س ۱. با اعمال تغییر متغیر $y = ux$ $(x \neq 0)$ بدست می‌آوریم

$$u'x + u = y' = \frac{4u-3}{2-u}$$

$$\Rightarrow \quad u'x = \frac{(u-1)(u+3)}{2-u}$$

از معادله بالا بدست می‌آید $u \equiv 1$ و $u \equiv -3$ جوابهای معادله هستند (یعنی $y = x$ و $y = -3x$)

اگر u جوابی غیر از این دو باشد

$$\frac{(2-u)\,du}{(u-1)(u+3)} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1/4}{u-1} - \frac{5/4}{u+3}\right) = \frac{dx}{x}$$

با انتگرال‌گیری: $\Rightarrow \quad c|x| = |u-1|^{1/4}\,|u+3|^{-5/4}$

با جایگذاری $u = y/x$: $\quad c|y+3x|^{5} = |y-x|$

س ۲) چند جمله‌ای مشخصه $r^2 + r - 2 = (r+2)(r-1)$

پس جوابهای پایه $\{e^t, e^{-2t}\}$ می‌باشند

ب) جواب خاص برای معادله‌ی $L(x) = t$ به صورت $at+b$ حدس می‌زنیم که با جایگذاری بدست می‌آید $a = -1/2\,,\ b = -1/4$

جواب خاص برای معادله $L(x) = e^t$ با توجه اینکه ۱ ریشه‌ی مشخصه است به صورت cte^t حدس زده می‌شود که با جایگذاری داریم $c = 1/3$

پس جواب خصوصی در (ب) به شکل $\frac{te^t}{3} - \frac{1}{4}(2t+1)$

س ۱۳ الف) $A = \begin{pmatrix}4 & 3\\ -3 & -2\end{pmatrix}$ ، $X' = AX$

مقادیر ویژه‌ی ماتریس عبارتند از $\lambda = 1, 1$.

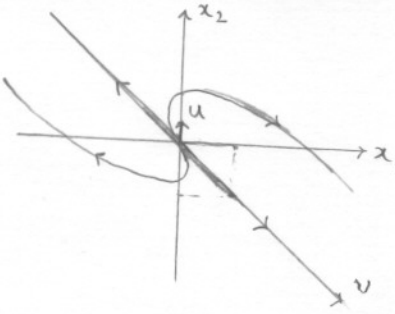
برای یافتن بردار ویژه متناظر دستگاه $(A-I)X = 0$ را حل می‌کنیم که بدست می‌دهد $X = c\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ یعنی فضای بردارهای ویژه یک بعدی است. جوابی برای معادله

$$\phi_1(t) = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^t = ve^t$$

جواب دوم به شکل $(vt+u)e^t$ می‌باشد که u در دستگاه $(A-I)u = v$ صدق می‌کند با حل این دستگاه یک u به شکل $\begin{pmatrix}0\\1/3\end{pmatrix}$ بدست می‌آوریم. جواب دوم

$$\phi_2(t) = \left[\begin{pmatrix}t\\-t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1/3\end{pmatrix}\right]e^t$$

و جواب عمومی $X = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$.



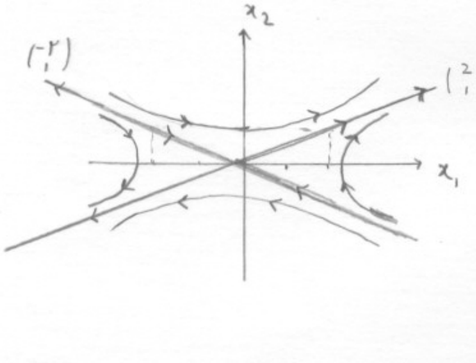
ب) مقادیر ویژه‌ی ماتریس ضرایب عبارتند از $\lambda = +1$ و $\lambda = -3$

$$(A-I)\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

پس یک جواب $\phi_1(t) = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}e^{+t}$ ،

$$(A+3I)\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$$

و جواب دیگر $\phi_2 = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}e^{-3t}$. جواب عمومی $X = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$.



سؤال ۴:

$$X(t) = \Phi(t)X_0 + \int_0^t \Phi(t-s)G(s)\,ds$$

$$X(0) = \Phi(0)X_0 + 0 = IX_0 = X_0$$

$$X'(t) = \Phi'(t)X_0 + \int_0^t \Phi'(t-s)G(s)\,ds + \Phi(t-t)G(t)$$

$$= A\Phi(t)X_0 + \int_0^t A\Phi(t-s)G(s)\,ds + \Phi(0)G(t)$$

$$= A\left(\Phi(t)X_0 + \int_0^t \Phi(t-s)G(s)\,ds\right) + G(t)$$

$$= AX(t) + G(t)$$

سؤال ۵. الف) شرط جواب بودن آن است که رونسکین یا همیشه صفر باشد و یا هیچ گاه صفر نباشد

(۱
$$W(t) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 & t^3+1 \\ 2t & 3t^2 \end{pmatrix} = t^4 - 2t$$

رونسکین این دو تابع گاهی صفر است و گاهی غیر صفر (در نتیجه) x_1 و x_2 نمی توانند جواب معادله دیفرانسیل خطی همگن مرتبه دو باشند

(۲
$$W(t) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 1+e^t \\ e^t & e^t \end{pmatrix} = -e^t \neq 0$$

پس x_1 و x_2 می توانند جواب های معادله دیفرانسیل خطی همگن مرتبه دو باشند و پایه ای برای جواب های آن تشکیل می دهند

ب) جواب خاص برای معادله ناهمگن را به کمک روش تغییر پارامتر می یابیم:

$$X(t) = C_1(t)X_1(t) + C_2(t)X_2(t)$$

$$C_1(t) = -\int \frac{X_2(t)\cdot 1}{W}\,dt = \int 1+e^{-t}\,dt = t - e^{-t}$$

$$C_2(t) = -\int \frac{X_1(t)\cdot 1}{W}\,dt = \int -1\,dt = -t$$

$$X(t) = (t-e^{-t})e^t + (-t)(1+e^t) = -(t+1)$$