) \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ برای عدد صحیح k، آنگاه $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$، زیرا

$$\begin{aligned}\big|\langle f,\phi\rangle\big| &\le \int_{\mathbb{R}^n} \big|(1+|x|^2)^{-k}f(x)\big|\,\big|(1+|x|^2)^k\phi(x)\big|dx\\ &\le \|(1+|x|^2)^{-k}f(x)\|_p\|(1+|x|^2)^k\phi(x)\|_q\end{aligned}$$

مثال۳ ـ ۵. هر چندجمله‌ای $p(x)$ یک توزیع ملایم است.

$$\big|\langle p,\phi\rangle\big| \le \int_{\mathbb{R}^n} |p(x)\phi(x)|dx = \|p(x)\phi(x)\|_1$$

هرگاه $\phi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \phi$، آنگاه $p\phi_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} p\phi$ برای هر چندجمله‌ای $p(x)$.

گزاره۳ ـ ۱۲. $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

برهان. هر توزیع $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ روی فضای $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ تعریف می‌شود. (تمرین ۲ فصل ۲) با توجه به قضیه ۲ ـ ۹ ثابت‌های C و m پیدا می‌شوند که برای هر $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$،

$$\big|\langle u,\phi\rangle\big| \le C\sum_{|\alpha|\le m}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|D^\alpha\phi(x)|$$

اکنون اگر $\phi_k \xrightarrow{\mathcal{S}} \phi$، آنگاه $\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|D^\alpha(\phi_k-\phi)(x)| \to 0$ برای هر اندیس α. بنابراین

$$\langle u,\phi_k-\phi\rangle \to 0$$

یعنی u روی فضای $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ نیز پیوسته است. ■

تذکر۳ ـ ۱۳. اگر $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ را مطابق تمرین ۲ فصل قبل بدانیم، نشاندن $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ به‌طور پیوسته همراه با تصویر چگال است (تمرین ٦). این مطلب اثبات دیگری برای گزاره فوق ارایه می‌کند، زیرا در این صورت $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

مثال۳ ـ ٦. بنابر گزاره قبل $\delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

با توجه به قضیه ۳ ـ ۱۰ می‌توانیم تبدیل فوریه هر توزیع ملایم را تعریف کنیم. اگر $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ تبدیل وارون فوریه باشد، نگاشت دوگان آن تبدیل فوریه هر توزیع ملایم را تعریف می‌کند. اگر $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ تبدیل فوریه آن به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\langle \hat{u},\phi\rangle = \langle u,\check{\phi}\rangle \qquad \forall\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

که $\check{\phi}$ تبدیل وارون فوریه ϕ است. این تعریف تعمیم تعریف تبدیل فوریه توابع $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ است. علت این‌که دوگان تبدیل وارون را به جای دوگان تبدیل فوریه درنظر گرفتیم، همین است که به یک تعمیم طبیعی از تبدیل فوریه توابع برسیم.

دقت کنید که تعریف فوق نمی‌تواند به‌عنوان تبدیل فوریه یک توزیع دلخواه $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ به کار رود. زیرا در این حالت لزوماً $\check{\phi}$ به $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ متعلق نیست. هم‌چنین از قضیه ۳ ـ ۶ می‌توان نتیجه گرفت که برای هر تابع $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ رابطه بالا صحیح است، بنابراین تعریف فوق به نوعی توسعه تبدیل فوریه از فضای توابع به فضای توزیع‌های ملایم است.

مثال۳ ـ ۷. $\hat{\delta}$ برابر تابع ثابت یک است، زیرا

$$\langle \hat{\delta}, \phi \rangle = \langle \delta, \check{\phi} \rangle = \check{\phi}(۰) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = \langle ۱, \phi \rangle$$

مثال۳ ـ ۸. تابع ثابت، به‌صورت تابعی تبدیل فوریه ندارد، ولی به معنای توزیع $\hat{۱} = \delta$ زیرا،

$$\langle \hat{۱}, \phi \rangle = \langle ۱, \check{\phi} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \check{\phi}(\xi)d\xi = \phi(۰) = \langle \delta, \phi \rangle$$

گزاره۳ ـ ۱۴. *برای هر توزیع ملایم $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ روابط زیر برقرار است.*

الف) $(D^\alpha u)^\wedge = (۲\pi i\xi)^\alpha \hat{u}$.

ب) $D^\alpha \hat{u} = \left((-۲\pi ix)^\alpha u\right)^\wedge$.

برهان. (الف)

$$\begin{aligned}\langle (D^\alpha u)^\wedge, \phi \rangle &= \langle D^\alpha u, \check{\phi} \rangle = (-۱)^{|\alpha|}\langle u, D^\alpha \check{\phi} \rangle \\ &= (-۱)^{|\alpha|}\langle u, \left((۲\pi ix)^\alpha \phi\right)^\vee \rangle = (-۱)^{|\alpha|}\langle \hat{u}, (۲\pi ix)^\alpha \phi \rangle \\ &= \langle (۲\pi i\xi)^\alpha \hat{u}, \phi \rangle\end{aligned}$$

دقت کنید که تساوی آخر تعریف ضرب یک تابع مختلط در یک توزیع است که در مثال ۲ ـ ۴ تعریف شده است.

(ب)

$$\begin{aligned}\langle D^\alpha \hat{u}, \phi \rangle &= (-۱)^{|\alpha|}\langle \hat{u}, D^\alpha \phi \rangle = (-۱)^{|\alpha|}\langle u, (D^\alpha \phi)^\vee \rangle \\ &= (-۱)^{|\alpha|}\langle u, (-۲\pi i\xi)^\alpha \check{\phi} \rangle = \langle (-۲\pi ix)^\alpha u, \check{\phi} \rangle \\ &= \langle \left((-۲\pi ix)^\alpha u\right)^\wedge, \phi \rangle\end{aligned}$$

■

تذکر۳ ـ ۱۵. توابع چندجمله‌ای $f(x) = x^\alpha$ به صورت تابعی، تبدیل فوریه ندارند. ولی به معنای توزیع، تبدیل فوریه آن برابر است با $(x^\alpha)^\wedge = (-۲\pi i)^{-|\alpha|} D^\alpha \delta$.

در این قسمت اثر تبدیل فوریه را روی پیچش بررسی می‌کنیم. ابتدا توجه کنید وقتی

با توابع مختلط کار می‌کنیم، تعریف پیچش تابع f و توزیع u به‌صورت زیر بیان می‌شود که $\tilde{f}(x)=\overline{f(-x)}$: (تذکر۲ ـ ۱۲)

$$\langle u*f,\phi\rangle=\langle u,\phi*\tilde{f}\rangle$$

یا به‌طور معادل به‌صورت

$$(u*f)(x)=\overline{\langle u,(f_x)^{\tilde{}}\rangle}$$

گزاره۳ ـ ۱۶. *اگر $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ و $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$، آنگاه $u*f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

برهان. تمرین ۷. ■

گزاره۳ ـ ۱۷. *اگر $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ و $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$، آنگاه $(u*f)\hat{}=\hat{f}\hat{u}$.*

برهان. با توجه به تعریف پیچش برای هر $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ داریم:

$$\langle (u*f)\hat{},\phi\rangle=\langle u*f,\check{\phi}\rangle=\langle u,\check{\phi}*\tilde{f}\rangle$$

از طرف دیگر بنابر تعریف ضرب تابع در یک توزیع داریم:

$$\langle \hat{f}\hat{u},\phi\rangle=\langle \hat{u},\bar{\hat{f}}\phi\rangle=\langle u,(\bar{\hat{f}}\phi)\check{}\rangle$$

بنابراین تنها کافیست نشان دهیم:

$$(\bar{\hat{f}}\phi)\check{}=\check{\phi}*\tilde{f}$$

که معادل است با رابطه بدیهی $\bar{\hat{f}}=\hat{\tilde{f}}$. ■

در رابطه با تبدیل فوریه پیچش دو توزیع u و v دقت کنید که حاصل‌ضرب دو توزیع $\hat{u}$ و $\hat{v}$ تعریف نشده و مبهم است. گزاره زیر این ابهام را رفع می‌کند.

گزاره۳ ـ ۱۸. *اگر $u\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$، آنگاه $\hat{u}$ یک تابع با ضابطه زیر است:*

$$\hat{u}(\xi)=\overline{\langle u(x),e^{2\pi ix\cdot\xi}\rangle}.$$

برهان. عبارت سمت راست را به $h(\xi)$ نشان می‌دهیم، در این صورت:

$$\begin{aligned}\langle \hat{u},\phi\rangle&=\langle u,\check{\phi}\rangle=\left\langle u(x),\int_{\mathbb{R}^n}\phi(\xi)e^{2\pi ix\cdot\xi}d\xi\right\rangle\\&=\int_{\mathbb{R}^n}\langle u(x),e^{2\pi ix\cdot\xi}\rangle\phi(\xi)d\xi\\&=\langle h,\phi\rangle\end{aligned}$$

دقت کنید که تساوی بالا با تقریب انتگرال به صورت مجموع ریمان به‌دست می‌آید.

همچنین توجه داشته باشید که وقتی $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ است، روی هر تابع $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ اثر می‌کند. ■

اکنون رابطه $(u*v)\hat{} = \hat{u}\hat{v}$ در حالتی که یکی از توزیع‌های u و v متعلق به $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ باشند و دیگری در $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ معنا پیدا می‌کند. زیرا سمت راست تساوی ضرب یک توزیع و یک تابع است.

قضیه ۳ ـ ۱۹. *اگر $u, v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ که یکی از آنها در $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ واقع است، آنگاه*

$$(u*v)\hat{} = \hat{u}\hat{v}$$

برهان. تمرین ۸. ■

این فصل را با بیان این مطلب به پایان می‌رسانیم که تبدیل فوریه، یک یکریختی روی فضای $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ است. تبدیل وارون فوریه به‌صورت زیر برای هر $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ تعریف می‌شود.

$$\langle \check{u}, \phi \rangle := \langle u, \hat{\phi} \rangle \qquad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

به کمک قضیه ۳ ـ ۱۰، دیده می‌شود که $\check{u} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ است. خواص $\check{u}$ مشابه تبدیل فوریه از توابع به فضای توزیع‌های ملایم توسعه می‌یابد.

تمرین

۱. الف ـ قرار دهید $\rho_{\alpha,\beta}(\phi,\psi) = \sup |x^\alpha D^\beta(\phi-\psi)(x)|$، اگر $\rho_{\alpha,\beta}$ ها را به صورت d'_1، d'_2، ... مرتب کنیم و قرار دهیم $d_i = \dfrac{d'_i}{1+d'_i}$ ثابت کنید

$$d(\phi,\psi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(\phi,\psi)}{2^i}$$

یک متر روی فضای شوارتز است.

ب ـ ثابت کنید توپولوژی القاء شده توسط این متر با توپولوژی $\mathcal{S}$ یکسان است.

ج ـ ثابت کنید $\mathcal{S}$ فضای متریک کامل است.

۲. گزاره ۳ ـ ۹ را اثبات کنید.

۳. با یک مثال نشان دهید $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ در $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ چگال نیست.

۴. نشان دهید تابعک خطی u روی $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ یک توزیع ملایم است اگر و تنها اگر عدد

ثابت $C > ۰$ و مقادیر صحیح l و m وجود داشته باشند که

$$|\langle u, \phi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq l, |\beta| \leq m} \rho_{\alpha,\beta}(\phi)$$

برای هر $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ برقرار باشد. ($\rho_{\alpha,\beta}$ مطابق تمرین ۱ تعریف می‌شود)

۵. نشان دهید $e^{|x|} \notin \mathcal{S}'$.

٦. ثابت کنید نشاندن $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ پیوسته و تصویر آن چگال است. (توپولوژی $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ در تمرین ۲ فصل قبل معرفی شده است.)

۷. گزاره ۳ ـ ١٦ را اثبات کنید.

۸. قضیه ۳ ـ ۱۹ را اثبات کنید.