

۱. جواب معادله دیفرانسیل با شرط اولیه زیر را بیابید. (۱ نمره)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4y - 3x}{2x - y} \quad y(0) = 1$$

۲. الف) پایه‌ای برای جواب‌های معادله دیفرانسیل خطی همگن زیر بیابید. (۱ نمره)

$$L(x) = x'' + x' - 2x$$

ب) جواب خاصی برای معادله ناهمگن $L(x) = t + e^t$ بیابید. (۱ نمره)

۳. جواب‌های عمومی دستگاه‌های زیر را بدست آورید و شکل تقریبی جواب‌ها را به همراه جهت در صفحه

ترسیم کنید. (۳ نمره)

$$X' = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} X \quad \text{ب)} \quad X' = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} X \quad \text{الف)}$$

۴. فرض کنید $\Phi(t)$ ماتریس اساسی دستگاه خطی $X' = AX$ باشد که $\Phi(0) = I$. نشان دهید

$$X(t) = \Phi(t)X_0 + \int_0^t \Phi(t-s)G(s)ds$$

در دستگاه با شرایط اولیه زیر صدق می‌کند. (۱ نمره)

$$X'(t) = AX(t) + G(t) \quad X(0) = X_0$$

۵. الف) کدام یک از موارد ذکر شده می‌تواند جواب‌های معادله دیفرانسیل خطی همگن مرتبه دوم

$$L(x) = x'' + p(t)x' + q(t)x = 0 \quad \text{باشد. } (p(t) \text{ و } q(t) \text{ پیوسته اند). (۱ نمره)}$$

$$x_1(t) = t^2 \text{ و } x_2(t) = t^2 + 1 \quad (۱)$$

$$x_1(t) = e^t \text{ و } x_2(t) = 1 + e^t \quad (۲)$$

ب) در هر موردی که x_1 و x_2 می‌توانند جواب معادله همگن باشند، جواب معادله ناهمگن

$$L(x) = 1 \quad \text{را بیابید. (۱ نمره)}$$

موفق باشید