بسمه تعالی

تاریخ: ۸۸/۸/۲۸

شماره:

پیوست:

دانشگاه صنعتی شریف

حل مسایل امتحان میان‌ترم معادلات دیفرانسیل

سؤال ۱: الف) با تقسیم طرفین معادله بر t^2+1 به دست می‌آوریم:

$$y' + \frac{t}{1+t^2}\, y = \sqrt{(1+t^2)^3}.$$

این معادله عامل انتگرال‌سازی به صورت

$$\mu(t) = \exp\left(\int^t \frac{t}{1+t^2}\, dt\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right) = \sqrt{1+t^2}$$

دارد که با ضرب آن در طرفین معادلهٔ مذکور به دست می‌آوریم

$$\sqrt{1+t^2}\, y' + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\, y = (1+t^2)^2,$$

$$\left(\sqrt{1+t^2}\, y\right)' = 1+2t^2+t^4,$$

$$\sqrt{1+t^2}\, y = t + \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + c,$$

که در آن $c\in\mathbb{R}$ ثابتی دلخواه است. درنتیجه جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده به صورت زیر می‌باشد:

$$y = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\left(t + \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + c\right). \square$$

ب) به وضوح جوابی از معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده که در شرط اولیهٔ $y(0)=0$ صدق می‌کند برابر است با

$$y = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\left(t + \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5\right). \square$$

سؤال ۲: الف) با ضرب طرفین معادله در $\mu(t,y)=f(ty)$ به دست می‌آوریم:

$$f(ty)y^2 + f(ty)(1+ty)y' = 0.$$

اما شرط لازم و کافی برای آن که معادلهٔ دیفرانسیل بالا به یک معادلهٔ کامل تبدیل شود این است که داشته باشیم:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(f(ty)y^2\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(f(ty)(1+ty)\right).$$

این تساوی نتیجه می‌دهد که

$$tf'(ty)y^2 + 2yf(ty) = yf'(ty)(1+ty) + yf(ty).$$

درنتیجه پس از ساده کردن به دست می‌آوریم $f'(ty)=f(ty)$ و لذا می‌توانیم $\mu(t,y)=e^{ty}$ را به عنوان عامل انتگرال‌ساز انتخاب کنیم. $\square$

ب) با ضرب طرفین معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده در e^{ty} به دست می‌آوریم:

$$e^{ty}y^2 + e^{ty}(1+ty)y' = 0.$$

با توجه به این که

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{ty}y^2\right) = te^{ty}y^2 + 2ye^{ty},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{ty}(1+ty)\right) = ye^{ty}(1+ty) + ye^{ty},$$

به دست می‌آوریم

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{ty}y^2\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{ty}(1+ty)\right)$$

که نشان می‌دهد معادلهٔ به دست آمده کامل می‌باشد. درنتیجه جواب عمومی آن به صورت $\phi(t,y)=c$ است که در آن $c\in\mathbb{R}$ ثابتی دلخواه است و داریم

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = e^{ty}y^2, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = e^{ty}(1+ty).$$

با انتگرال‌گیری برحسب t از معادلهٔ اول به دست می‌آوریم $\phi(t,y) = ye^{ty} + h(y)$. اکنون معادلهٔ دوم ایجاب می‌کند که $e^{ty} + tye^{ty} + h'(y) = e^{ty}(1+ty)$ و لذا $h'(y)=0$. پس $h(y)$ ثابت است و درنتیجه $ye^{ty}=c$ جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده است. $\square$

ج) $ye^{ty}=1$ جوابی است که در شرط اولیهٔ $y(0)=1$ صدق می‌کند. اما $\left.\frac{\partial}{\partial y}\left(ye^{ty}\right)\right|_{(0,1)} \neq 0$، پس بنابر قضیهٔ تابع ضمنی جواب مذکور را می‌توانیم به صورت $y=y(t)$ در همسایگی‌ای از $t_0=0$ بنویسیم. $\square$

بسمه تعالی

تاریخ: ۸۸/۸/۲۸

شماره:

پیوست:

دانشگاه صنعتی شریف

سؤال ۳: الف) برای هر مستطیل داده شده به مرکز $(0,0)$، e^{2y} و $2e^{2y}$ توابعی پیوسته در نقطهٔ (t,y) از مستطیل هستند. پس قضیهٔ وجود و یگانگی موضعی پیکارد تضمین می‌کند که مسألهٔ داده شده جواب یگانه‌ای دارد که در بازه‌ای مثل $(-2,2)$ تعریف شده است. □

ب) در قسمت (الف) اگر مستطیل را

$$R=\{(t,y): |t|\leqslant a,\ |y|\leqslant b\}$$

فرض کنیم آنگاه $r=\min\{a, \frac{b}{M}\}$ که در آن

$$M=\max_{(t,y)\in R}|e^{2y}| = e^{2b},$$

و لذا $r=\min\{a, b/e^{2b}\}$. اما

$$\frac{d}{db}\left(b/e^{2b}\right) = (1-2b)e^{2b}/e^{4b}$$

نشان می‌دهد که b/e^{2b} ماکسیمم مطلق خود را در $b=1/2$ به خود می‌گیرد و این ماکسیمم برابر است با $1/2e$. لذا برای هر b داریم $b/e^{2b}\leqslant 1/2e$ و در نتیجه $0<r\leqslant 1/2e$. پس $(-1/2e, 1/2e)$ ماکسیمم بازه‌ای است که در قسمت (الف) با استفاده از قضیهٔ وجود و یگانگی موضعی پیکارد می‌توان به دست آورد. □

ج) با استفاده از روش جداسازی به دست می‌آوریم $e^{-2y}dy = dt$. در نتیجه $\int_0^y e^{-2u}du = \int_0^t ds$ یا $-\frac{1}{2}(e^{-2y}-1) = t$ یا $y=-\frac{1}{2}\ln(1-2t)$ که جواب یگانهٔ مسألهٔ مقدار اولیهٔ داده شده است. ماکسیمم بازه‌ای که جواب یگانهٔ مسأله در آن تعریف شده است بازهٔ $(-\infty, 1/2)$ می‌باشد. □

سؤال ۴: الف) جواب دیگر معادلهٔ دیفرانسیل همگن متناظر به صورت $y_2(t) = t\,v(t)$ است که در آن

$$v'(t) = \exp\left(\int^t \frac{2t}{1+t^2}\,dt\right)\Big/t^2$$

$$= \exp\left(\ln(1+t^2)\right)\big/t^2$$

$$= (1+t^2)/t^2$$

$$= 1/t^2 + 1.$$

پس یک انتخاب برای $v(t)$ می‌تواند $t - 1/t$ باشد که جواب دوم معادلهٔ دیفرانسیل همگن متناظر را به صورت $y_2(t) = t^2-1$ به دست می‌دهد. □

ب)

$$W[y_1,y_2](t) = \det\begin{bmatrix} t & t^2-1 \\ 1 & 2t \end{bmatrix}$$

$$= t^2+1.$$

پس برای هر t، $W[y_1,y_2](t)\neq 0$ که استقلال خطی y_1 و y_2 را نتیجه می‌دهد. □

ج) یک جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل ناهمگن داده شده $y(t) = t\,u_1(t) + (t^2-1)\,u_2(t)$ می‌باشد که در آن

$$u_1'(t) = -(1+t^2)(t^2-1)\big/(t^2+1) = 1-t^2,$$

$$u_2'(t) = (1+t^2)\,t\big/(t^2+1) = t.$$

پس یک انتخاب برای $u_1(t)$ و $u_2(t)$ می‌تواند به صورت $u_1(t) = t - \frac{1}{3}t^3$ و $u_2(t) = \frac{1}{2}t^2$ باشد که جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل ناهمگن داده شده را به صورت

$$y = t^2 - \tfrac{1}{3}t^4 + \tfrac{1}{2}t^4 - \tfrac{1}{2}t^2 = \tfrac{1}{6}t^4 + \tfrac{1}{2}t^2$$

به دست می‌دهد. □

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

تاریخ: ۸۸/۸/۲۸

شماره:

پیوست:

د) جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل ناهمگن داده شده

$$y = c_1 t + c_2(t^2-1) + \tfrac{1}{6}t^4 + \tfrac{1}{2}t^2$$

می باشد که در آن $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ثابت های دلخواه‌اند. □

سؤال ۵: الف) معادلهٔ مشخصهٔ معادلهٔ دیفرانسیل همگن متناظر $r^2 - 2r + 2 = 0$ می باشد که ریشه‌های آن $1 \pm i$ می باشند. پس $y_1 = e^t \cos t$ و $y_2 = e^t \sin t$ دو جواب مستقل خطی برای معادلهٔ دیفرانسیل همگن متناظر هستند. □

ب) ابتدا جواب خصوصی $y'' - 2y' + 2y = 2t - 2$ را پیدا می‌کنیم. کاندیدا برای جواب $y = At + B$ است که با جایگذاری جواب $y = t$ به دست می‌آید. اکنون جواب خصوصی برای $y'' - 2y' + 2y = 2e^t(\cos t + \sin t)$ را به دست می‌آوریم. کاندیدا برای جواب $y = t(Ae^t \cos t + Be^t \sin t)$ است که با جایگذاری جواب $y = -te^t(\cos t - \sin t)$ به دست می‌آید. پس جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل ناهمگن داده شده $y = t + te^t(\cos t - \sin t)$ می باشد. □

ج) جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل ناهمگن داده شده

$$y = e^t(c_1 \cos t + c_2 \sin t) + t + te^t(\cos t - \sin t)$$

می باشد که در آن $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ثابت های دلخواه‌اند. □

سؤال ۶: الف) اگر $y'(t_0) = 0$، آنگاه بنابر قضیهٔ وجود و یگانگی به دست می‌آوریم $y = 0$ که تناقض است. پس $y'(t_0) \neq 0$ و چون y' در $\mathbb{R}$ پیوسته است، پس همسایگی از t_0 مثل I موجود است که $y' \neq 0$ در I. در نتیجه y در I یا اکیداً صعودی است و یا اکیداً نزولی. پس در هر صورت y در I، به جز در t_0، غیرصفر است. □

ب) فرض کنید α و β $(\alpha < \beta)$ دو ریشهٔ متوالی y_2 باشند. اگر y_1 در (α, β) ریشه‌ای نداشته باشد، آنگاه y_1 در $[\alpha, \beta]$ نیز ریشه ندارد، زیرا در غیر این صورت $W[y_1, y_2](\alpha) = 0$ یا $W[y_1, y_2](\beta) = 0$ که تناقض است. در نتیجه تابع y_2/y_1 در $[\alpha, \beta]$ پیوسته و در (α, β) مشتق‌پذیر خواهد بود و نیز $y_2/y_1(\alpha) = y_2/y_1(\beta) = 0$. پس بنابر قضیهٔ رل c، $\alpha < c < \beta$، موجود است که $(y_2/y_1)'(c) = 0$. این نیز نتیجه می‌دهد که $W[y_1, y_2](c) = 0$ که تناقض است. پس y_1 در (α, β) ریشه‌ای دارد.

اکنون فرض کنید y_1 در (α, β) بیش از یک ریشه داشته باشد. بنابر قسمت (الف) می‌توانیم دو ریشهٔ متوالی از y_1 را در (α, β) در نظر بگیریم. بنابر استدلال ابتدای قسمت (ب) می‌توانیم نتیجه بگیریم که y_2 ریشه‌ای در (α, β) دارد و این با این که α و β دو ریشهٔ متوالی y_2 بودند تناقض دارد. پس y_1 در (α, β) دقیقاً یک ریشه دارد. □