



۱. فرض کنید X^* نقطه بحرانی دستگاه $\dot{X} = F(X)$ باشد و L تابع لیاپانوف در همسایگی U از X^* باشد. هم‌چنین فرض کنید Ω همسایگی فشرده X^* در U باشد. ثابت کنید نقطه بحرانی X^* پایدار مجانبی است اگر بزرگترین زیرمجموعه ناوردای $\{X \in \Omega : \dot{L}(X) = 0\}$ باشد E .

۲. $F(x)$ و $G(x)$ دو میدان برداری در صفحه هستند که $F(x) \cdot G(x) = 0$ برای هر $x \in \mathbb{R}^2$. نشان دهید اگر دستگاه $\dot{X} = F(X)$ یک جواب تناوبی داشته باشد، آنگاه میدان G حتماً یک نقطه بحرانی دارد.

۳. اگر $A(t) = A + B(t)$ که A یک ماتریس ثابت و قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه آن منفی است، به علاوه $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|B(t)\| = 0$. در این صورت همه جوابهای $\dot{X} = A(t)X$ وقتی $t \rightarrow +\infty$ به مبداء میل می‌کند.

۴. نشان دهید در دستگاه زیر هر جواب که از نقطه‌ای روی محور y ها شروع شود دوباره این محور را قطع می‌کند.

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^3 + x \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

۵. الف- نوع نقطه بحرانی مبداء را در دستگاه زیر تعیین کنید.

ب- خمینه پایدار آن را تعیین کنید.

پ- بیان کنید که چرا خمینه ناپایدار باید به محور x ها مماس باشد. هم‌چنین در همسایگی مبداء به صورت نمودار تابع همواری مثل $y = h(x)$ است.

ت- با فرض اینکه تابع h در مبداء تحلیلی است آن را به دست آورید.

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 + y) \\ \dot{y} = -y + x^2 \end{cases}$$

۶. مدل شکار و شکارچی زیر را در نظر بگیرید که x شکار، y شکارچی و همه ضرایب ثابت، مثبت هستند.

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bx^2 - yh(x) \\ \dot{y} = -cy - dy^2 + \alpha yh(x) \end{cases}$$

الف- تعبیر هر کدام از ضرایب ثابت و تابع $h(x)$ چه می‌تواند باشد؟ علامت منفی برای ضرایب c و d چه معنایی دارد؟

ب- تفاوت مفهومی مدل را وقتی $h(x) = \frac{\beta x}{x + m}$ می‌گیریم با زمانی که $h(x) = \beta x$ است، بیان کنید. کدام منطقی‌تر است؟

پ- نشان دهید به شرط $h(0) = 0$ ، ناحیه ربع اول صفحه ناوردا است.

ت- نشان دهید برای هر دو حالت قسمت ب، مجموعه فشرده‌ای وجود دارد که سرنوشت همه جوابها از یک زمان به بعد داخل آن مجموعه فشرده خواهد بود.

موفق باشید.

۹۱/۱۰/۱۱

سؤالهای ۱ تا ۴، ۱۵، ۱۶، ۲۰، ۲۱ و ۲۲ دارند و سؤالهای ۵ و ۶، ۲۰ نمره.