حل مسایل امتحان پایان ترم معادلات دیفرانسیل

سؤال ۱: معادلهٔ دیفرانسیل داده شده عامل انتگرال سازی برابر با $\mu(t)=\exp\left(\int^t dt\right)=e^t$ دارد که با ضرب آن در طرفین معادلهٔ داده شده به دست می آوریم:

$$e^t y' + e^t y = e^t \sin t,$$

$$(e^t y)' = e^t \sin t,$$

$$e^t y = \frac{1}{2} e^t (\sin t - \cos t) + c$$

که در آن $c \in \mathbb{R}$ ثابتی دلخواه است. اکنون فرض $y(0)=a$ جواب یگانهٔ مسألهٔ مقدار اولیهٔ داده شده را به صورت زیر به دست می دهد:

$$y = \frac{1}{2}(\sin t - \cos t) + \left(a+\frac{1}{2}\right)e^{-t}.$$

پس فقط و فقط به ازای $a=-\frac{1}{2}$ جواب یگانهٔ مسألهٔ مقدار اولیهٔ داده شده تابعی متناوب با دورهٔ تناوب 2π است. $\square$

سؤال ۲: خیر. زیرا اگر y_1 و y_2 دو جواب برای معادلهٔ دیفرانسیلی به صورت داده شده روی بازهٔ I باشند آنگاه به ازای هر $t\in I$، $W[y_1,y_2](t)$ یا همواره صفر است یا همواره غیر صفر. حال آنکه در اینجا چنین نیست:

$$W[y_1,y_2](t) = \det\begin{bmatrix} t^7 & t^5 \\ 7t^6 & 5t^4 \end{bmatrix} = -2t^{11}$$

$$\begin{cases} =0 & \text{برای } t=0\in I: \\ \neq 0 & \text{برای هر } t\neq 0: \end{cases}$$

$\square$

سؤال ۳: بنا بر قضیهٔ خوانده شده، مسألهٔ مقدار اولیهٔ داده شده دارای جوابی یگانه است که این جواب را می توانیم حول صفر به سری تیلور بسط دهیم:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

با مشتق گیری و جایگذاری این جواب در معادله به دست می آوریم:

$$2a_2 + \sum_{n=3}^{\infty}\left[n(n-1)a_n - a_{n-3}\right]t^{n-2} = 0.$$

اکنون یگانگی سری تیلور نتیجه می دهد که $a_2=0$ و نیز برای هر $n\geq 3$: $a_n=\frac{1}{n(n-1)}a_{n-3}$. برای به دست آوردن جواب یگانهٔ مسألهٔ مقدار اولیه کافی است قرار دهیم $a_0=1$ و $a_1=0$. این نیز نتیجه می دهد که برای هر $n\geq 1$، $a_{3n}=\frac{1\times 4\times\cdots\times(3n-2)}{(3n)!}$، $a_{3n+1}=0$ و $a_{3n+2}=0$. پس بسط تیلور جواب یگانهٔ مسألهٔ مقدار اولیهٔ داده شده به صورت

$$y = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\times 4\times\cdots\times(3n-2)}{(3n)!}t^{3n}$$

می باشد. $\square$

سؤال ۴: با فرض $Y=\mathcal{L}(y)$ و گرفتن لاپلاس از طرفین معادلهٔ دیفرانسیل داده شده به دست می آوریم:

$$s^2Y(s) - 1 - 2sY(s) + 5Y(s) = 2e^{-3s}.$$

در نتیجه

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2+4} + \frac{2e^{-3s}}{(s-1)^2+4}.$$

اکنون با گرفتن تبدیل معکوس لاپلاس به دست می آوریم:

$$y = \frac{1}{2}e^t \sin 2t + H_3(t)\, e^{(t-3)}\sin(2t-6).$$

$\square$

سؤال ۵: الف) با فرض $X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z\end{bmatrix}$ و نیز

$$f(t)=\begin{bmatrix} 0 \\ e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

دستگاه داده شده به شکل ماتریسی $X'=AX+f(t)$ تبدیل می‌شود. □

ب) ماتریس A فقط یک مقدار ویژه دارد که برابر است با $\lambda=2$ که تکرار آن نیز ۳ می‌باشد. این مقدار ویژه، فقط یک بردار ویژهٔ مستقل خطی به دست می‌دهد که می‌توان آن را $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ در نظر گرفت. پس یک جواب دستگاه همگن متناظر به صورت $e^{2t}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ می‌باشد.

دو جواب مستقل خطی دیگر به صورت $(P_0+P_1t)\,e^{2t}$ و $(Q_0+Q_1t+Q_2t^2)\,e^{2t}$ می‌باشند که ضرایب P_0، P_1، Q_0، Q_1 و Q_2 را می‌توان از روابط زیر به دست آورد:

$(A-2I)P_1=0$، $(A-2I)P_0=P_1$، $(A-2I)Q_2=0$، $(A-2I)Q_1=2Q_2$ و $(A-2I)Q_0=Q_1$.

در نتیجه دو جواب مستقل خطی دیگر به صورت

$$e^{2t}\begin{bmatrix}0\\1\\t\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad e^{2t}\begin{bmatrix}-2\\2t\\t^2\end{bmatrix}$$

می‌باشند. □

ج) یک ماتریس اساسی جواب دستگاه همگن متناظر برابر است با

$$\Phi(t)=e^{2t}\begin{bmatrix}0&0&-2\\0&1&2t\\1&t&t^2\end{bmatrix}.$$

□

د)

$$e^{At}=\Phi(t)\,\Phi(0)^{-1}$$

$$=e^{2t}\begin{bmatrix}0&0&-2\\0&1&2t\\1&t&t^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-\frac{1}{2}&0&0\end{bmatrix}$$

$$=e^{2t}\begin{bmatrix}1&0&0\\-t&1&0\\-\frac{1}{2}t^2&t&1\end{bmatrix}.$$

□

هـ) با توجه به فرمول تغییر پارامترها به دست می‌آوریم:

$$X=e^{At}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}+\int_0^t e^{A(t-s)}\begin{bmatrix}0\\e^{2s}\\0\end{bmatrix}ds$$

$$=\begin{bmatrix}0\\0\\e^{2t}\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}0\\e^{2t}\\(t-s)e^{2t}\end{bmatrix}ds$$

$$=\begin{bmatrix}0\\t\,e^{2t}\\(\frac{1}{2}t^2+1)\,e^{2t}\end{bmatrix}.$$

پس جواب دستگاه ناهمگن داده شده همراه با شرط اولیهٔ داده شده عبارت است از: $x=0$، $y=t\,e^{2t}$ و $z=(\frac{1}{2}t^2+1)\,e^{2t}$. □

سؤال ۶: الف) با فرض $-2x+2x^2=0$ و $-3x+y+3x^2=0$ به دست می‌آوریم $x=0$ و $y=0$ یا $x=1$ و $y=0$. پس دستگاه داده شده دارای دو نقطهٔ بحرانی $(0,0)$ و $(1,0)$ است. □

ب) برای به دست آوردن وضعیت نقطهٔ بحرانی $(0,0)$، دستگاه را به صورت زیر می‌نویسیم:

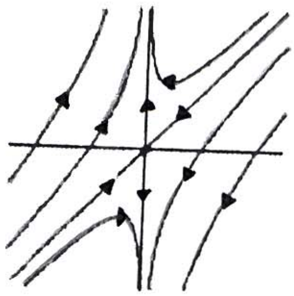
$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}'=\begin{bmatrix}-2&0\\-3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2x^2\\3x^2\end{bmatrix}.$$

توجه می‌کنیم که این دستگاه یک دستگاه تقریباً خطی است.

معادلهٔ مشخصهٔ ماتریس

$$\begin{bmatrix}-2 & 0\\ -3 & 1\end{bmatrix}$$

برابر با $\lambda^2+\lambda-2=0$ است ولذا $\lambda=1$ و $\lambda=-2$ مقادیر ویژه هستند. پس $(0,0)$ برای دستگاه خطی متناظر یک نقطهٔ زینی ناپایدار است. درنتیجه برای دستگاه تقریباً خطی نیز چنین است. برای رسم نمای فاز دستگاه تقریباً خطی در همسایگی $(0,0)$ توجه می‌کنیم که $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ بردار ویژهٔ وابسته به $\lambda=1$ و $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ بردار ویژهٔ وابسته به $\lambda=-2$ می‌باشد. درنتیجه نمای فاز به صورت زیر است:



برای به دست آوردن وضعیت نقطهٔ بحرانی $(1,0)$، از تغییر متغیر $u=x-1$ و $v=y$ استفاده می‌کنیم. این تغییر متغیر دستگاه را به صورت زیر تبدیل می‌کند:

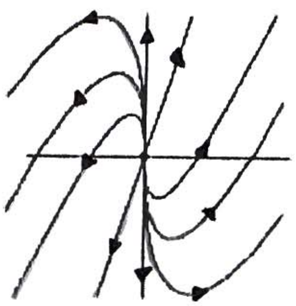
$$\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}' = \begin{bmatrix}2 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2u^2\\ 3u^2\end{bmatrix}$$

توجه می‌کنیم که این دستگاه یک دستگاه تقریباً خطی است.

معادلهٔ مشخصهٔ ماتریس

$$\begin{bmatrix}2 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

برابر با $\lambda^2-3\lambda+2=0$ است ولذا $\lambda=1$ و $\lambda=2$ مقادیر ویژه هستند. پس $(0,0)$ برای دستگاه خطی متناظر برحسب u و v یک گرهٔ نامتقارن ناپایدار (چشمه) است. درنتیجه برای دستگاه تقریباً خطی نیز چنین است. برای رسم نمای فاز دستگاه تقریباً خطی برحسب u و v در همسایگی $(0,0)$ توجه می‌کنیم که $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ بردار ویژهٔ وابسته به $\lambda=1$ و $\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ بردار ویژهٔ وابسته به $\lambda=2$ می‌باشد. درنتیجه نمای فاز به صورت زیر است:



نمای فاز دستگاه داده شده در همسایگی نقاط بحرانی: